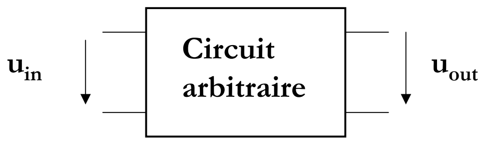
<u>**ANALYSES DES CIRCUITS ELECTRONIQUES**</u>

- **analyse temporelle**
- **analyse indicielle**
- **analyse fréquentielle**

→ On s'intéresse essentiellement à déterminer : $\mathbf{u_{out} = F(u_{in})}$



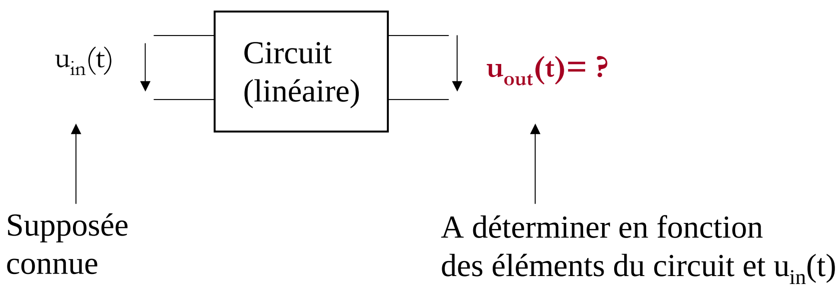
→ Définition de la **fonction de transfert H** d'un circuit arbitraire :

$$\boxed{H = \frac{u_{out}}{u_{in}}}$$

<u>**ANALYSE TEMPORELLE**</u>

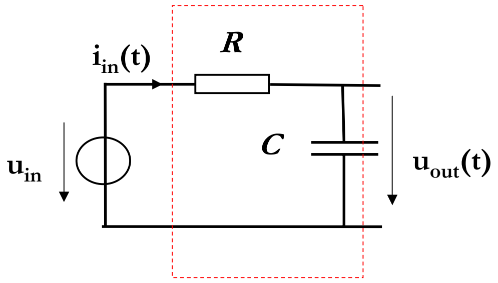
Comment ?

• décrire le comportement du circuit par des équations u(t), i(t)
(***Kirchhoff + éventuellement eqs. différentielles des composants***)
 + **résoudre les équations** pour évaluer la réponse du circuit, $\mathbf{u_{out}(t)}$



<u>Exemple 1 - analyse temporelle</u> :

Déterminer la dépendance temporelle de la tension $\mathbf{u_{out}}$ aux bornes de la capacité C si on applique à l'entrée une excitation nulle et on suppose qu'on connaît la charge initiale Q_0 sur la capacité C.



$$i(t) = i_C(t) = \frac{dQ}{dt} = C\frac{du_{out}}{dt}$$

$$i(t) = \frac{u_{in}(t) - u_{out(t)}}{R}$$

$$\Rightarrow \quad RC\frac{du_{out}(t)}{dt} + u_{out}(t) = u_{in}(t)$$

si $u_{in}(t)$ est **l'excitation nulle**
(**$u_{in}(t)=0$ pour t>0**) :

$$\boxed{RC\frac{du_{out}(t)}{dt} + u_{out}(t) = 0}$$

Solution de l'équation différentielle :

$$\boxed{u_{out}(t) = K\,e^{-\frac{t}{RC}}}$$

$$u_{out}(t=0) = u_C(t=0) = \frac{Q_0}{C} = K \Rightarrow u_{out}(t) = \frac{Q_0}{C}e^{-\frac{t}{RC}}$$

• <u>Remarques sur la **résolution des équations différentielles de 1er ordre** associées à **l'analyse temporelle** (circuits linéaires)</u>

Résolution des équations différentielles en 2 étapes :

(a) résolution de l'équation HOMOGENE
(sans second membre : d'où **l'intérêt pour la réponse à l'excitation nulle**)
→ on obtient une **réponse transitoire ('RT')**

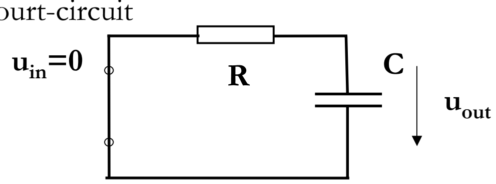
(b) recherche d'une **solution particulière** qui correspond à la **réponse permanente ('RP')**
→ *la réponse permanente est toujours de la même forme que l'excitation pour un circuit linéaire*

Réponse globale = RG = RT + RP

Equation homogène :

Court-circuit

$$RC\frac{du_{out}}{dt}+u_{out}=u_{in}=0$$



⇩

Décrit le **<u>déchargement de C sur R</u>**

→ équation différentielle : **A dy/dx + B y = 0**

- On cherche la solution sous forme : **y (x) = K exp (-B x /A)**
- On détermine K tenant compte des **conditions limites** (t=**0** ou ∞)

$$u_{out}=K\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

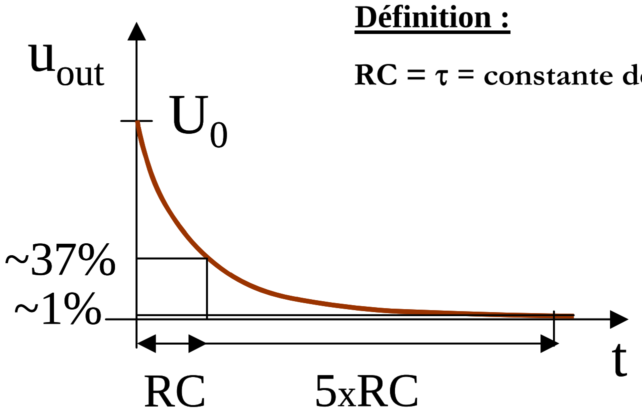
Si Q_0 est la *charge initiale* sur *C* :

$K = u_{out}(t=0) = U_0 = Q_{ini}/C$

$$u_{out}=\underbrace{\frac{Q_{ini}}{C}}_{U_0}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

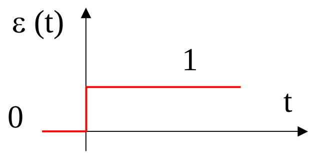
<u>Définition :</u>

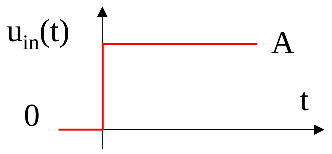
RC = τ = constante de temps (s)



ANALYSE (REPONSE) INDICIELLE

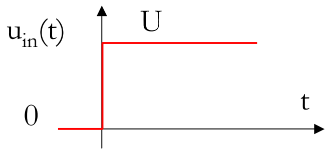
• Est **la réponse à un ECHELON de signal** (tension, courant) appliqué à l'entrée du circuit : $\mathbf{u_{in}(t) = A\, \varepsilon\, (t)}$

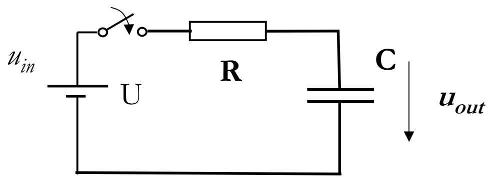




$$u_{in}(t) = A\varepsilon(t)$$

Exemple 2 : Analyse (réponse) indicielle





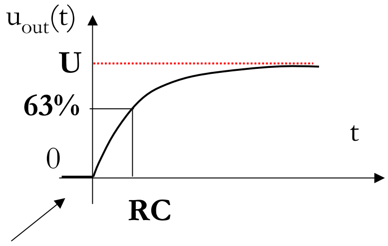
(1) Equation homogène : **réponse transitoire**

$$RC\frac{du_{out}}{dt} + u_{out} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_{out\_t}(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

(2) Solution particulière : **réponse permanente**

$$u_{out\_p}(t) = V$$

Réponse globale : $\boxed{u_{out}(t) = V + K\, e^{-\frac{t}{RC}}}$



Conditions 'limite' : $u_{out}(t=0) = 0 \rightarrow \quad K = -V$

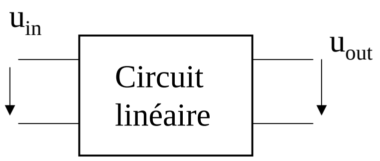
$u_{out}(t=\infty) = U \rightarrow V = U$

SOLUTION : $$u_{out}(t) = U(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

REPONSE HARMONIQUE ET ANALYSE FREQUENTIELLE

• réponse permanente à un signal (‘ INPUT ’) sinusoïdal
= **REPONSE HARMONIQUE**

$\mathbf{u_{in} = U_{in} \sin(\omega t + \phi_{in})}$
ou
$\mathbf{i_{in} = I_{in} \sin(\omega t + \phi_{in})}$



Circuit linéaire → $\mathbf{u_{out} = U_{out} \sin(\omega t + \phi_{out})}$

Trouver U_{out} et ϕ_{out} !

ANALYSE FREQUENTIELLE (REPONSE EN FREQUENCE)

→ effectuer l ’analyse harmonique du circuit pour toutes les pulsations :
$\omega = 2 \pi f$

Eléments d’intérêt :

(I) **$H = U_{out}/U_{in}$** (fonction de transfert) en fonction de ω

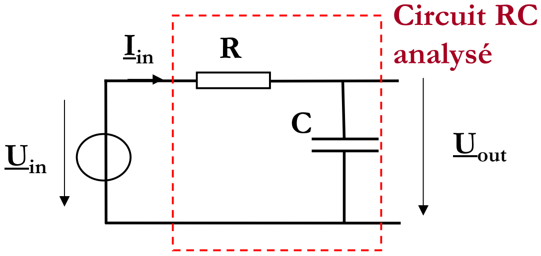
(II) **déphasage ϕ** entre sortie (out) et entrée (in) en fonction de ω

<u>Fonction de transfert (complexe)</u> : $\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{out}}{\underline{U}_{in}}}$

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_{out} &= U_{out} e^{j\phi_{out}} \\ \underline{U}_{in} &= U_{in} e^{j\phi_{in}} \end{aligned}\right\}$$

→ utiliser le calcul complexe pour **$\underline{H}(j\omega)$**

Exemple 3 - Analyse fréquentielle



Algorithme:
(i) Associer impédances complexes aux éléments du circuits
(ii) Utiliser la loi généralisée d'Ohm (ou autre) en complexe
(iii) Déterminer l'expression analytique de $\underline{H}(j\omega)$
(iv) Déterminer le module et la phase de $\underline{H}(j\omega)$

$$\underline{I} = (\underline{U}_{in} - \underline{U}_{out}) / R$$
$$\underline{I} = j\omega C \underline{U}_{out}$$

$\Rightarrow$ **Fonction de transfert :**

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{out}}{\underline{U}_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}}$$

Et on détermine l'amplitude (module) et la phase de $\underline{H}$

$$\frac{U_{out}}{U_{in}} = |H(j\omega)| = \frac{1}{|1 + j\omega RC|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad \leftarrow \textbf{Amplitude (module)}$$

$$\phi = \phi_{out} - \phi_{in} = \mathrm{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = -\mathrm{Arctg}(\omega RC) \quad \leftarrow \textbf{Phase}$$

Le module et la phase de $\underline{H}$ sont fonctions de ω (ou de la fréquence)

Diagrammes de BODE

Définition : Les Diagrammes de Bode sont
→ *2 représentations graphiques :*
(i) de l'amplitude (ou gain) et
(ii) de la phase
*de la fonction de transfert complexe, **H**, d 'un circuit, en général.*

Représentations: notations et unités

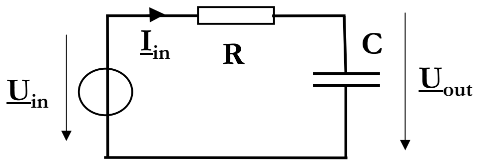
→ **Amplitude**, $|\underline{H}|$ - ω : (en dB) — représentation en échelle ***log*** [dB] - ***log***

$$|H(j\omega)|[dB] = 20 \log |H(j\omega)|$$

→ **Phase**, ϕ - ω : (en rad) — échelle ***lin*** – ***log***

But : analyse fréquentielle de la fonction de transfert

Diagrammes de Bode d'un circuit RC



Fonction de transfert :

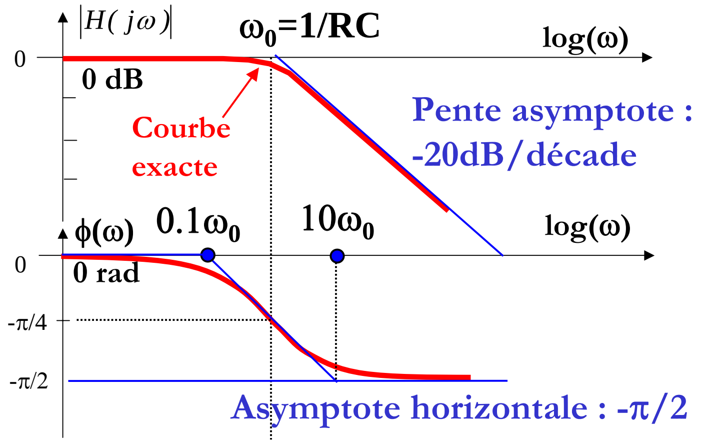
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{out}}{\underline{U}_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Module :

$$\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Phase :

$$\phi = \arg \underline{H} = -\mathrm{arctg}\,(\omega RC)$$



Remarque :

Toute fonction de transfert peut s'écrire sous la forme générale (canonique) :

$$\underline{H}(j\omega) = K \frac{\left(j\dfrac{\omega}{\omega_{z0}}\right)^{n0}\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{z1}}\right)^{n1}\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{z2}}\right)^{n2}\cdots\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{zk}}\right)^{nk}}{\left(j\dfrac{\omega}{\omega_{p0}}\right)^{m0}\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{p1}}\right)^{m1}\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{p2}}\right)^{m2}\cdots\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{pl}}\right)^{ml}} \qquad (*)$$

où la pulsation :
ω_{zi} (i=1,…,k) est appelée : **ZERO** de la fonction de transfert
ω_{pl} (i=1,…,k) est appelée : **PÔLE** de la fonction de transfert
et K est une constante

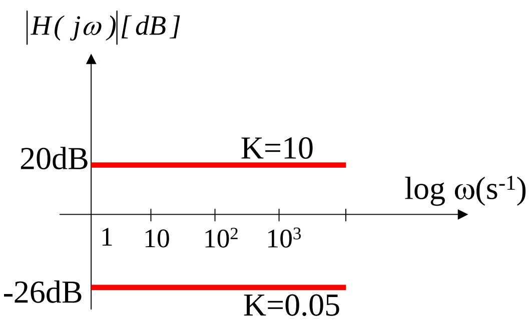
→ Cette présentation de la fonction de transfert est **TRES UTILE** pour tracer les diagrammes de Bode (on essaiera de définir les règles des représentations de Bode à partir de cette équation)

Diagrammes de Bode MODULE des fonctions élémentaires (1)

(I) **$\underline{H}(j\omega)$ = K** = constante

Example : **K=10**

$|H(jw)|$ (dB) = 20 log 10 = 20dB = ct.

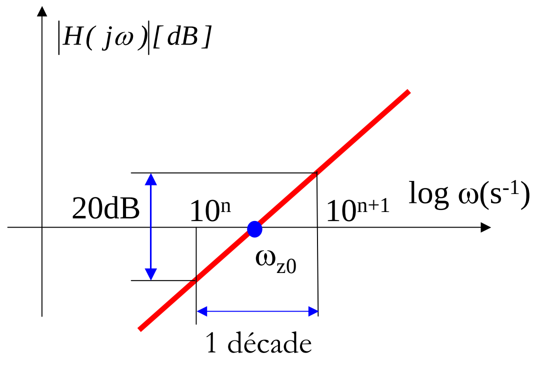


Diagrammes de Bode MODULE des fonctions élémentaires (2)

(II) **$\underline{H}(j\omega)$ = j (ω/ω_{z0})**

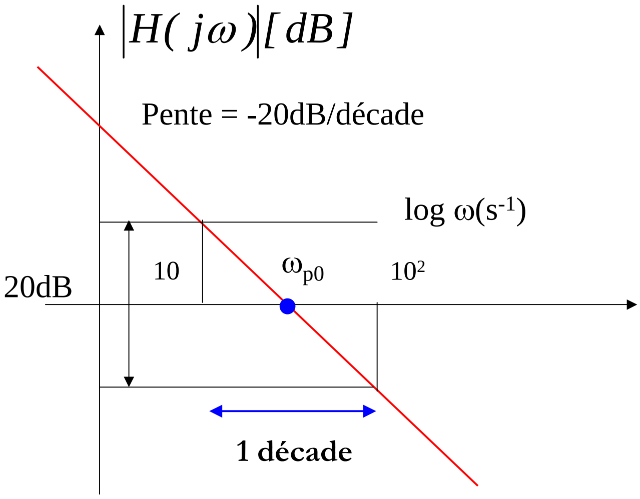
$$|H(j\omega)|[dB] = 20\log\omega - 20\log\omega_{z0}$$

- Est une droite de pente +20dB/décade
- $|\underline{H}(j\omega_{z0})|[dB] = 0$



Diagrammes de Bode MODULE des fonctions élémentaires (3)

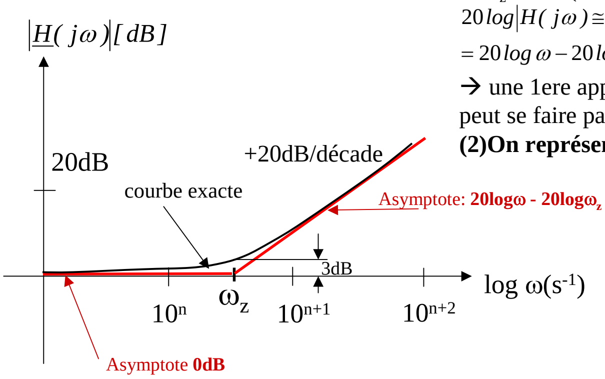
(III) $\underline{H}(j\omega) = 1 / (j\omega/\omega_{p0})$



Diagrammes de Bode MODULE des fonctions élémentaires (4)

(IV) Fonction avec un ZERO : $\underline{H}(j\omega) = 1 + j\omega/\omega_z$

Calcul : $\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_z}\right)^2}$



Comment tracer ?

(1) On trace d'abord les 2 asymptotes du module :

- $\omega/\omega_z \rightarrow 0$ $(\omega << \omega_z)$
  $|\underline{H}(j\omega)| = 1 \rightarrow 20 \log (|\underline{H}(j\omega)|) = 0dB$
- $\omega/\omega_z \rightarrow \infty$ $(\omega >> \omega_z)$
  $20\log\left|H(j\omega) \cong j(\omega/\omega_z)\right| \cong 20\log(\omega/\omega_z) =$
  $= 20\log\omega - 20\log\omega_z$

$\rightarrow$ une 1ere approximation du diagramme Bode peut se faire par les asymptotes

(2)On représente l'allure de la courbe exacte

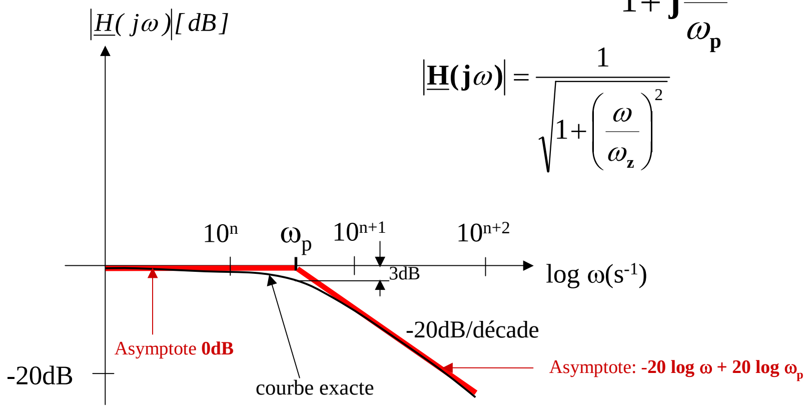
Remarque :
pour $\omega=\omega_z$, la distance entre la courbe exacte et l'axe horizontale est de 3dB:

$$20\log\left|H(j\omega_z)\right| = 20\log\sqrt{2} = 3dB$$

Diagrammes de Bode MODULE des fonctions élémentaires (5)

(V) Fonction avec un **PÔLE** : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_p}}$

$$\left|\underline{\mathbf{H}}(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_z}\right)^2}}$$

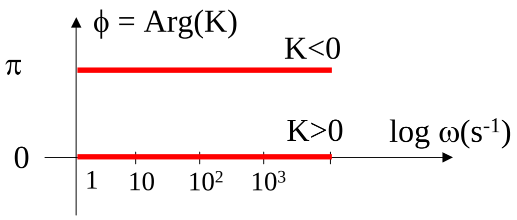


Diagrammes de Bode ARGUMENT (PHASE) des fonctions élémentaires (1)

(I) $\underline{H}(j\omega)$ = **K** = constante

Arg (K) = 0 pour K>0

Arg (K) = π (rad) ou 180° pour K<0



(II) $\underline{H}(j\omega) = j\,(\omega/\omega_{z0})$

Arg ($\underline{H}$(jω)) = π/2 ou 90°

(III) $\underline{H}(j\omega) = 1 / (j\omega/\omega_{p0})$

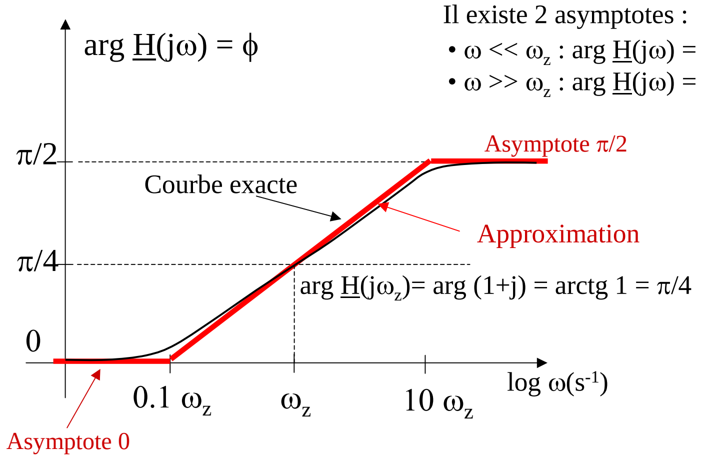
Arg ($\underline{H}$(jω)) = -π/2 ou -90°

Diagrammes de Bode ARGUMENT (PHASE) des fonctions élémentaires (2)

(IV) Fonction avec un ZERO : $\underline{H}(j\omega) = 1 + j\omega/\omega_z$

Il existe 2 asymptotes :

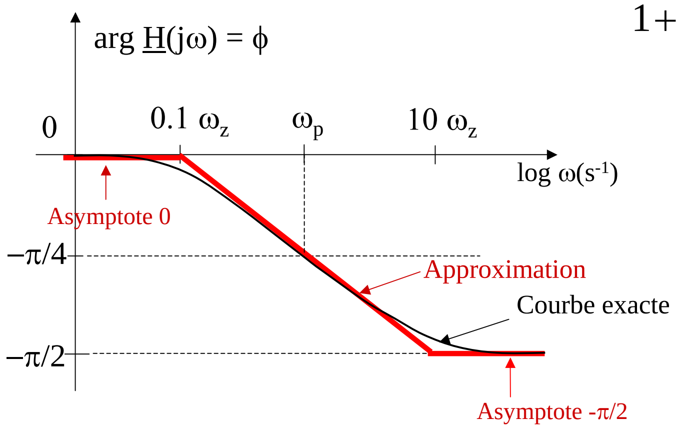
- $\omega \ll \omega_z$: $\arg \underline{H}(j\omega) = \arg 1 = 0$
- $\omega \gg \omega_z$: $\arg \underline{H}(j\omega) = \arg (j\omega/\omega_z) = \pi/2$



→ Remarque importante : l'influence du **zéro** sur la caractéristique de phase se 'manifeste' une décade *avant* et une décade *après* ω_z

Diagrammes de Bode ARGUMENT des fonctions élémentaires (3)

(V) Fonction avec un PÔLE : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1+\mathbf{j}\dfrac{\omega}{\omega_p}}$



→ Remarque importante : l'influence du **pôle** sur la caractéristique de phase se 'manifeste' une décade *avant* et une décade *après* ω_p

Propriétés des fonctions de transfert complexes :

(**P1**) : Si : $\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega)\underline{H}_2(j\omega)$

Alors : $\left|\underline{H}(j\omega)\right|[dB] = \left|\underline{H}_1\right|[dB] + \left|\underline{H}_2\right|[dB]$

Remarque : La représentation (*) + (P1) montrent que le module de toute fonction de transfert, exprimé en dB, est *la somme des modules élémentaires des facteurs de l'expression* *(*)*

(**P2**) : Si : $\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega)\underline{H}_2(j\omega)$

Alors : $Arg(\underline{H}(j\omega)) = Arg(\underline{H}_1(j\omega)) + Arg(\underline{H}_2(j\omega))$

Remarque : La représentation (*) + (P2) montrent que l 'argument (phase) de toute fonction de transfert est *la somme des arguments des facteurs de l 'expression* *(*)*

Expression (*) = forme canonique de la fonction de transfert

Exemple :
Calcul exact (simulation) avec Mathcad comparé aux **asymptotes**

$k := 1..50000$

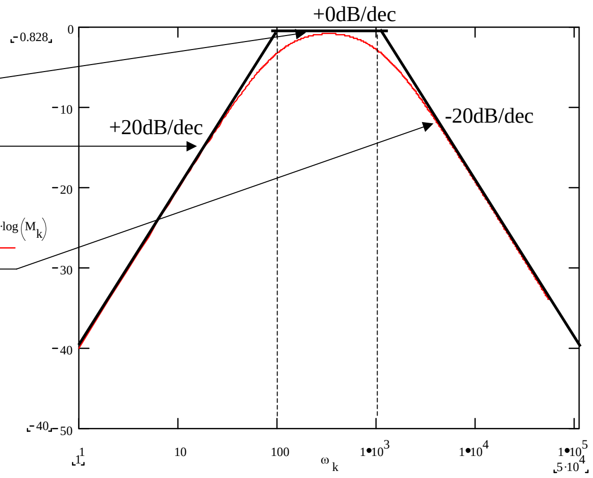
$\omega_k := k \qquad z := 0 + i$

zéro

$$\underline{\mathbf{H}} := \frac{\frac{\omega_k \cdot z}{100}}{\left(1+\frac{\omega_k \cdot z}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{\omega_k \cdot z}{1000}\right)}$$

pôle pôle

$M_k := \sqrt{\left(\mathrm{Re}(Z_k)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(Z_k)\right)^2}$



Conclusions

• Les analyses temporelle, indicielle et fréquentielle concernent la mise en oeuvre des moyens analytiques pour retrouver les réponses d'un circuit arbitraire à un certain type de signal

• L'analyse fréquentielle traite le cas des signaux sinusoïdaux et nécessite un calcul en complexe pour déterminer:

- **la fonction de transfert complexe**
- **son module**
- **sa phase**

• Les diagrammes de Bodes sont des représentations du module (en dB) et de la phase (en rad) d'une fonction de transfert complexe en fonction de la fréquence (en échelle log)

• les diagrammes de Bode nécessitent **une représentation canonique de la fonction de transfert** suivie par l'application, dans l'ordre des fréquences clés (**zéros, pôles**) des **règles de représentations asymptotiques (module et phase)**