Accueil | Cours | Exercices tutorés | Exercices de réflexion | Divers | Tests

Transformation de Laplace

I Définition

Soit *f* une fonction de la variable réelle *t*, définie sur R et supposée nulle pour *t* négatif (fonction causale)

On appelle transformée de Laplace de *f*, la fonction *F* définie par:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.f(t).dt$$

Où *p* est une variable complexe.

$$\begin{cases} F(p) \text{ est l'image de } f(t) \text{ par la transformation de Laplace} \\ f(t) \text{ est l'original de } F(p) \end{cases}$$

On écrit :

F(p) = L [f(t)] ou *F(p) Ì f(t)*

f(t) = L^{-1} [F(p)] ou *f(t) É F(p)*

La transformée de Laplace d'une fonction n'existe que si l'intégrale est convergente, pour cela on est amené à imposer à *f* deux conditions :

* être continue par morceaux sur tout fermé *[0 ; x_0]*

* être "d'ordre exponentiel à l'infini", c'est à dire qu'il existe *M>0* et a tels que |*f(t)*|<$Me^{a.t}$ pour *t > X*.

On démontre que si les hypothèses précédentes sont vérifiées, la transformée de Laplace est définie pour *p>a* , ou si *p* est complexe, pour Â *(p) > a* .

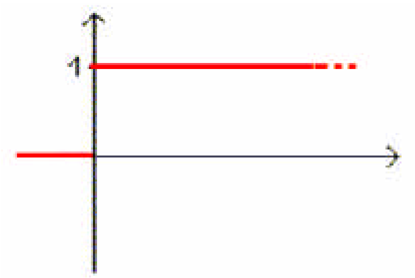
Le domaine de convergence de *F(p)* est *] a ; ¥ [(a Î R)* ou encore, le ½ plan complexe Â *(p) > a* *(a Î C).*

Par la suite on considérera en général que Â (p) > 0.

II Transformée de fonctions élémentaires

II-1 Fonction échelon unité (fonction d'Heaviside) U(t)

$$U(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

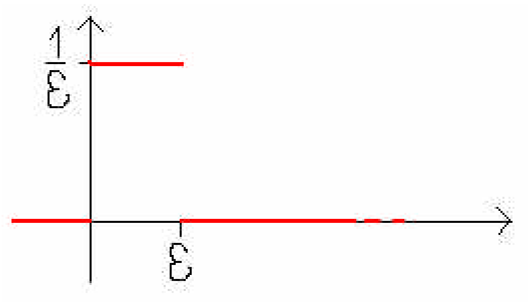


$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.1.dt = \left[\frac{e^{-p.t}}{-p}\right]_0^{\infty}$ Si Â (p)>0 alors $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^{-p.t}}{-p} = 0$ ce qui implique

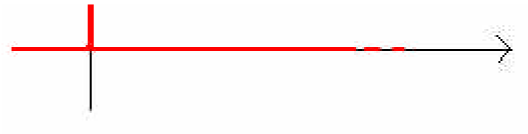
$$L(U(t)) = \frac{1}{p}$$

II-2 Fonction impulsion unité (Distribution de Dirac)

$$\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases}$$



Remarque: " *e* , on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).dt = 1$. Si e tend vers 0, la distribution de Dirac qui n'est pas une fonction sert à représenter en physique une action s'exerçant sur un instant très court (impulsion)



$L(\delta(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.\frac{1}{\varepsilon}.dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} e^{-p.t}.dt = \left[\frac{e^{-p.t}}{-p}\right]_0^{\varepsilon}$ avec Â *(p)>0*

$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}.\left[\frac{e^{-p.\varepsilon}}{-p} + \frac{1}{p}\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 - e^{-p.\varepsilon}}{p.\varepsilon} = 1$ (on utilise les développements limités ou la règle de l'Hospital)

$$L(\delta(t)) = 1$$

II-3 Fonction puissance

Soit $t^n.U(t) = \begin{cases} t^n & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ (*n Î N*). Calculons donc $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.t^n.dt = I_n$

Posons le changement de variables : $\begin{matrix} u = t^n & du = nt^{n-1}.dt \\ dv = e^{-p.t}.dt & v = \frac{e^{-p.t}}{-p} \end{matrix}$

$I_n = \left[t^n.\frac{e^{-p.t}}{-p}\right]_0^{\varepsilon} + \frac{n}{p}\int_0^{+\infty} e^{-p.t}.t^{n-1}.dt$ (le premier crochet est nul si Â *(p)>0*)

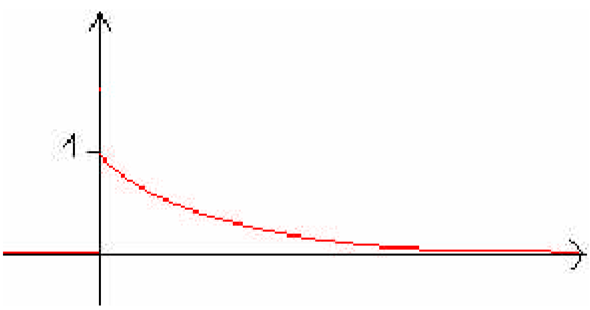
D'où $I_n = \frac{n}{p} I_{n-1}$

$I_0 = \frac{1}{p}; \ I_1 = \frac{1}{p^2}; \ I_2 = \frac{2}{p^3}; \ \ldots\ldots\ldots \ I_n = \frac{n!}{p^{n+1}}$

$$F(p) = L(t^n.U(t)) = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (\, n \ Î \ N)$$

II-4 Fonction exponentielle

$F(p) = e^{-a.t}.U(t) = \begin{cases} e^{-a.t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$



$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.e^{-a.t}.dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a).t}.dt = \left[\frac{e^{-(p+a).t}}{-(p+a)}\right]_0^{\infty}$$

Si Â *(p + a) > 0* alors, $\lim_{t \to \infty} e^{-(p+a).t} = 0$, d'où

$$F(p) = L(e^{-a.t}.U(t)) = \frac{1}{p+a}$$ (Â *(p) > –Â (a)*)

III Propriétés

III-1 Linéarité

" a* et *" b Î C* et *L[f(t)] = F(p)* et *L[g(t)] = G(p)

$$\boxed{L[a.f(t) + b.g(t)] = a.F(p) + b.G(p)}$$

Exemple : Transformée de Laplace de cos w t.U(t) et sinwt.U(t)

$$L(\cos\omega t) = L\left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[L(e^{j\omega t}) + L(e^{-j\omega t})\right] = \frac{1}{2}.\left[\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega}\right]$$ d'où

$$L(\cos\omega t) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

De même pour sinwt :

$$L(\sin\omega t) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

III-2 Règle de similitude (Changement d'échelle)

Soit *g(t) = f(at)* (*a>0*)

$$F(p) = L[g(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.g(t).dt = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.f(a.t).dt$$

On pose alors le changement de variables : $\begin{array}{l} u = a.t \\ du = a.dt \end{array}$

$$L[g(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}u}.f(u).\frac{du}{a} = \frac{1}{a}.\int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}u}.f(u).du = \frac{1}{a}.F(\frac{p}{a})$$

$$L[f(a.t)] = \frac{1}{a}.F(\frac{p}{a})$$

III-3 Règle de translation en p:

$$L[e^{-a.t}.f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.e^{-a.t}.f(t).dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a).t}.f(t).dt = F(p+a)$$

$$L[e^{-a.t}.f(t)] = F(p+a)$$

Exemple: $L(e^{-a.t}.\cos\omega t) = \dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

III-4 Règle de translation en t

$$L[g(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.g(t).dt = \int_0^{t_0} e^{-p.t}.0.dt + \int_{t_0}^{+\infty} e^{-p.t}.f(t-t_0).dt$$

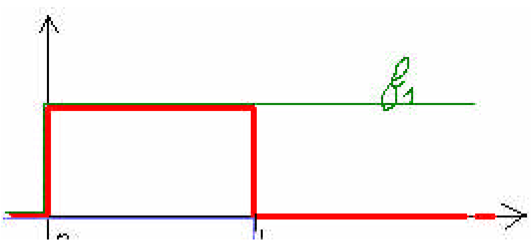
On pose $u = t - t_0$ et $du = dt$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-p.(u+t_0)}.f(u).du = e^{-p.t_0}.\int_0^{+\infty} e^{-p.u}.f(u).du = e^{-p.t_0}.F(p)$$

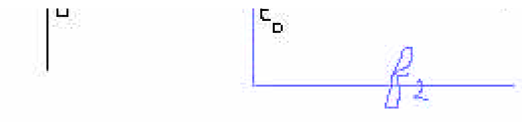
$$L[f(t-t_0)] = e^{-p.t_0}.F(p)$$

$e^{-p.t_0}$ est appelé facteur retard

Exemple: Image d'un créneau entre 0 et t_0 .



$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = U(t) - U(t - t_0)$



$$F(p) = \frac{A}{p} - \frac{A}{p}.e^{-p.t_0}$$, d'où

$$F(p) = \frac{A}{p}(1 - e^{-p.t_0})$$

Application: Transformée d'une fonction périodique.

Soit f une fonction périodique pour t>0 de période T

En appliquant la linéarité et le théorème du retard

$$L[(f(t)] = L\left[\sum f_n(t)\right]$$

Il suffit de connaître la transformée de $F_0(p)$ de la fonction f_0 qui coïncide avec f sur [0 ; T].

III-5 Transformée de la dérivée.

Théorème fondamental :

Si f' est continue par morceaux sur tout fermé [0; x0] et si alors

En effet

En intégrant par parties, on obtient:

Comme

$f(0^+)$ représentant la limite à droite de f(t) quand t –> 0, d'où le théorème

Généralisation: Si f'' vérifie à son tour les hypothèses du théorème, on a:

"Dériver c'est multiplier par p"

Cette propriété, qui fait la richesse de la transformée de Laplace sera largement utilisée dans les équations différentielles

Remarque importante :

Théorème de la valeur initiale:

Théorème de la valeur finale:

III-6 Transformée de la primitive

Théorème:

Si

En effet

En appliquant le théorème de la dérivée

Par ailleurs