

Analyse fréquentielle

Le théorème de Fourier permet de décomposer toute fonction périodique en une somme de fonctions sinusoïdales. La connaissance du comportement d'un circuit linéaire en régime permanent sinusoïdal nous permet donc de déterminer sa réponse à tout signal périodique.

II.1 Fonction de transfert harmonique

Nous voulons donc étudier la réponse d'un circuit linéaire lorsqu'il reçoit en entrée un signal sinusoïdal. Nous savons que les signaux d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ sont reliés par une équation différentielle à coefficients constants :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

Ainsi si le signal en entrée est une sinusoïde de pulsation ω , il en est de même pour le signal de sortie. Sans restreindre la portée de notre étude nous pouvons choisir l'origine des temps de telle façon que la phase à l'origine du signal d'entrée soit nulle. Nous notons φ l'avance de phase du signal de sortie. Nous pouvons représenter les deux signaux en notation complexe :

$$\begin{cases} \bar{e}(t) = E e^{j\omega t} \\ \bar{s}(t) = S e^{j(\omega t + \varphi)} = S e^{j\omega t} e^{j\varphi} \end{cases}$$

Nous définissons fonction de transfert harmonique comme étant le rapport entre les signaux de sortie et d'entrée :

$$H(j\omega) = \frac{\bar{s}(t)}{\bar{e}(t)} = \frac{S}{E} e^{j\varphi}$$

Notons G le module de la fonction de transfert et φ son argument. Ceux-ci représentent respectivement le rapport des amplitudes des signaux et l'avance de phase du signal de sortie par rapport au signal d'entrée. En régime sinusoïdal permanent, un système est totalement décrit par sa fonction de transfert harmonique. D'autre part on définit la fonction de transfert statique comme :

$$H_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} H(j\omega)$$

Reportons les expressions de $e(t)$ et $s(t)$ dans l'équation différentielle il vient :

$$[a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0] \bar{s}(t) = [b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0] \bar{e}(t)$$

Nous obtenons donc pour la fonction de transfert harmonique :

$$H(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (j\omega)^k}$$

La fonction de transfert apparaît comme une fraction de polynômes en $j\omega$. L'analyse fréquentielle d'un circuit consiste principalement dans la détermination de sa fonction de transfert harmonique, puis en l'étude de son module $G(\omega)$ et son argument $\varphi(\omega)$, en fonction de la pulsation ou de la fréquence.

II.2 Exemples simples de fonctions de transfert harmonique

Avant d'étudier le principe de l'analyse fréquentielle, nous commençons par calculer les fonctions de transfert harmonique de quelques circuits simples. Ici, par souci d'homogénéité avec la présentation de ce chapitre, nous cherchons l'équation différentielle associée à chacun des circuits. Dans la pratique nous utiliserons le formalisme des impédances complexes qui évite cette mise en équation et permet un calcul direct de la fonction de transfert.

II.2.a Système du premier ordre fondamental

Considérons le circuit suivant correspondant à un filtre RC passe-bas, dont la tension de sortie est prélevée aux bornes du condensateur. Nous l'étudions en sortie ouverte.

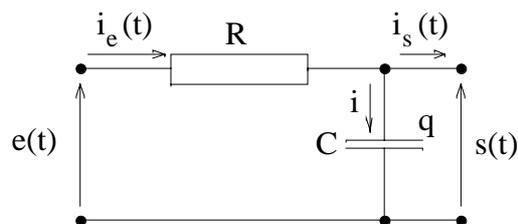


Figure 1

Nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$\begin{cases} e - s = R i_e \\ i_e = i_s + i \\ i = \frac{dq}{dt} = C \frac{ds}{dt} \end{cases}$$

En sortie ouverte le courant de sortie est nul, $i_s = 0$, donc :

$$i_s = 0 \Rightarrow i_e = i \Rightarrow e - s = RC \frac{ds}{dt}$$

L'équation différentielle peut se mettre sous la forme :

$$s + RC \frac{ds}{dt} = e$$

Ce circuit constitue un exemple de système du premier ordre fondamental :

- premier ordre car seules les quantités s et ds/dt interviennent dans l'équation différentielle;
- fondamental car il n'y a pas de dérivée du signal d'entrée.

Nous en déduisons la fonction de transfert harmonique du filtre :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Que nous pouvons encore écrire :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Nous avons pour le module et l'argument de la fonction de transfert :

$$\begin{cases} G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \\ \varphi(\omega) = \text{arc tan}(RC \omega) \end{cases}$$

De manière générale, la fonction de transfert harmonique d'un filtre fondamental du premier ordre s'écrit :

$$a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_0 e \Rightarrow H(j\omega) = \frac{b_0}{a_0 + j a_1 \omega}$$

Soit encore :

$$H(j\omega) = \frac{A}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A = \frac{b_0}{a_0} \\ \omega_0 = \frac{a_0}{a_1} \end{cases}$$

Pour alléger les calculs on utilise souvent la variable réduite : $u = \frac{\omega}{\omega_0}$

II.2.b Système du second ordre fondamental

Considérons le circuit RLC représenté sur la figure 2, alimenté par une tension sinusoïdale et dont la tension de sortie est prélevée aux bornes du condensateur.

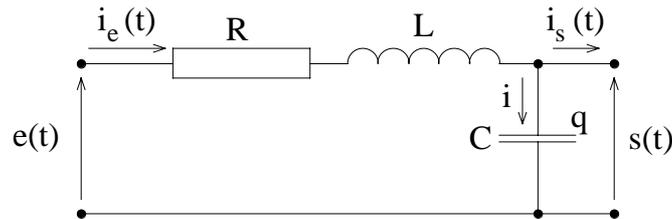


Figure 2

Ce circuit est caractérisé par les relations suivantes :

$$\begin{cases} e - s = R i_e + L \frac{d i_e}{dt} \\ i_e = i_s + i \\ i = \frac{dq}{dt} = C \frac{ds}{dt} \end{cases}$$

En sortie ouverte comme ici, le courant de sortie est nul et nous obtenons :

$$LC \frac{d^2 s}{dt^2} + RC \frac{ds}{dt} + s = e$$

Ce qui nous donne pour la fonction de transfert harmonique :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Nous avons un exemple de système du second ordre fondamental :

- second ordre car seules les dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2 de la sortie s , ds/dt et d^2s/dt^2 interviennent dans l'équation différentielle;
- fondamental car il n'y a pas de dérivée du signal d'entrée.

De manière générale, pour un tel circuit nous avons :

$$a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_0 e \Rightarrow H(j\omega) = \frac{b_0}{a_0 + ja_1 \omega - a_2 \omega^2}$$

Une fonction de transfert harmonique du second ordre s'écrit souvent sous la forme suivante :

$$H(j\omega) = \frac{A}{1 + 2j\alpha \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A = \frac{b_0}{a_0} \\ \omega_0^2 = \frac{a_0}{a_2} \\ 2 \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{a_1}{a_0} \end{cases}$$

II.2.c Système du premier ordre

Considérons le circuit CR suivant, soumis à une excitation sinusoïdale en entrée et pour lequel la tension de sortie est prise aux bornes de la résistance. Nous supposons la sortie ouverte.

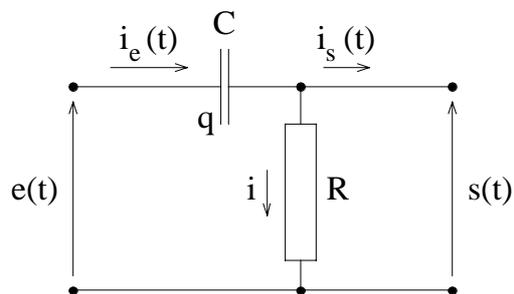


Figure 3

Nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$\begin{cases} i_e = i_s + i \\ s = R i \\ i_e = \frac{dq}{dt} = C \frac{d(e-s)}{dt} \end{cases}$$

En sortie ouverte, $i_s = 0$, nous obtenons l'équation suivante :

$$s + RC \frac{ds}{dt} = RC \frac{de}{dt}$$

Ce circuit constitue un exemple de système du premier ordre (non fondamental). Il a pour fonction de transfert harmonique :

$$H(j\omega) = \frac{jRC \omega}{1 + jRC \omega}$$

II.2.d Système du second ordre

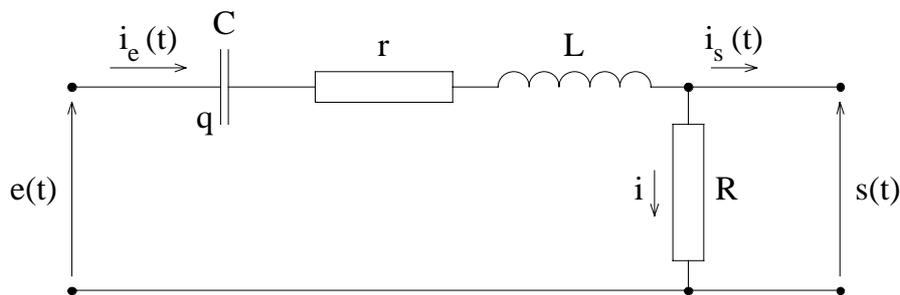


Figure 4

Considérons le circuit RLCR de la figure précédente et écrivons les relations le caractérisant :

$$\begin{cases} e - s = \frac{q}{C} + r i_e + L \frac{di_e}{dt} \\ i_e = i_s + i \\ s = R i \\ i_e = \frac{dq}{dt} \end{cases}$$

Lorsque la sortie est ouverte nous pouvons écrire :

$$i_s = 0 \Rightarrow i_e = i = \frac{s}{R}$$

D'autre part, en dérivant la première équation :

$$\frac{de}{dt} - \frac{ds}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} + r \frac{di_e}{dt} + L \frac{d^2 i_e}{dt^2} = \frac{1}{C} \frac{s}{R} + \frac{r}{R} \frac{ds}{dt} + \frac{L}{R} \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Ce qui nous donne :

$$LC \frac{d^2s}{dt^2} + (R + r)C \frac{ds}{dt} + s = RC \frac{de}{dt}$$

Il s'agit d'un système du second ordre non fondamental. La fonction de transfert harmonique s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + j(R + r)C\omega - LC\omega^2}$$

II.3 Représentations des fonctions de transfert harmonique

II.3.a Diagramme de Bode

Il existe plusieurs méthodes pour étudier et représenter l'évolution d'une fonction de transfert harmonique par rapport à la fréquence. Nous allons présenter ici la méthode de Bode. La gamme des fréquences appliquées à un système électronique peut être très étendue. Aussi pour étudier la variation de sa fonction de transfert harmonique on utilise souvent une échelle logarithmique pour la pulsation ω ou la fréquence $f = \omega/2\pi$. D'autre part, on exprime généralement le module $G(\omega)$, qui peut également varier sur une grande gamme dynamique, en décibels (dB) :

$$G(\text{dB}) = 20 \log |H(j\omega)|$$

On appelle représentation dans le plan de Bode d'une fonction de transfert harmonique $H(j\omega)$ l'ensemble des deux diagrammes suivants :

- la courbe du module de gain : tracé du module $G(\text{dB})$ en décibels en fonction de la pulsation ou de la fréquence en échelle logarithmique;
- la courbe de phase : tracé de l'argument $\varphi(\omega)$ de la fonction de transfert, généralement exprimé en degrés, en fonction de la pulsation ou de la fréquence en échelle logarithmique.

On appelle octave tout intervalle de pulsation $[\omega, 2\omega]$ et décade tout intervalle $[\omega, 10\omega]$.

On appelle diagrammes asymptotiques de Bode les diagrammes de Bode réduits à leurs asymptotes.

II.3.b Décomposition des fonctions de transfert

Nous avons vu que la fonction de transfert harmonique d'un circuit est un quotient de deux polynômes en $p = j\omega$. Notons $\{z_k\}_{k=1, m}$ et $\{p_k\}_{k=1, n}$ les racines du numérateur et du dénominateur respectivement. Les racines du numérateur représentent les zéros de la fonction de transfert et les racines du dénominateur ses pôles. En utilisant leurs racines nous pouvons factoriser les deux polynômes, ce qui nous donne pour la fonction de transfert :

$$H(p) = A \frac{\prod_{k=1}^m (z_k - p)}{\prod_{k=1}^n (p_k - p)}$$

Les zéros et les pôles peuvent être réels, éventuellement nuls, ou complexes conjugués deux à deux. Une racine réelle r non nulle, de multiplicité k , induit un terme de la forme suivante :

$$(r - p)^k = A \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^k$$

Une racine nulle, de multiplicité k , induit un terme :

$$p^k = A \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^k$$

Pour deux racines complexes conjuguées, r et r^* , nous avons :

$$(r - p)(r^* - p) = |r|^2 - 2 \operatorname{Re}(r) p + p^2$$

En posant :

$$\omega_0 = |r| \quad \text{et} \quad \alpha = -\frac{\operatorname{Re}(r)}{|r|}$$

un tel terme peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(r - p)(r^* - p) = A \left(1 + 2 \alpha j \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)$$

Une fonction de transfert peut donc se décomposer en un produit de fonctions de transfert d'ordre 0, 1 ou 2.

Considérons une fonction de transfert harmonique s'écrivant comme le produit de deux fonctions : $H(j\omega) = H_1(j\omega) H_2(j\omega)$. Les courbes de gain et de phase de H s'obtiennent simplement par addition graphique des courbes de gain et de phase de H_1 et H_2 :

$$\begin{cases} G(\text{dB}) = 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log |H_1(j\omega)| + 20 \log |H_2(j\omega)| = G_1(\text{dB}) + G_2(\text{dB}) \\ \varphi = \text{Arg}[H(j\omega)] = \text{Arg}[H_1(j\omega)] + \text{Arg}[H_2(j\omega)] = \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases}$$

II.4 Etude des fonctions de transfert harmonique de base

Cette propriété nous permet donc de nous limiter à l'étude de quelques fonctions de transfert harmonique de base : les fonctions d'ordre 0, 1 et 2, sans oublier le terme constant.

II.4.a Terme constant réel

Pour un terme constant réel :

$$H(j\omega) = K$$

les courbes de gain et de phase sont des droites horizontales :

$$G(\text{dB}) = 20 \log |K| \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi = 0^\circ & \text{si } K > 0 \\ \varphi = 180^\circ & \text{si } K < 0 \end{cases}$$

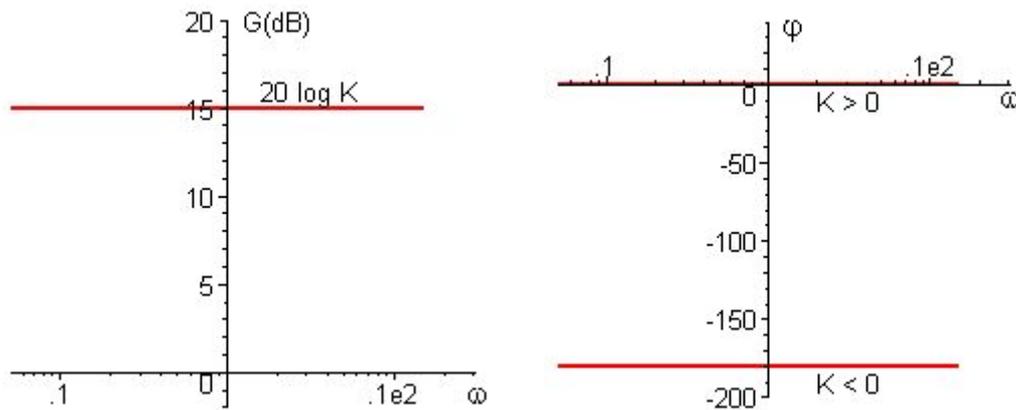


Figure 5

II.4.b Zéro ou pôle à l'origine

Nous considérons une fonction de transfert de la forme :

$$H(j\omega) = j \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{avec } \omega_0 > 0$$

Nous avons pour son module et son argument :

$$\begin{cases} G(\text{dB}) = 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \\ \varphi = 90^\circ \end{cases}$$

Dans la représentation de Bode, la courbe de gain est une droite. Par définition il s'agit d'une droite de pente 1, coupant l'axe horizontal en $\omega = \omega_0$. Une pente 1 correspond à une variation du gain de 6 dB pour octave ou 20 dB par décade. En effet :

$$\Delta G = G(\omega_2) - G(\omega_1) = 20 \log\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$$

pour une octave, $\omega_2 = 2 \omega_1$ donc $\Delta G = 20 \log 2 \approx 6$;

pour une décade, $\omega_2 = 10 \omega_1$ donc $\Delta G = 20$.

Une fonction de transfert de la forme :

$$H(j\omega) = \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^k$$

a pour gain :

$$G(\text{dB}) = 20k \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Dans la représentation de Bode il s'agit d'une droite de pente k, coupant l'axe horizontal en $\omega = \omega_0$.

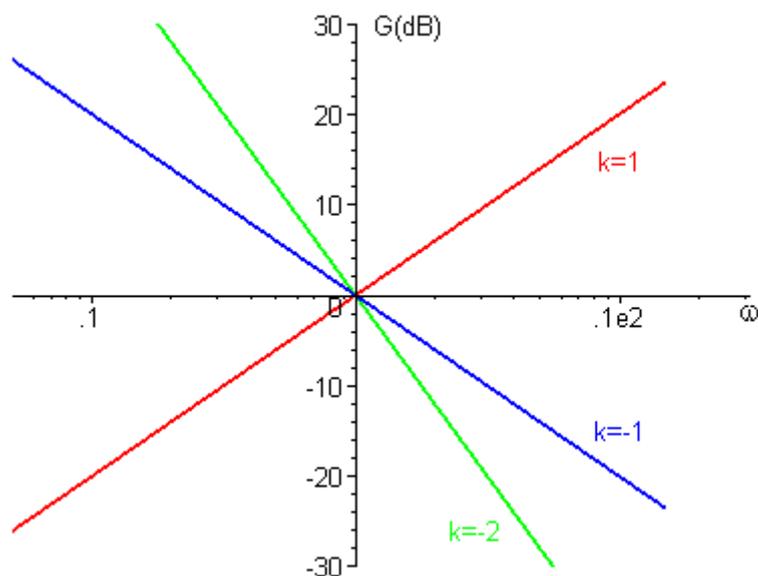


Figure 6

II.4.c Fonction de transfert du premier ordre

Considérons une fonction de transfert du premier ordre, correspondant à un zéro réel négatif. Elle peut se mettre sous la forme :

$$H(j\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{avec } \omega_0 > 0$$

Elle a pour module et argument :

$$\begin{cases} G(\omega) = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \\ G(\text{dB}) = 10 \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \\ \varphi = \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \end{cases}$$

Étudions les asymptotes du gain et de la phase. Comme nous travaillons avec une échelle logarithmique pour la pulsation, nous avons deux asymptotes lorsque ω tend vers 0 et vers l'infini :

$$\begin{cases} \omega \rightarrow 0 & G(\text{dB}) \rightarrow 0 & \varphi \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow \infty & G(\text{dB}) \rightarrow 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) & \varphi \rightarrow 90^\circ \end{cases}$$

Les deux asymptotes de la courbe de gain se coupent en $\omega_c = \omega_0$. C'est la fréquence de coupure. Le gain pour cette pulsation vaut :

$$G(\text{dB}) = 10 \log 2 = 3 \text{ dB}$$

et la phase est égale à 45° . Les figures suivantes présentent les courbes de gain et de phase sur environ deux décades centrées sur ω_0 , en utilisant la variable réduite $u = \omega/\omega_0$.

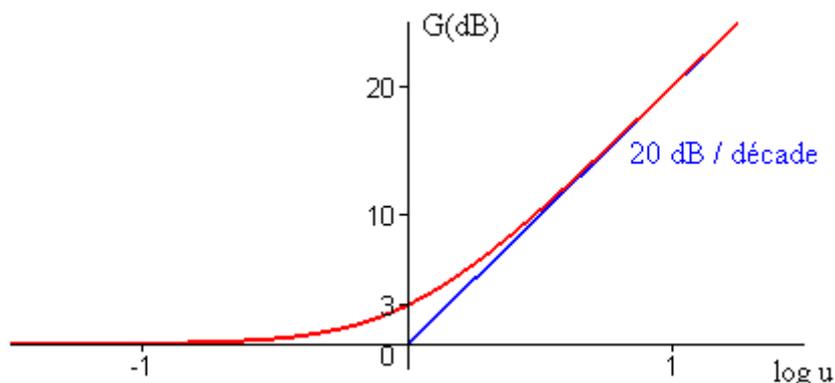


Figure 7

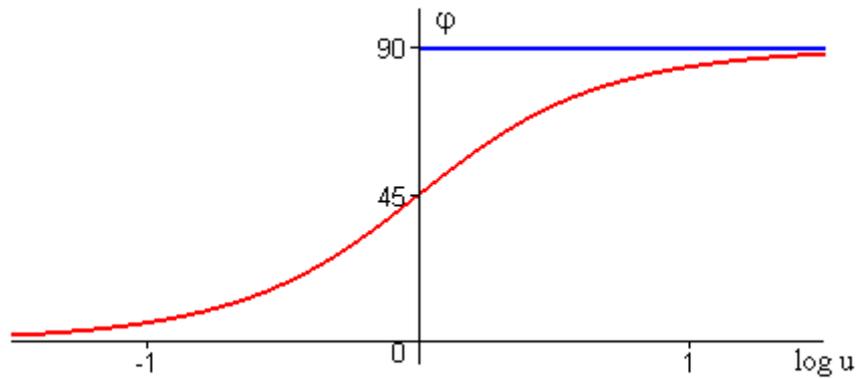


Figure 8

II.4.d Fonction de transfert de second ordre

Considérons une fonction de transfert du second ordre fondamentale, qui peut se s'écrire :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\alpha j \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \text{avec } \alpha \text{ et } \omega_0 \text{ réels positifs}$$

Les autres fonctions de transfert du second ordre se déduiront facilement de celle-ci. Le gain de celle-ci a pour expression :

$$\left\{ \begin{array}{l} G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\alpha^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \\ G(\text{dB}) = -10 \log \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\alpha^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right] \end{array} \right.$$

Pour alléger les notations, utilisons la variable réduite $u = \omega/\omega_0$:

$$G(\text{dB}) = -10 \log [(1 - u^2)^2 + 4\alpha^2 u^2]$$

Etudions la variation de la courbe de gain en fonction de la fréquence. Pour cela nous pouvons dériver le gain par rapport à u :

$$\frac{dG(\text{dB})}{du} = -\frac{10}{\text{Ln } 10} \frac{1}{f(u)} \frac{df(u)}{du} \quad \text{avec } f(u) = (1 - u^2)^2 + 4\alpha^2 u^2$$

Pour étudier le signe de cette dérivée il suffit de connaître celui de la dérivée de $f(u)$:

$$\frac{df(u)}{du} = -4u(1-u^2) + 8\alpha^2 u = 4u(u^2 + 2\alpha^2 - 1)$$

Cette dérivée peut s'annuler pour :

$$\begin{cases} u = 0 \\ u = \sqrt{1 - 2\alpha^2} \quad \text{si } \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

La forme de la courbe de gain dépend donc de la valeur du paramètre α . Pour $\alpha > 1/\sqrt{2}$, la courbe de gain est monotone décroissante. Pour $\alpha < 1/\sqrt{2}$, elle présente un maximum en :

$$\begin{cases} \omega_m = \omega_0 \sqrt{1 - 2\alpha^2} \\ G_m(\text{dB}) = -20 \log(2\alpha \sqrt{1 - \alpha^2}) \end{cases}$$

Pour poursuivre notre étude nous devons chercher les pôles de la fonction de transfert. Pour cela nous devons résoudre l'équation suivante où $p = j\omega$:

$$1 + 2\alpha \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2} = 0$$

Soit encore :

$$p^2 + 2\alpha\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$$

Le discriminant réduit de cette équation du deuxième degré est égal à :

$$\Delta' = \alpha^2 \omega_0^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 (\alpha^2 - 1)$$

Selon la valeur du paramètre α la fonction de transfert admet des pôles réels ou complexes conjugués.

1^{er} cas : $\alpha > 1$

L'équation admet deux racines réelles :

$$\begin{cases} p_1 = -\alpha\omega_0 - \omega_0 \sqrt{\alpha^2 - 1} \\ p_2 = -\alpha\omega_0 + \omega_0 \sqrt{\alpha^2 - 1} \end{cases}$$

Ces racines sont négatives, nous introduisons deux pulsations ω_1 et ω_2 définies comme leurs valeurs absolues :

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) \\ \omega_2 = \omega_0 \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) \end{cases}$$

qui vérifient :

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$$

Avec ces notations, nous pouvons écrire pour le dénominateur de la fonction de transfert :

$$1 + 2\alpha \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} (p - p_1)(p - p_2) = \frac{1}{\omega_1 \omega_2} (j\omega + \omega_1)(j\omega + \omega_2)$$

Ce qui nous donne :

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

Nous avons donc le produit de deux fonctions de transfert du premier ordre :

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) H_2(j\omega)$$

avec :

$$\begin{cases} H_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}} \\ H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}} \end{cases}$$

Nous avons vu que les courbes de gain et de phase peuvent être obtenues par addition des courbes de ces deux fonctions :

$$\begin{cases} G_1(\text{dB}) = -10 \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \right) \\ \varphi_1(\omega) = -\arctan \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} G_2(\text{dB}) = -10 \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_2^2} \right) \\ \varphi_2(\omega) = -\arctan \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right) \end{cases}$$

Commençons par tracer les diagrammes asymptotiques. Par exemple pour la fonction de transfert H_1 nous avons :

$$\begin{cases} \omega \rightarrow 0 & G_1(\text{dB}) \rightarrow 0 & \varphi_1 \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow \infty & G_1(\text{dB}) \rightarrow -20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) & \varphi_1 \rightarrow -90^\circ \end{cases}$$

et son équivalent pour la fonction H_2 . Nous pouvons tracer les deux diagrammes :

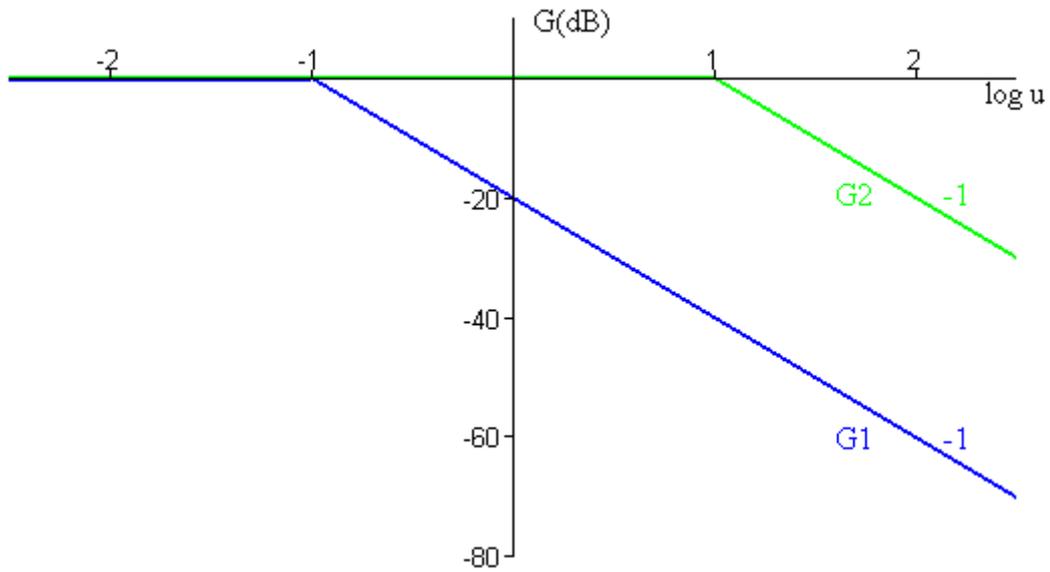


Figure 9

Nous obtenons ensuite le diagramme asymptotique de H en faisant la somme de ces deux diagrammes. Il apparaît ainsi trois intervalles délimités par ω_1 et ω_2 , qui constituent deux points de brisure.

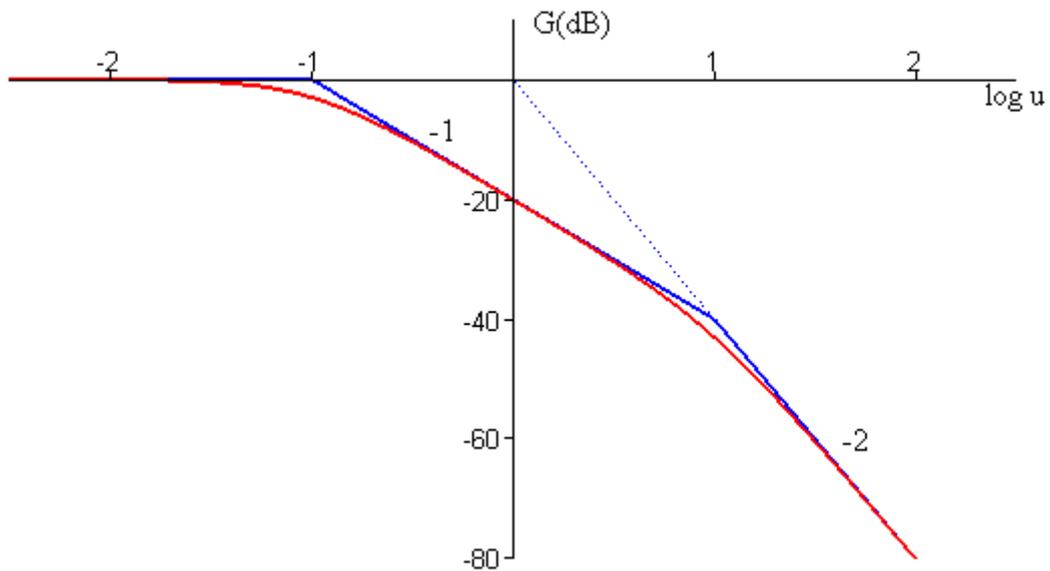


Figure 10

Intéressons nous à l'asymptote lorsque ω tend vers l'infini :

$$G(\text{dB}) \approx -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) - 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right) = -20 \log \left(\frac{\omega^2}{\omega_1 \omega_2} \right) = -20 \log \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) = -40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

Il s'agit d'une droite de pente -2, passant par ω_0 .

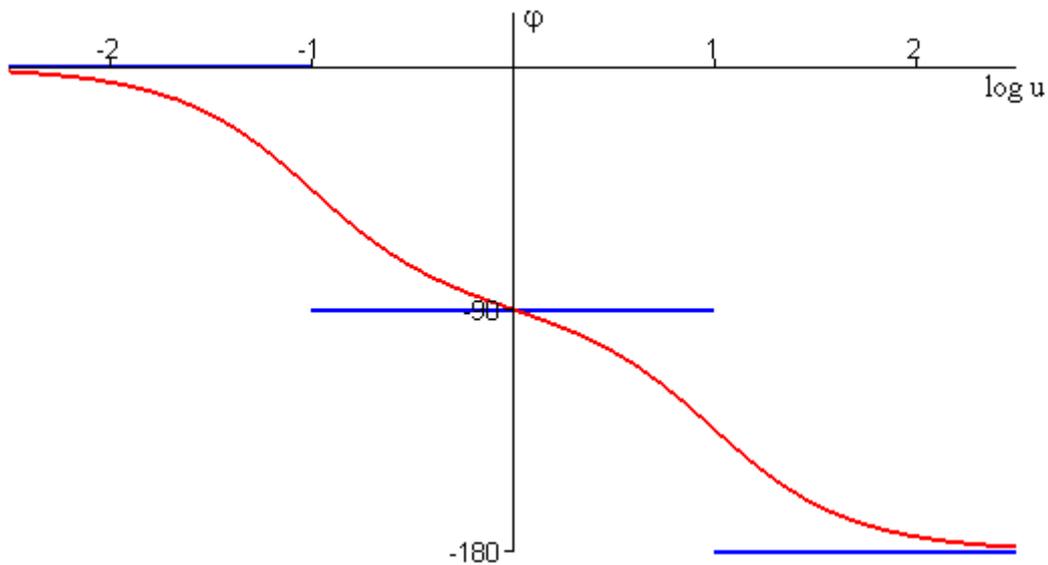


Figure 11

Pour tracer ces courbes nous avons pris $\omega_1 = \omega_0/10$ et $\omega_2 = 10 \omega_0$. Remarquons de plus qu'en échelle logarithmique ω_0 est le milieu de l'intervalle $[\omega_1, \omega_2]$.

2^{ème} cas : $\alpha = 1$

L'équation admet alors une racine double $-\omega_0$. La fonction de transfert s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

où ω_0 est pôle de multiplicité 2. Elle a pour gain et phase :

$$\begin{cases} G(\text{dB}) = -20 \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \\ \varphi(\omega) = -2 \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \end{cases}$$

Il est facile de tracer les courbes de gain et de phase dans la représentation de Bode.

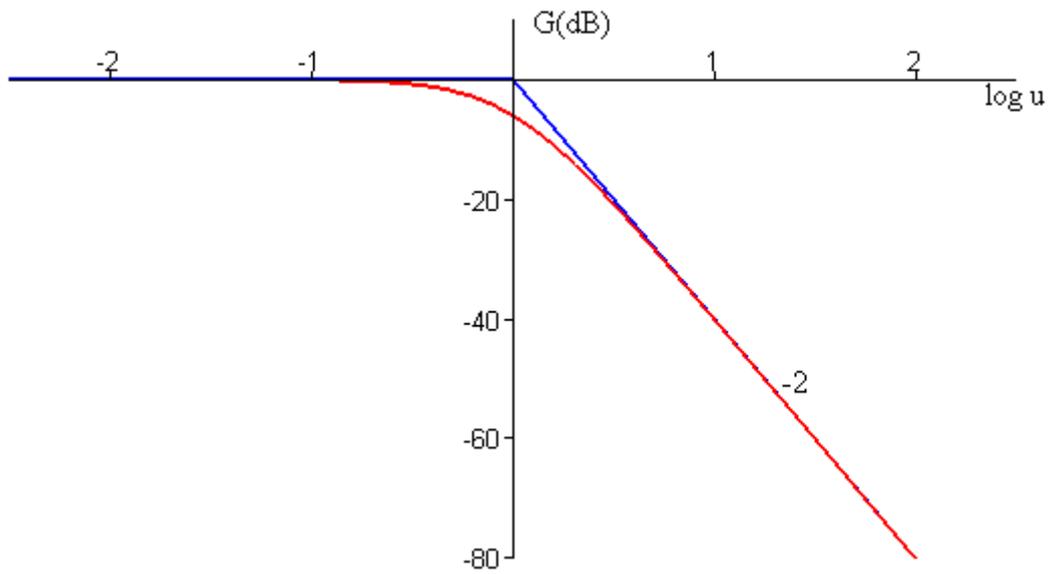


Figure 12

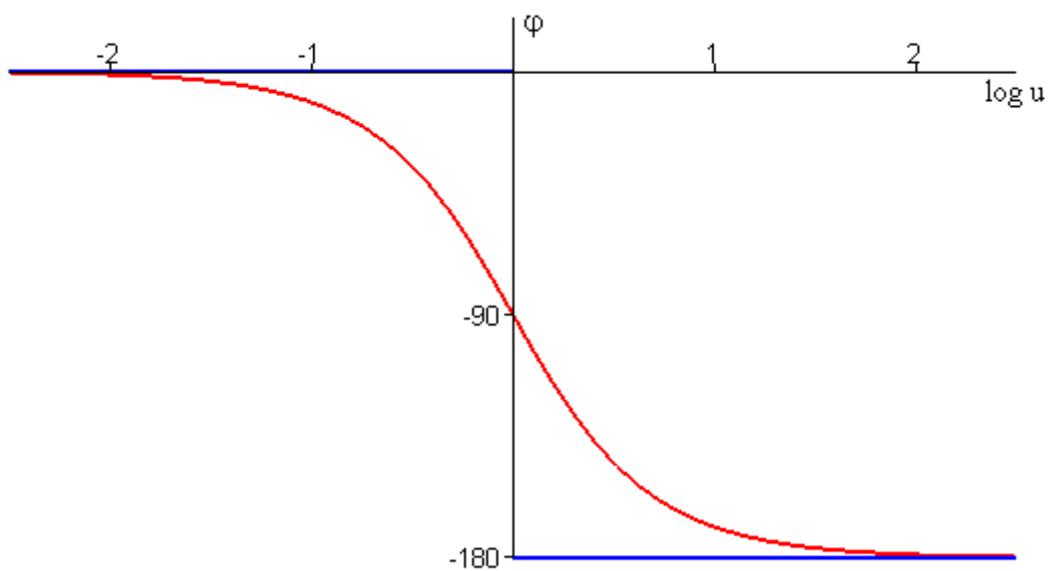


Figure 13

3^{ème} cas : $\alpha < 1$

L'équation admet alors deux racines complexes conjuguées :

$$p_{\pm} = -\omega_0 \left(\alpha \pm j \sqrt{1 - \alpha^2} \right)$$

Etudions le module et l'argument de la fonction de transfert :

$$\begin{cases} G(\text{dB}) = -10 \log [(1 - u^2)^2 + 4 \alpha^2 u^2] \\ \varphi(\omega) = - \arctan \left(\frac{2 \alpha u}{1 - u^2} \right) \end{cases}$$

Cherchons les asymptotes :

$$\begin{cases} \omega \rightarrow 0 & G(\text{dB}) \rightarrow 0 & \varphi \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow \infty & G(\text{dB}) \rightarrow -40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) & \varphi \rightarrow -180^\circ \end{cases}$$

Nous pouvons remarquer que quelque soit la valeur du paramètre α la courbe de gain présente deux asymptotes se coupant en ω_0 . Lorsque la fréquence tend vers l'infini l'asymptote est une droite de pente -2 passant par ω_0 .

Par contre nous avons vu au début de notre étude que ce paramètre α influence l'évolution de la courbe de gain.

$$\underline{1 > \alpha > 1/\sqrt{2}}$$

La courbe de gain est décroissante.

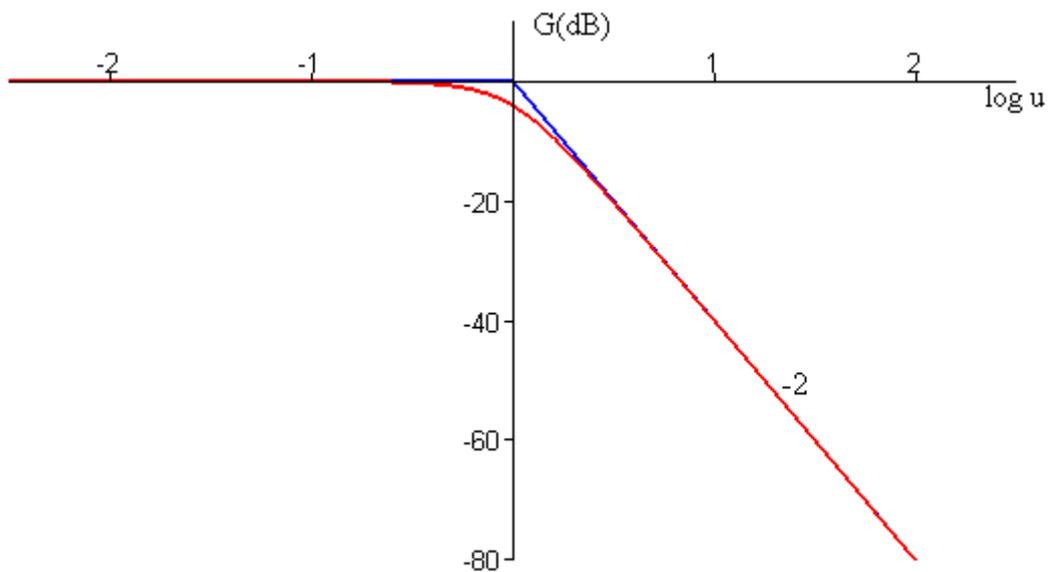


Figure 14

$$0 < \alpha < 1/\sqrt{2}$$

La courbe de gain présente un maximum.

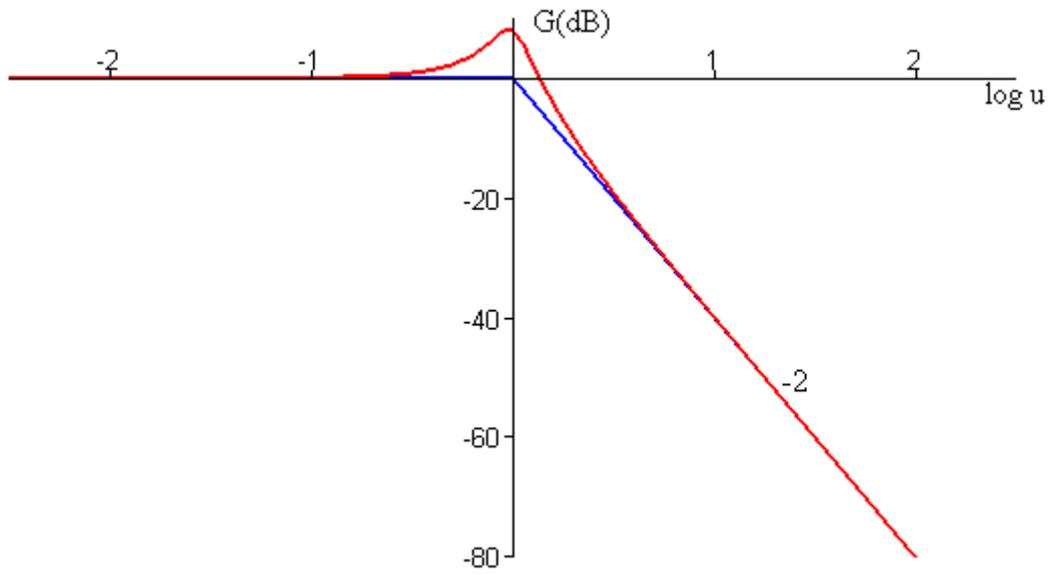


Figure 15

L'allure de la courbe de phase ne dépend pas de α :

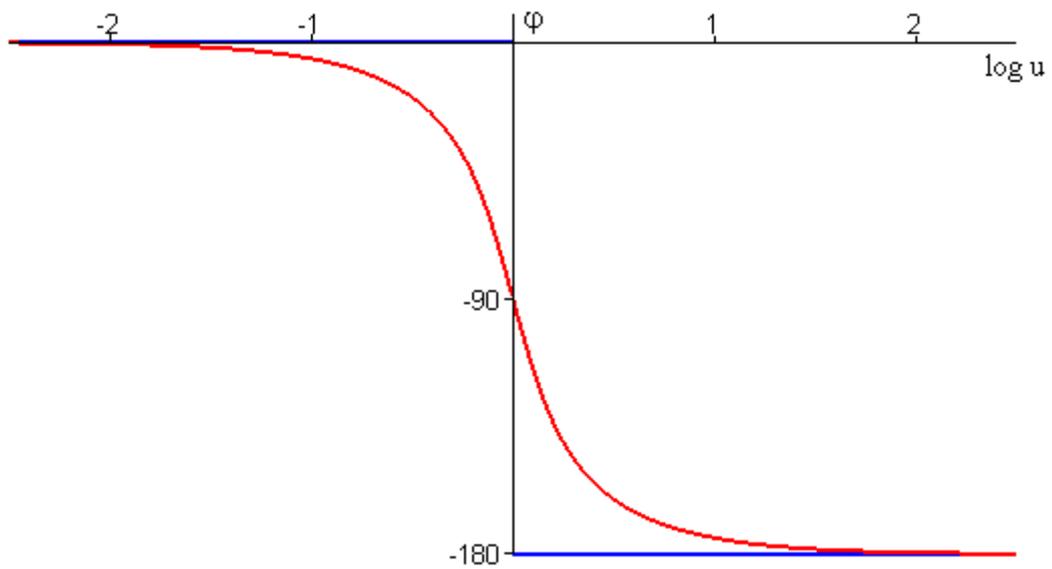


Figure 16

II.5 Bande passante à 3 dB

II.5.a Définition

En pratique la courbe de gain dans la représentation de Bode présente un maximum G_{\max} . Par rapport à ce maximum on définit une ou deux fréquences de coupure pour lesquelles le gain est égal au gain maximum divisé par $\sqrt{2}$.

En décibels cela correspond à l'intersection de la courbe de gain avec une droite horizontale située à -3 dB sous le maximum ($20 \log \sqrt{2} = 3.01$). On appelle bande passante le domaine pour lequel le gain est au-dessus de cette droite.

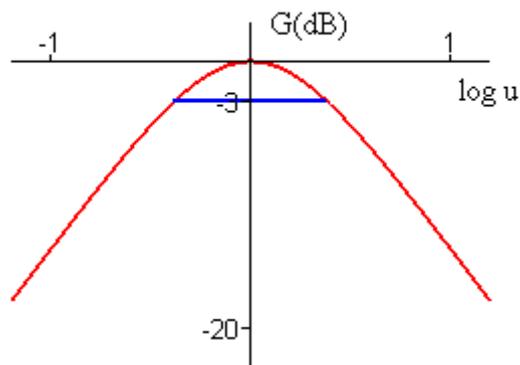


Figure 17

Etudions le comportement des filtres passifs rencontrés au début de ce chapitre.

II.5.b Filtre passe-bas

Reprenons le circuit RC présenté sur la figure 1. Nous avons calculé la fonction de transfert harmonique :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Elle a pour gain :

$$G(\text{dB}) = -10 \log(1 + u^2) \quad \text{avec} \quad u = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

avec pour asymptotes :

$$\begin{cases} u \rightarrow 1 & G(\text{dB}) \rightarrow 0 \\ u \rightarrow \infty & G(\text{dB}) \rightarrow -20 \log u \end{cases}$$

Nous pouvons tracer la courbe de gain.

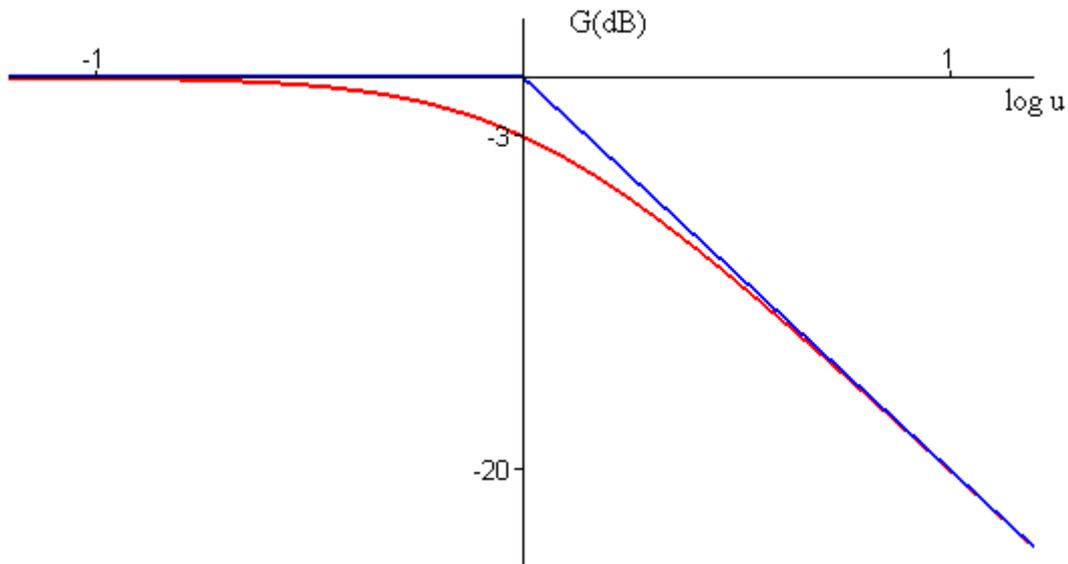


Figure 18

Il s'agit d'un filtre passe-bas. Le gain maximum est égal à 1, lorsque la pulsation tend vers 0. La pulsation de coupure est telle que :

$$G(\omega) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1+u^2 = 2 \Rightarrow u = 1$$

Nous ne conservons que la solution positive. La pulsation de coupure se confond donc avec la pulsation de brisure ω_0 .

II.5.c Filtre passe-haut

Reprenons le filtre CR de la figure 3. Nous avons calculé sa fonction de transfert harmonique :

$$H(j\omega) = \frac{jRC \omega}{1 + jRC \omega}$$

Son gain peut se mettre sous la forme d'une somme de deux fonctions de base :

$$G(\text{dB}) = 20 \log u - 10 \log (1 + u^2) \quad \text{avec} \quad u = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Nous pouvons donc tracer la courbe de gain correspondante.

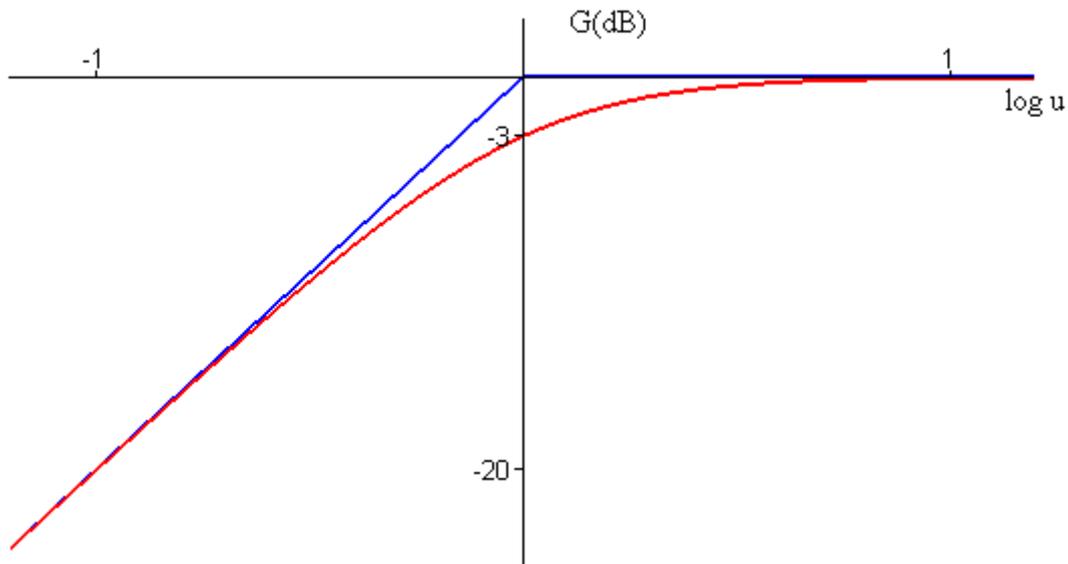


Figure 19

Il s'agit d'un filtre passe-haut, dont le gain maximum ($G_{\max} = 1$) lorsque ω tend vers l'infini. Cherchons la fréquence de coupure :

$$G(\omega) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1+u^2 = 2u \Rightarrow u = 1$$

La pulsation de coupure se confond donc avec la pulsation de brisure ω_0 .

III.5.d Filtre passe-bande

Reprenons le filtre RLC de la figure 4. Nous avons calculé sa fonction de transfert harmonique :

$$H(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + j(R+r)C\omega - LC\omega^2}$$

que nous pouvons encore écrire :

$$H(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_1}}{1 + 2j\alpha \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{RC} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \alpha = \frac{(R+r)}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases}$$

En utilisant la variable réduite nous obtenons :

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_1} \frac{j u}{1 + 2 \alpha j u - u^2} \quad \text{avec} \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

De même nous avons pour le gain :

$$G(\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_1} \frac{u}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4 \alpha^2 u^2}}$$

$$G(\text{dB}) = 20 \log \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \right) + 20 \log u - 10 \log \left[(1-u^2)^2 + 4 \alpha^2 u^2 \right]$$

La courbe de gain apparaît donc comme la somme de trois termes. Sur la figure suivante nous avons tracé les deux premiers termes en vert et le diagramme asymptotique du troisième en jaune. Cela nous a servis pour construire le diagramme asymptotique de $G(\text{dB})$, en bleu.

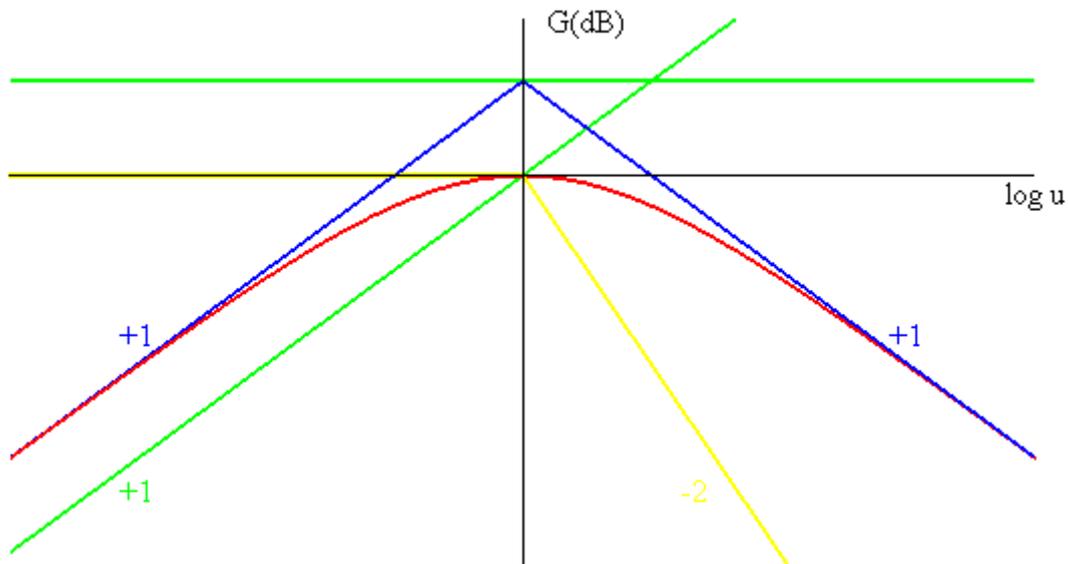


Figure 20

Il s'agit d'un filtre passe-bande. Le maximum du gain semble être atteint pour $u = 0$ ($\omega = \omega_0$). Ce que nous pouvons vérifier. La dérivée de $G(\text{dB})$ par rapport à u est proportionnelle à :

$$\frac{dG(\text{dB})}{du} \propto \frac{2}{u} - \frac{-4u(1-u^2) + 8\alpha^2 u}{(1-u^2)^2 + 4\alpha^2 u^2}$$

$$\frac{dG(\text{dB})}{du} \propto \frac{2(1-u^2)^2 + 8\alpha^2 u^2 + 4u^2(1-u^2) - 8\alpha^2 u^2}{u[(1-u^2)^2 + 4\alpha^2 u^2]}$$

$$\frac{dG(\text{dB})}{du} \propto \frac{2(1-u^2)(1+u^2)}{u[(1-u^2)^2 + 4\alpha^2 u^2]}$$

Nous trouvons donc un maximum en $u = 1$, quelque soit la valeur de α . Le gain est alors :

$$G_{\max} = \frac{\omega_0}{2\alpha\omega_1}$$

Cherchons la bande passante à 3 dB de ce filtre. Il nous faut chercher une pulsation telle que :

$$G(\omega) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\omega_0}{\omega_1} \frac{u}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\alpha^2 u^2}} = \frac{\omega_0}{2\sqrt{2}\alpha\omega_1}$$

En élevant au carré nous obtenons :

$$\frac{u^2}{(1-u^2)^2 + 4\alpha^2 u^2} = \frac{1}{8\alpha^2}$$

Soit :

$$8\alpha^2 u^2 = (1-u^2)^2 + 4\alpha^2 u^2 \Rightarrow (1-u^2)^2 = 4\alpha^2 u^2 \Rightarrow (1-u^2) = \pm 2\alpha u$$

Nous obtenons deux équations du deuxième degré :

$$u^2 \pm 2\alpha u - 1 = 0$$

qui ont le même discriminant réduit :

$$\Delta' = \alpha^2 + 1$$

Nous avons deux jeux de solutions :

$$r = \pm\alpha \pm \sqrt{1+\alpha^2}$$

dont nous ne conservons que les racines positives. Ce qui nous donne :

$$\begin{cases} \omega_{\text{bas}} = \omega_0 \left(-\alpha + \sqrt{1+\alpha^2} \right) \\ \omega_{\text{haut}} = \omega_0 \left(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2} \right) \end{cases}$$

Nous pouvons remarquer que :

$$\omega_{\text{bas}} \omega_{\text{haut}} = \omega_0^2$$

En échelle logarithmique la bande passante est centrée sur ω_0 . Elle a pour largeur :

$$B_\omega = \omega_{\text{haut}} - \omega_{\text{bas}} = 2 \alpha \omega_0$$

La sélectivité du filtre peut être caractérisé par un facteur de qualité Q défini comme :

$$Q = \frac{\omega_0}{B_\omega}$$

Pour ce filtre :

$$Q = \frac{1}{2 \alpha}$$

La figure suivante présente la courbe de gain dans le plan de Bode pour trois valeur du facteur de qualité du filtre.

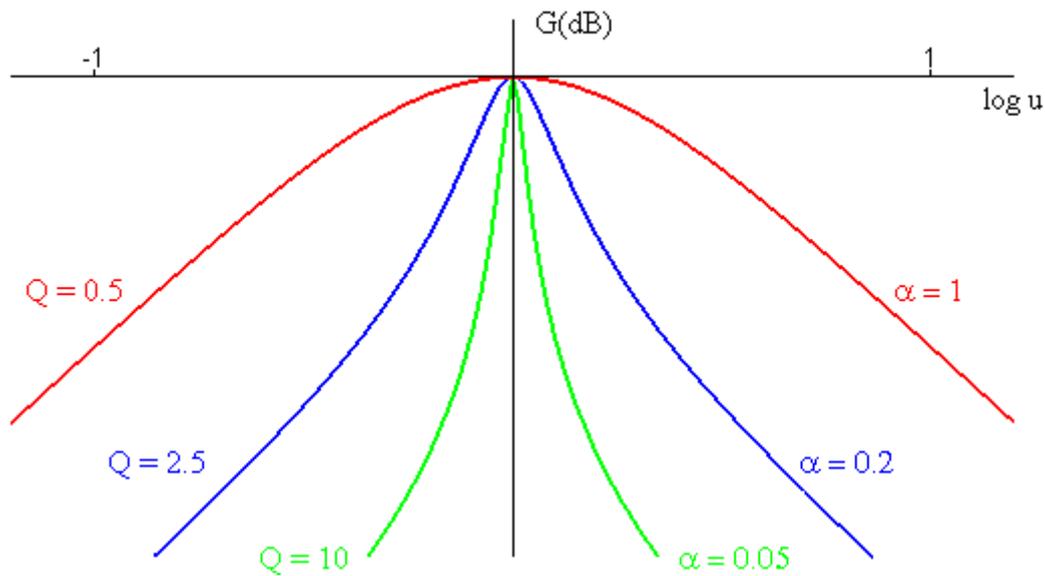


Figure 21

III.5.e Filtre coupe-bande

Considérons le circuit présenté figure 23. Nous l'étudions encore en sortie ouverte. Utilisons le formalisme des impédances sans chercher l'équation différentielle gouvernant ce circuit. Il s'agit en fait d'un cas particulier du schéma général présenté sur la figure 22. La tension en entrée e est appliquée aux impédances Z_1 et Z_2 en série. La tension de sortie est prélevée aux bornes de l'impédance Z_2 . Comme la sortie est ouverte les deux impédances sont traversées par la même intensité. Nous pouvons donc calculer le fonction de transfert harmonique du circuit :

$$H(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

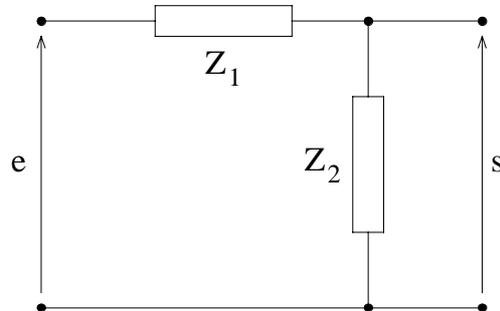


Figure 22

Pour le circuit qui nous intéresse nous avons :

$$\begin{cases} Z_1 = R \\ Z_2 = jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \end{cases}$$

Soit en reportant dans la fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{1 - LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

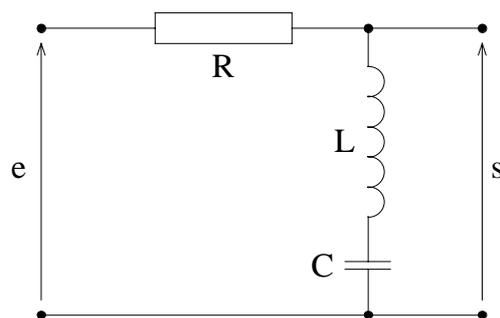


Figure 23

Pour faciliter l'étude de son comportement, nous pouvons introduire une pulsation caractéristique ω_0 et la variable réduite correspondante.

$$H(j\omega) = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 + 2\alpha j \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$H(j\omega) = \frac{1 - u^2}{1 + 2\alpha j u - u^2}$$

Le gain a pour expression :

$$G(\text{dB}) = 20 \log |1 - u^2| - 10 \log [(1 - u^2)^2 + 4 \alpha^2 u^2] = G_1(\text{dB}) + G_2(\text{dB})$$

La fonction $G_1(\text{dB})$ présente trois asymptotes :

$$\begin{cases} u \rightarrow 0 & G_1(\text{dB}) \rightarrow 0 \\ u \rightarrow \infty & G_1(\text{dB}) \rightarrow 40 \log u \\ u \rightarrow 1 & G_1(\text{dB}) \rightarrow -\infty \end{cases}$$

dont une asymptote verticale pour $u \rightarrow 1$. Nous avons déjà étudié $G_2(\text{dB})$. Sur la figure suivante nous avons tracé le diagramme asymptotique de la courbe de gain $G(\text{dB})$, puis la courbe elle-même. Il s'agit d'un filtre coupe-bande, qui rejette un domaine en pulsation autour de ω_0 .

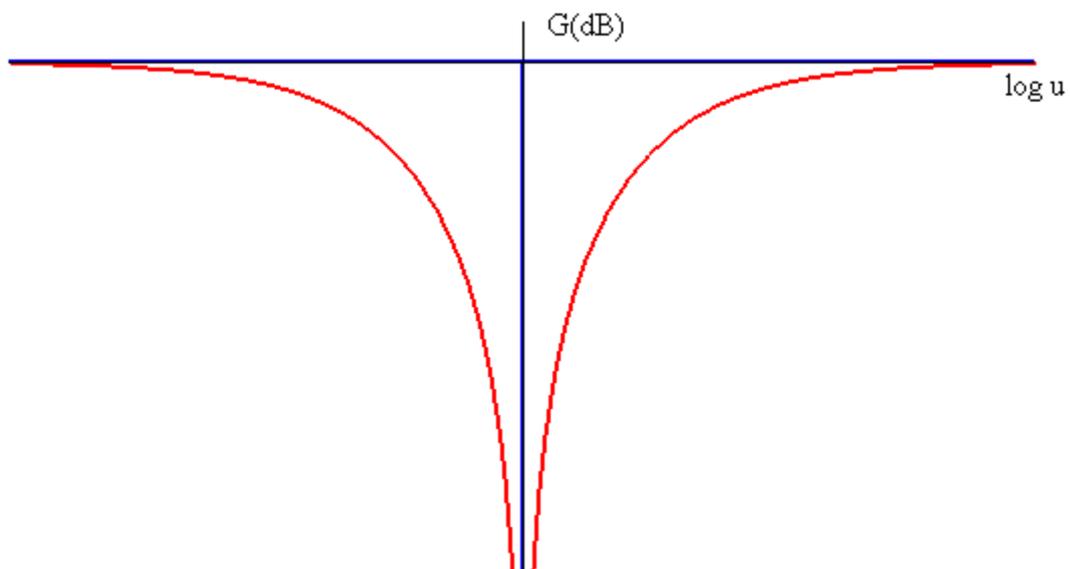


Figure 24

Pour vérifier l'évolution de $G(\text{dB})$ nous pouvons dériver par rapport à u :

$$\frac{dG(\text{dB})}{du} = \frac{20}{\ln 10} \frac{-2u}{1-u^2} - \frac{10}{\ln 10} \frac{-4u(1-u^2) + 8\alpha^2 u}{(1-u^2)^2 + 4\alpha^2 u^2}$$

Soit :

$$\frac{dG(\text{dB})}{du} = -\frac{10}{\ln 10} \frac{8\alpha^2 u(1+u^2)}{(1-u^2)[(1-u^2)^2 + 4\alpha^2 u^2]}$$

Calculons la bande passante de ce filtre. Le gain maximum est atteint lorsque ω tend vers zéro ou vers l'infini. Il est égal à 1. Nous cherchons ω tel que :

$$G(\omega) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{|1-u^2|}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\alpha^2 u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ce qui nous donne en élevant au carré :

$$2(1-u^2)^2 = (1-u^2)^2 + 4\alpha^2 u^2 \Rightarrow (1-u^2)^2 = 4\alpha^2 u^2$$

En prenant la racine nous obtenons deux équations :

$$u^2 \pm 2\alpha u - 1 = 0$$

ayant pour discriminant réduit :

$$\Delta' = \alpha^2 + 1$$

Nous avons deux jeux de solutions :

$$r = \pm\alpha \pm \sqrt{1+\alpha^2}$$

dont nous ne conservons que les racines positives. Ce qui nous donne :

$$\begin{cases} \omega_{\text{bas}} = \omega_0 \left(-\alpha + \sqrt{1+\alpha^2} \right) \\ \omega_{\text{haut}} = \omega_0 \left(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2} \right) \end{cases}$$

La bande passante comprend deux intervalles : $[0, \omega_{\text{bas}}]$ et $[\omega_{\text{haut}}, \infty[$.