JEAN-LOUIS FANCHON
Professeur agrégé de Mécanique
Ancien élève de l'ENS Cachan

GUIDE DE MÉCANIQUE

Sciences et technologies industrielles

Statique. Cinématique.
Dynamique.
Résistance des matériaux.
Élasticité.
Mécanique des fluides.

NATHAN

Sommaire

NOTIONS GÉNÉRALES

1. Vecteurs **5**
Scalaires. Définitions. Addition, soustraction, associativité et multiplication par un scalaire. Coordonnées cartésiennes. Vecteurs positions. Produit scalaire. Produit vectoriel. Formule du double produit vectoriel.

2. Forces et vecteurs-forces **15**
Forces et vecteurs-forces. Composantes. Coordonnées cartésiennes. Exercices.

3. Moment et couples **19**
Moment d'une force par rapport à un point. Théorème de Varignon. Vecteur-moment. Moment d'une force par rapport à un axe. Couple et vecteur-couple. Moment résultant de plusieurs forces. Exercices.

4. Notion de résultante **29**
Définitions et propriétés. Résultante de forces concourantes. Cas d'un système de forces planes quelconques. Cas de forces parallèles. Réduction d'un système de force à un ensemble (force + couple). Exercices.

STATIQUE

5. Statique plane **37**
Principe fondamental. Principe de transmissibilité des forces. Méthode de résolution. Isolement d'un solide. Cas des ensembles de solidés. Equations d'équilibre. Schématisation et représentation des actions mécaniques, Méthodes de résolution graphiques. Problèmes hyperstatiques. Exercices.

6. Treillis ou systèmes triangulés **67**
Définitions. Hypothèses. Relation entre nœuds et barres. Méthode des noeuds. Méthode de Crémona. Simplifications et cas particuliers. Méthode des sections. Exercices.

7. Frottement **77**
Adhérence et frottement. Coefficient de frottement. Cône de frottement. Lois du frottement. Applications : coins et cônes, palier lisse, paliers à butée, système vis-écrou, courroies et câbles. Résistance au roulement. Arc-boutement. Exercices.

8. Statique dans l'espace **93**
Rappels. Principe fondamental de la statique. Cas particuliers. Exercices.

9. Statique par les torseurs **105**
Systèmes statiquement équivalents. Définitions et notations. Ecriture d'un torseur en différents points. Opérations. Torseur nul, glisseur et torseur-couple. Propriétés générales. Principe fondamental de la statique. Torseurs exercés par les liaisons usuelles. Exercices.

CINÉMATIQUE

10. Cinématique : généralités et trajectoires **127**
Repère de référence. Mouvement absolu et relatif. Principaux mouvements plans de solide. Points coïncidents et trajectoires. Vecteur-position. Vecteur-déplacement. Vitesse et accélération. Repérage des mouvements. Exercices.

11. Mouvement de translation **141**
Translations des solides. Translations rectilignes : vitesse et accélérations, représentations graphiques divers. Mouvement rectiligne uniforme. Mouvement rectiligne uniformément accéléré. Mouvements rectilignes divers. Exercices.

12. Mouvements de rotation **151**
Angle de rotation. Vitesse angulaire. Accélération angulaire. Rotation uniforme. Rotation uniformément accélérée. Vitesse et accélération d'un point. Vecteur rotation. Vecteur accélération angulaire. Exercices.

© Editions Nathan, 9 Rue Méchain 75014 Paris 1996. ISBN 2.09.176570.8

13. Mouvement plan 159
Étude générale. Équiprojectivité des vitesses. Centre instantané de rotation (CIR). Propriétés des CIR. Base et roulante. Relation entre les vitesses des points d'un même solide. Relation entre les accélérations. Exercices.

14. Composition de mouvements 177
Généralités. Composition des vitesses en un point. Composition des vitesses angulaires. Glissement, roulement et pivotement. Composition des accélérations. Exercices.

15. Cinématique dans l'espace . 189
Dérivée d'un vecteur dans divers repères. Relation entre les vitesses des points d'un même solide. Équiprojectivité. Torseur cinématique. Torseurs des liaisons usuelles. Relation entre les accélérations. Composition des vitesses, vitesses angulaires, accélérations et accélérations angulaires. Paramétrages. Angles d'Euler. Théorie des mécanismes. Exercices.

DYNAMIQUE-CINÉTIQUE

16. Dynamique-mouvements plans 201
Principe fondamental : solide en translation rectiligne. Repères absolus et galiléens. Temps relatif et absolu. Principe de d'Alembert. Principe fondamental : solide en rotation (axe fixe). Centre de percussion. Mouvements pendulaires. Principe fondamental : solide en mouvement plan. Cas des ensembles de solides. Systèmes dynamiquement équivalents. Exercices.

17. Énergétique 217
Notions. Travail d'une force. Travail d'un couple. Énergie potentielle. Énergie cinétique : translation, rotation, mouvement plan. Puissances : moyenne, instantanée, d'une force, d'un couple, d'un torseur. Notion de rendement. Théorème de l'énergie cinétique. Loi de conservation de l'énergie. Principe du travail virtuel. Exercices.

18. Quantité de mouvement - chocs 233
Quantité de mowement. Théorème de la quantité de mouvement. Impulsion. Moment cinétique. Théorème du moment cinétique. Impulsion angulaire. Solide en rotation autour d'un axe fixe. Cas des ensembles de solides. Conservation de la quantité de mowement. Notion sur les chocs. Exercices.

19. Cinétique dans l'espace 247
Système à masse conservative. Quantité de mouvement. Moment cinétique. Torseur cinétique. Théorème de la quantité de mouvement et du moment cinétique. Matrice d'inertie. Énergie cinétique. Théorème de l'énergie cinétique. Principe fondamental de la dynamique. Principaux cas. Équilibrage des solides. Mouvements gyroscopiques. Exercices.

RESISTANCE DES MATÉRIAUX

20. Résistance des matériaux : généralités 265
Notion de poutre. Hypothèses fondamentales. Efforts intérieurs ou de cohésion. Sollicitations simples et composées. Notion de contrainte. Hypothèse de Barré de Saint-Venant. Notions sur les coefficients de sécurité. Exercices.

21. Traction 277
Définition. Effort normal. Contrainte normale. Étude des constructions. Allongements. Contraction latérale. Loi de Hooke. Essai de traction. Concentrations de contraintes. Contraintes d'origine thermique. Systèmes hyperstatiques. Contraintes dans une section inclinée. Exercices.

22. Cisaillement 295
Définition. Effort tranchant. Contrainte tangentielle. Calcul des constructions. Angle de glissement. Relation contrainte déformation. Application. Exercices.

23. Torsion 307
Définition. Angle unitaire de torsion. Moment de torsion. Contraintes tangentielles. Relation entre moment et angle unitaire de torsion. Relation entre contrainte et moment de torsion. Calcul des constructions. Concentrations des contraintes. Application. Cas des poutres non circulaires. Exercices.

24. Flexion : généralités, diagrammes 323
Schématisation usuelle. Effort tranchant. Moment fléchissant. Diagrammes. 'Correspondance entre diagrammes. Principaux cas d'application. Exercices.

25. Flexion : contraintes . . . **337**
Contraintes normales en flexion. Calcul des constructions. Concentrations de contraintes. Contraintes de cisaillement en flexion. Exercices.

26. Flexion : déformations **349**
Notion de déformée. Méthode par intégration. Principe de superposition. Formulaire. Exercices.

27. Flexion : systèmes hyperstatiques **361**
Exemples. Méthode par superposition. Méthode par intégration. Exercices.

28. Flexion déviée **369**
Poutres ayant au moins un plan de symétrie : contraintes, plan neutre,' exemples. Cas de poutres non symétriques. Exercices.

29. Sollicitations composées **377**
Flexion plus traction. Flexion plus torsion. Traction plus torsion. Traction plus cisaillement. Torsion plus cisaillement. Exercices.

30. Flambage **387**
Charge critique d'Euler. Principaux cas de flambage. Contraintes critiques. Flambage plastique des colonnes moyennes. Procédures de calcul. Charges excentrées : formule de la sécante.

ÉLASTICITÉ

31. Analyse des contraintes **397**
Analyse des contraintes planes. Équations de transformation. Contraintes principales. Contraintes de cisaillement maximales. Cercle de Mohr. Loi de Hooke. Contraintes triaxiales. Tricercle de Mohr. Application aux enveloppes minces. Critères de limite élastique : Tresca, Von Mises, Coulomb et Mohr. Exercices.

32. Analyse des déformations, . . **421**
Analyse des déformations planes. Equations de transformation. Déformations principales. Glissement maximum. Cercle de Mohr. Application aux jauges de contraintes. Loi de Hooke généralisée. Comparaison entre contraintes planes et déformations planes. Exercices.

MÉCANIQUE DES FLUIDES

33. Généralités - statique des fluides **433**
Généralités. Viscosités. Types de fluides. Pression en un point d'un fluide. Relation entre pression, profondeur et pesanteur. Poussée d'Archimède. Forces et pression sur une paroi immergée. Exercices.

34. Dynamique des fluides . **445**
Notions sur les écoulements. Équation de continuité. Écoulement laminaire et turbulent. Nombre de Reynolds. Pertes de charges régulières et singulières. Equation de Bernoulli. Théorème d'Euler ou de la quantité de mouvement. Exercices.

ANNEXES

1. Centre de gravité, centre de masse, barycentre **463**
Centre de gravité ou centre de masse : définition, position, propriétés. Barycentre. Cas des solides composés. Formulaire.

2. Moments quadratiques **467**
Moments quadratiques par rapport à un axe et par rapport à un point. Cas des surfaces composées. Formule de Huygens. Produits d'inertie. Formules de rotation d'axe. Axes principaux. Cas des profilés usuels. Formulaire.

3, Moment d'inertie et matrice d'inertie . . . **473**
Moment d'inertie par rapport à un axe. Rayon de gyration. Changement d'axe. Cas des solides composés. Produits d'inertie. Matrice d'inertie. Théorème de Huygens généralisé. Formulaire.

Index . . . **478**

1 VECTEURS

OBJECTIFS

- Définir les notions de scalaire et de vecteur.
- Décrire les principales opérations réalisées sur les vecteurs, les coordonnées cartésiennes d'un vecteur et la notion de vecteur-position.
- Définir le produit scalaire et le produit vectoriel de deux vecteurs.

En mécanique, les vecteurs sont utilisés pour représenter les forces $(\vec{F}, \overrightarrow{A_{0/1}})$, les moments $(\vec{M}, \overrightarrow{M_0(F)})$, les vitesses $(\vec{V}, \overrightarrow{V_{A1/0}})$, les accélérations $(\vec{a}, \overrightarrow{a_{A1/0}})$, les contraintes $(\vec{\sigma}, \vec{\tau})$, etc.

I - Scalaires

Les scalaires sont des nombres positifs, négatifs ou nuls, utilisés pour représenter des quantités diverses : temps, température, masse, énergie, volume, etc.
Par exemple, les nombres 20, 18, 50 sont les scalaires des grandeurs suivantes : hauteur de 20 m, volume de 18 m^3, force de 50 N.

II - Définitions

Un vecteur est une grandeur définie par une direction, un sens et une intensité.

a) La direction est la droite qui porte le vecteur. Elle est définie par l'angle θ mesuré entre un axe de référence et le support.

b) Le **sens** représente l'orientation origine-extrémité du vecteur et est symbolisé par une flèche.

c) L'intensité, norme ou module, représente la valeur de la grandeur mesurée par le vecteur. Graphiquement, elle correspond à la longueur de celui-ci. Notation : V, $|\vec{V}|$ ou $\|\vec{V}\|$.

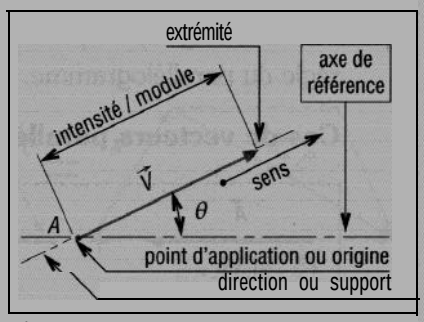


Fig. 1

d) Le point d'application est le point qui sert d'origine à un représentant (ou image) du vecteur.

Remarque : définir un vecteur, c'est connaître les quatre paramètres précédents.

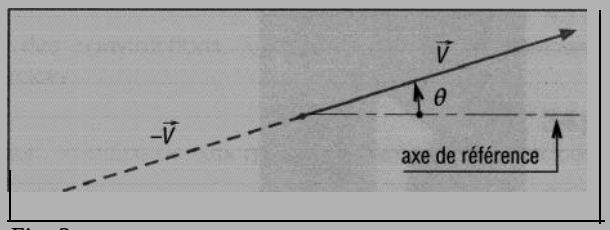


Fig. 2

Vecteur glissant ou glisseur : vecteur dont le point d'application peut être quelconque sur un support ou une ligne d'action imposée,
Vecteur lié ou pointeur : vecteur ayant un point d'application.

III - Opérations sur les vecteurs

1. Addition

Des vecteurs de même nature peuvent être additionnés pour former un troisième vecteur appelé vecteur-somme.

Exemple : déterminons la somme $\vec{R}$ des deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ proposés.

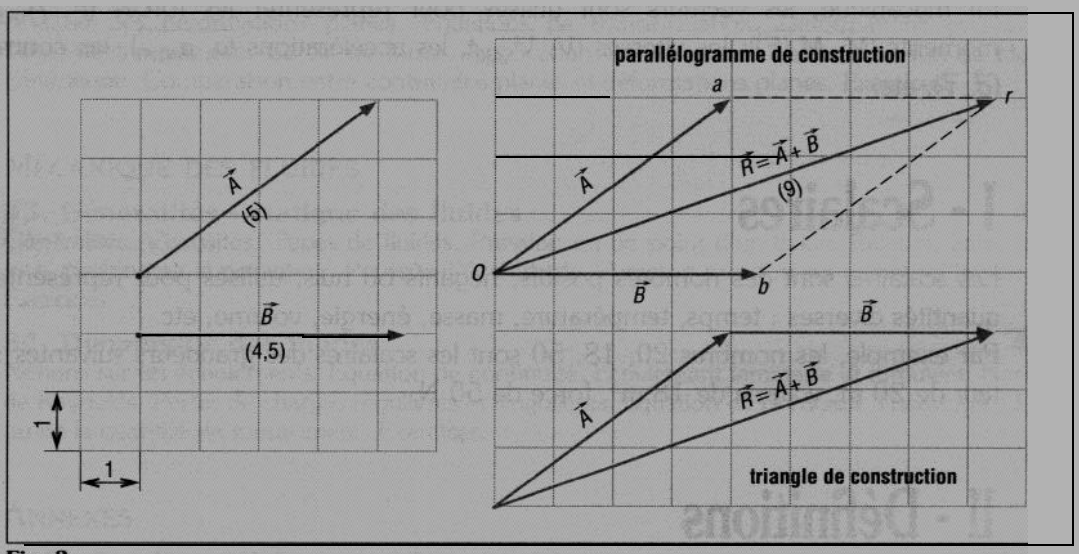


Fig. 3

Remarque : l'addition peut être réalisée à partir d'un triangle de construction (conditions : $\vec{A}$ et $\vec{B}$ du triangle doivent être parallèles et de mêmes longueurs que les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ d'origine) ou par un parallélogramme *Oabr* (*Oa // br et Ob // ar*), encore appelé règle du parallélogramme.

Cas de vecteurs parallèles

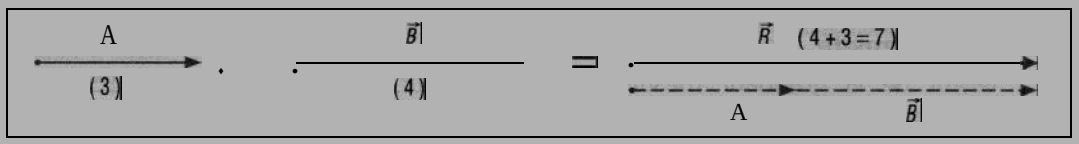


Fig. 4

2. Soustraction

La différence entre les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ se ramène à une addition en ajoutant le vecteur opposé $(-\vec{B})$.

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = \vec{R}$$

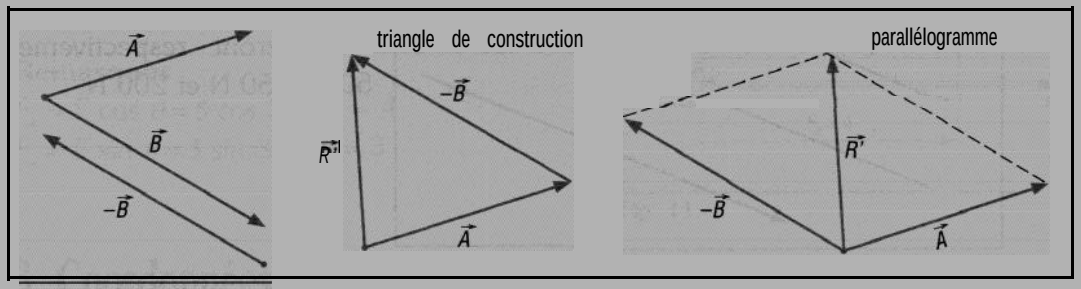


Fig. 5

3. Commutativité

L'opération d'addition entre vecteurs est commutative.
Autrement dit : $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} = \vec{R}$

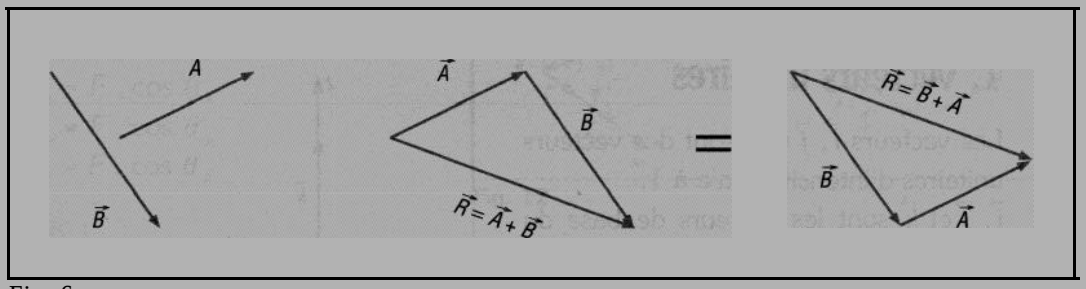


Fig. 6

Remarque : cette propriété est illustrée par la règle du parallélogramme.

4. Associativité

L'opération d'addition entre plusieurs vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, c'est associative.
Autrement dit : $\vec{A} + \vec{B}$ ou $\vec{B} + \vec{C}$ peuvent être remplacées par leur vecteur somme dans l'addition globale.

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{R}$$

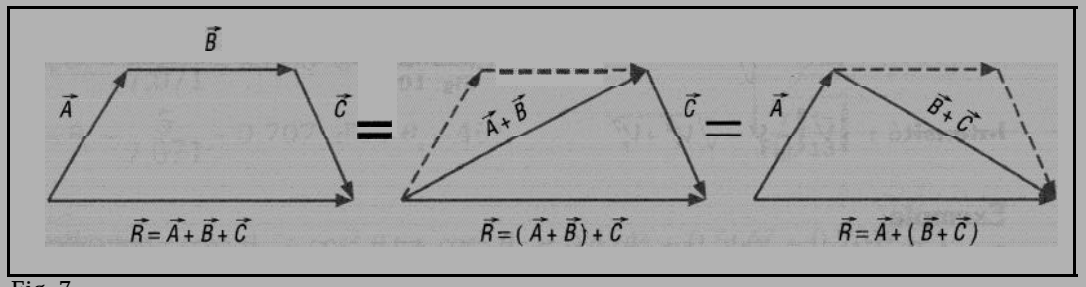


Fig. 7

5. Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Les sommes $(\vec{A} + \vec{A})$ et $(\vec{B} + \vec{B} + \vec{B})$ s'écrivent simplement sous la forme $2\vec{A}$ et $3\vec{B}$, produit des scalaires 2 et 3 par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.
De la même façon, on peut écrire $-3\vec{F}$, $-\frac{1}{4}\vec{V}$ . . .

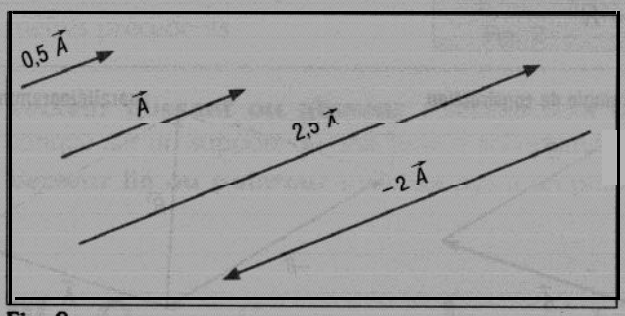


Fig. 8

Si A a pour intensité 100 N, les intensités de $0{,}5\vec{A}$, de $2{,}5\vec{A}$ et de $-2\vec{A}$ seront respectivement de 50 N, 250 N et 200 N.

IV - Coordonnées cartésiennes d'un vecteur

1. Vecteurs unitaires

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires d'intensité égale à 1.
$\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont les vecteurs de base du repère orthonormé (0, x, y, z).

Remarque : les vecteurs unitaires des axes x, y, z sont parfois notés $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$.

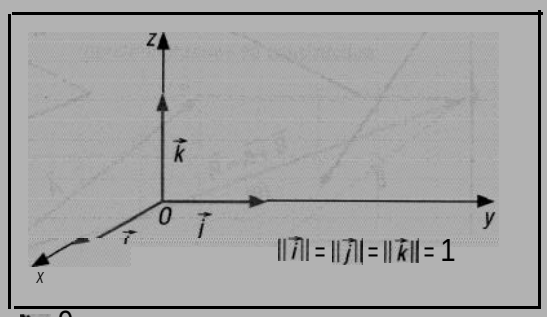


Fig. 9

2. Coordonnées dans le plan

Dans le plan, le vecteur $\vec{V}$ a pour coordonnées $\vec{V_x}$ et $\vec{V_y}$.

$$\vec{V} = \vec{V_x} + \vec{V_y}$$
$$\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j}$$

Direction : $\tan\theta = \frac{V_y}{V_x}$

Intensité : $\|\vec{V}\| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

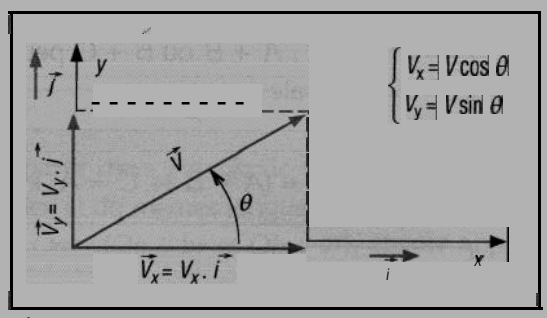


Fig.10

Exemple

Déterminons le module et la direction du vecteur $\vec{F}$ ayant pour coordonnées cartésiennes 4 suivant x et 3 suivant y.

$\vec{F} = 4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$

$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

$\vec{F}$ a un angle $\theta = 36{,}87°$ par rapport à **(0,** x)

intensité ou norme :

$\|\vec{F}\| = F = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

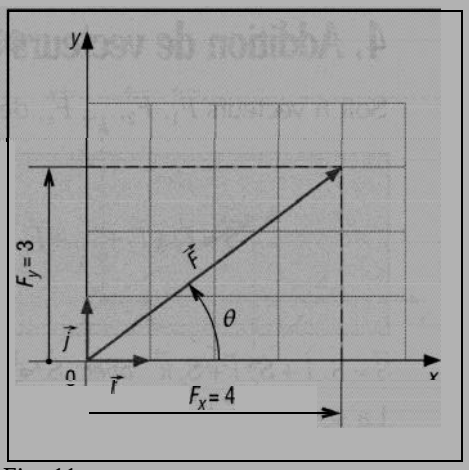


Fig. 11

Remarques

$F_x = F\cos\theta = 5\cos 36{,}87 = 4$

$F_y = F\sin\theta = 5\sin 36{,}87 = 3$

3. Coordonnées dans l'espace

$$\vec{F} = F_x.\vec{i} + F_y.\vec{j} + F_z.\vec{k}$$

$$\|\vec{F}\| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Autre expression :

$$\begin{cases} F_x = F.\cos\theta_x \\ F_y = F.\cos\theta_y \\ F_z = F.\cos\theta_z \end{cases}$$

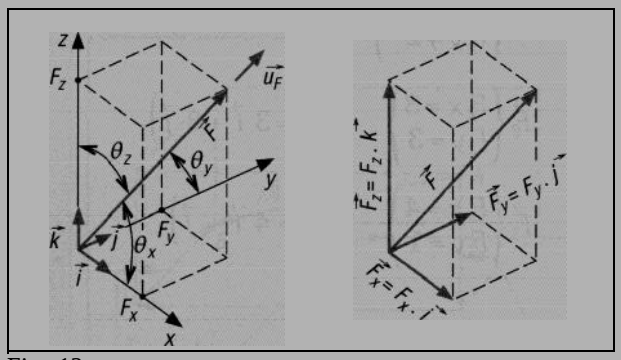


Fig. 12

Avec :

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$$

Si $\vec{u_F}$ est le vecteur unitaire de la direction de $\vec{F}$ ($\|\vec{u_F}\| = 1$)

$$\vec{u_F} = \cos\theta_x.\vec{i} + \cos\theta_y.\vec{j} + \cos\theta_z.\vec{k}$$
$$\vec{F} = F.\vec{u_F} = F\cos\theta_x.\vec{i} + F\cos\theta_y.\vec{j} + F\cos\theta_z.\vec{k}$$

Exemple : Déterminons le vecteur unitaire de la direction du vecteur $\vec{F} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 5\,\vec{k}$,

$$F = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 7{,}071$$

$\cos\theta_x = \frac{3}{7{,}071} = 0{,}424$ d'où $\theta_x = 64{,}9°$

$\cos\theta_y = \frac{4}{7{,}071} = 0{,}566$ d'où $\theta_y = 55{,}5°$

$\cos\theta_z = \frac{5}{7{,}071} = 0{,}707$ d'où $\theta_z = 45°$

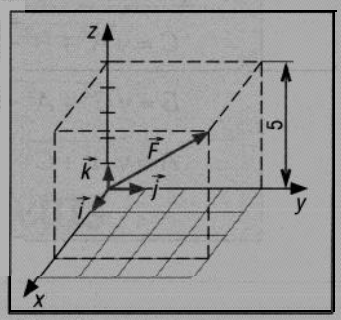


Fig. 13

Vérification : $\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 0{,}424^2 + 0{,}566^2 + 0{,}707^2 = 1$

Le vecteur unitaire s'écrit : $\vec{u_F} = 0{,}424\,.\,\vec{i} + 0{,}556\,.\,\vec{j} + 0{,}707\,.\,\vec{k}$

4. Addition de vecteurs en coordonnées cartésiennes

Soit n vecteurs $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, de coordonnées : $\vec{F}_i = F_i x \,.\, \vec{i} + F_i y \,.\, \vec{j} + F_i z \,.\, \vec{k}$

$$\vec{S} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} F_i x \,.\, \vec{i} + \sum_{i=1}^{n} F_i y \,.\, \vec{j} + \sum_{i=1}^{n} F_i z \,.\, \vec{k}$$

$\vec{S} = S_x \vec{i} + S_y \vec{j} + S_z \vec{k}$ **avec** $S_x = \sum F_i x$; $S_y = \sum F_i y$; $S_z = \sum F_i z$

La somme $\vec{S}$ des n vecteurs $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ est obtenue en ajoutant les coordonnées cartésiennes de même axe entre elles.

Exemple : déterminons la somme des trois vecteurs $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ proposés.

$$\vec{F}_1 \begin{cases} F_1 x = -1 \\ F_1 y = 2 \end{cases} \quad \left(\vec{F}_1 = -\vec{i} + 2\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_2 \begin{cases} F_2 x = 3 \\ F_2 y = 3 \end{cases} \quad \left(\vec{F}_2 = 3\vec{i} + 3\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_3 \begin{cases} F_3 x = 4 \\ F_3 y = 1 \end{cases} \quad \left(\vec{F}_3 = 4\vec{i} + \vec{j}\right)$$

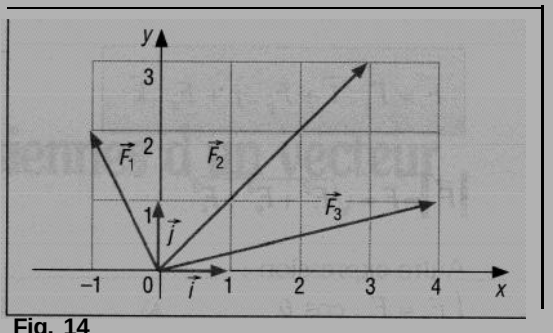


Fig. 14

$$\vec{S} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (-1+3+4)\vec{i} + (2+3+1)\vec{j} = 6\vec{i} + 6\vec{j}$$

$S_x = 6$; $S_y = 6$; $S = \sqrt{6^2 + 6^2} = 8{,}5$;

$\tan\theta = \dfrac{S_y}{S_x} = \dfrac{6}{6} = 1$ et $\theta = 45°$

5. Formules utiles pour les additions de vecteur

$$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \,.\, \cos c}$$

$$B = \sqrt{C^2 + A^2 - 2CA \,.\, \cos b}$$

$$A = \sqrt{B^2 + C^2 - 2BC \,.\, \cos a}$$

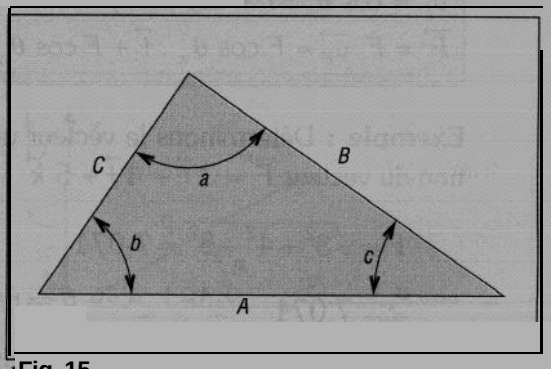


Fig. 15

V - Vecteurs positions

Les vecteurs positions sont utilisés pour repérer la position d'un point ou pour représenter un segment ou une distance.

1. Position d'un point A dans l'espace

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \begin{cases} X_A = OAx \\ Y_A = OAy \\ Z_A = OAz \end{cases} \\ \overrightarrow{OA} = X_A \cdot \vec{i} + Y_A \cdot \vec{j} + Y_A \cdot \vec{k} \end{cases}$$

Remarque : dans un plan (x, y), $\vec{k} = \vec{0}$ donne $\overrightarrow{OA} = X_A \cdot \vec{i} + Y_A \cdot \vec{j}$

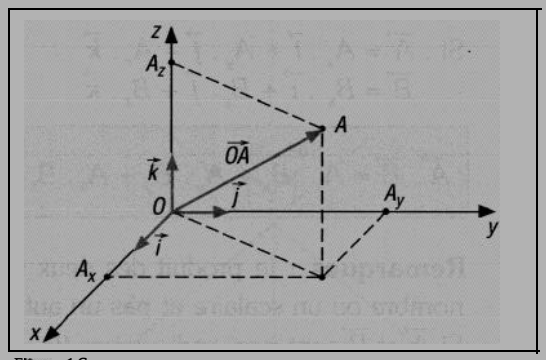


Fig. 16

2. Représentation d'un segment ou d'une distance $\overrightarrow{AB}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{AB} = (X_B - X_A)\,\vec{i} + (Y_B - Y_A)\,\vec{j} + (Z_B - Z_A)\,\vec{k} \end{cases}$$

$$\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$$

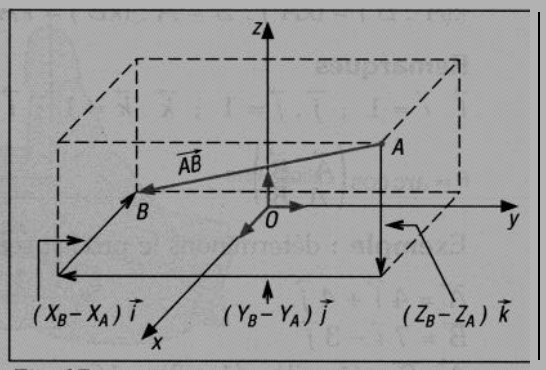


Fig. 17

Exemple

$\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$ unité : mètre

$$\overrightarrow{AB} = (6-0)\,\vec{i} + (10-0)\,\vec{j} + (7-10)\,\vec{k}$$
$$= 6\,\vec{i} + 10\,\vec{j} - 3\,\vec{k}$$
$$\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{6^2 + 10^2 + 3^2} = 12{,}04 \text{ mètres}$$

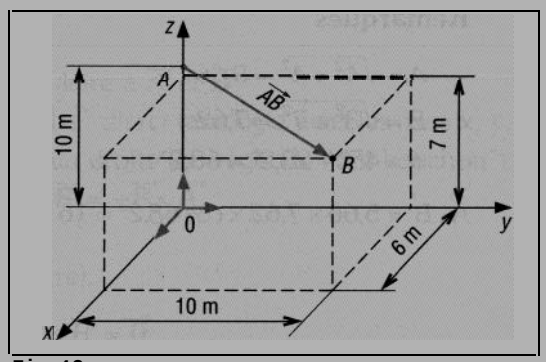


Fig.18

VI - Produit scalaire de deux vecteurs

1. Définiion

Le produit scalaire du vecteur $\vec{A}$ par le vecteur $\vec{B}$ noté $\vec{A} \cdot \vec{B}$, est égal au produit des modules des deux vecteurs multiplié par le cosinus de l'angle (θ) entre leurs directions respectives.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\theta = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos\theta = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

Si : $\vec{A} = A_x \cdot \vec{i} + A_y \cdot \vec{j} + A_z \cdot \vec{k}$

$\vec{B} = B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$$

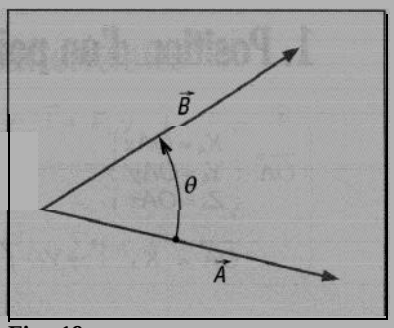


Fig. 19

Remarques : le produit des deux vecteurs est un nombre ou un scalaire et pas un autre vecteur.

Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires (θ = 90") alors $\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cos 90" = 0$.

2, Propriétés

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

$k(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (k\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (k\vec{B}) = k\vec{A} \cdot \vec{B}$ (k étant un scalaire)

Remarques

$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$; $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$; $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$; $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$; $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$; $\vec{k} \cdot \vec{i} = 0$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A \cdot B}\right)$$

Exemple : déterminons le produit scalaire des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ proposés.

$\vec{A} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$

$\vec{B} = 7\vec{i} - 3\vec{j}$

A'. $\vec{B}$ = (4 x 7) – (4 x 3) = 16

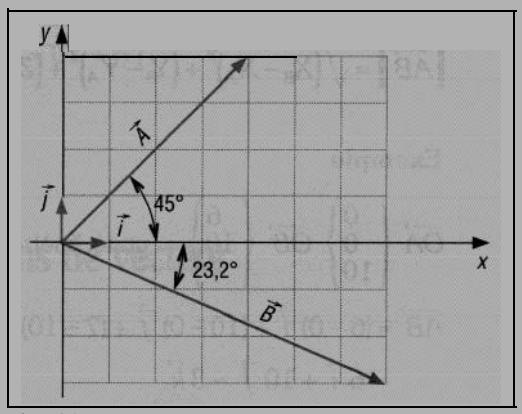


Fig. 20

Remarques

$A = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5{,}66$

$B = \sqrt{3^2 + 7^2} = 7{,}62$

$\theta = 45° + 23{,}2° = 68{,}2°$

$\vec{A} \cdot \vec{B}$ = 5,66x 7,62x cos 68,2° = 16

VII - Produit vectoriel de deux vecteurs

1, Définition

Le produit vectoriel du vecteur $\vec{A}$ par le vecteur $\vec{B}$, noté $\vec{A} \wedge \vec{B}$, est un vecteur $\vec{C}$ perpendiculaire au plan $(\vec{A}, \vec{B})$ et tel que :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C} = A \cdot B \sin\theta \, \vec{u_C}$$

avec $\|\vec{C}\| = A \cdot B \sin\theta$ et $\|\vec{u_c}\| = 1$

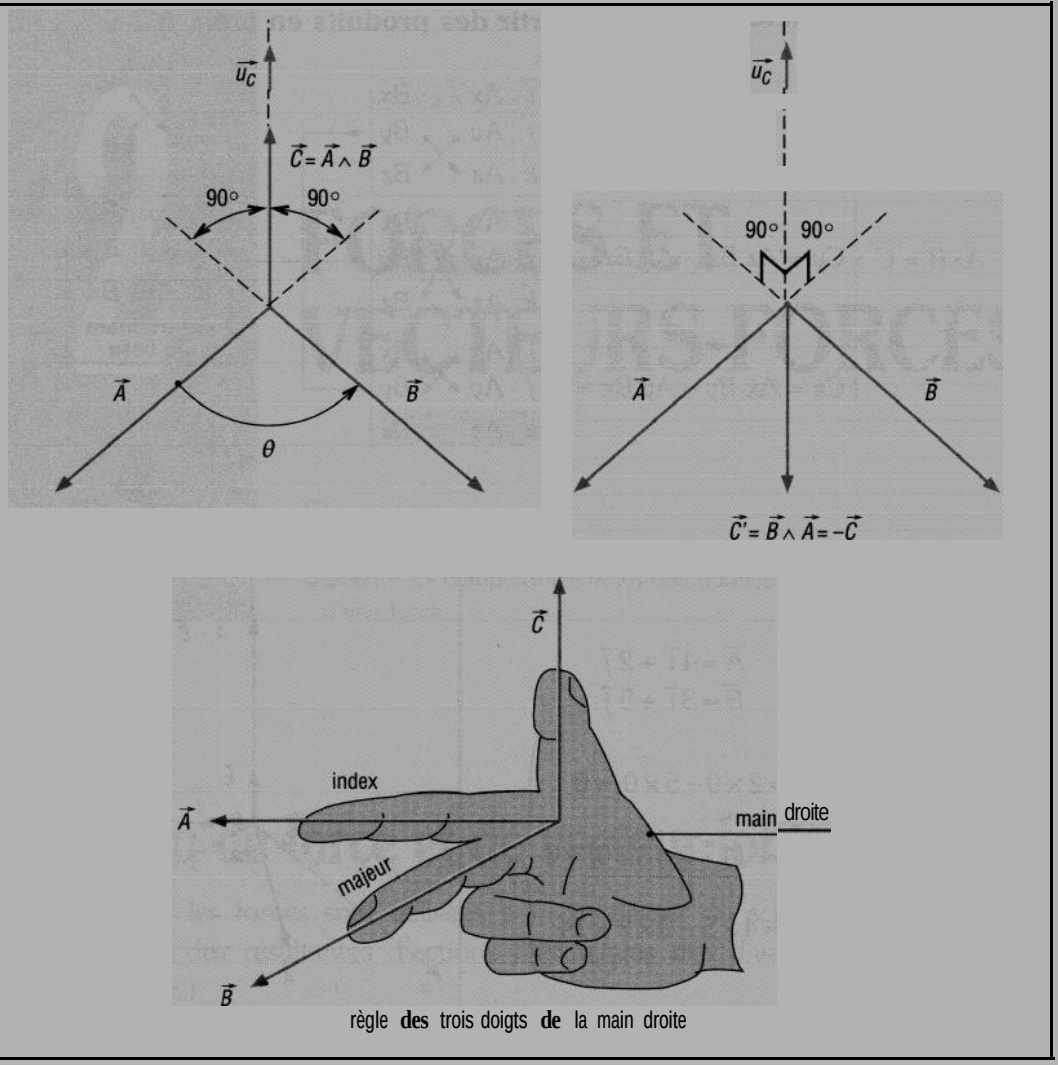


Fig. 21

Propriétés : $\vec{C}$ (ou $\vec{u_C}$) est à la fois perpendiculaire à $\vec{A}$ et $\vec{B}$.
($\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$) pris dans cet ordre forment un "trièdre" direct (analogie avec les axes x, y, z) ou obéissent à la règle des trois doigts de la main droite (ou règle du "tire-bouchon").
Le produit vectoriel n'est pas commutatif ; $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$
$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$
$k(\vec{A} \wedge \vec{B}) = k\ \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{A} \wedge k\vec{B}$ (k étant un scalaire).

Remarque : si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont parallèles alors $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$.

2. Calcul en coordonnées cartésiennes

Si $\vec{A} = A_x . \vec{i} + A_y . \vec{j} + A_z . \vec{k}$
et $\vec{B} = B_x . \vec{i}$ et $B_y . \vec{j} + B_z . \vec{k}$ alors:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_y . B_z - A_z . B_y)\vec{i} + (A_z . B_x - A_x . B_z)\vec{j} + (A_x . B_y - A_y . B_x)\vec{k}$$

Principe de détermination à partir des produits en croix

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{C}\begin{cases} Cx = Ay\,Bz - Az\,By = \begin{vmatrix} \vec{i} & Ax & Bx \\ \vec{j} & Ay & By \\ \vec{k} & Az & Bz \end{vmatrix} \\ Cy = Az\,Bx - Ax\,Bz = -\begin{vmatrix} \vec{i} & Ax & Bx \\ \vec{j} & Ay & By \\ \vec{k} & Az & Bz \end{vmatrix} \\ Cz = Ax\,By - Ay\,Bx = \begin{vmatrix} \vec{i} & Ax & Bx \\ \vec{j} & Ay & By \\ \vec{k} & Az & Bz \end{vmatrix} \end{cases}$$

déterminant de base

Exemple

$$\vec{A}\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} \quad \vec{B}\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}_{ii} \qquad \begin{matrix}\vec{A}=4\vec{i}+2\vec{j}\\ \vec{B}=3\vec{i}+5\vec{j}\end{matrix}$$

$$\vec{A}\wedge\vec{B}\begin{cases} \begin{vmatrix}2&5\\0&0\end{vmatrix}=2\times0-5\times0=0 \\ -\begin{vmatrix}4&3\\0&0\end{vmatrix}=-(4\times0-3\times0)=0 \\ \begin{vmatrix}4&3\\2&5\end{vmatrix}=4\times5-3\times2=14 \end{cases}$$

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=14\vec{k}$$

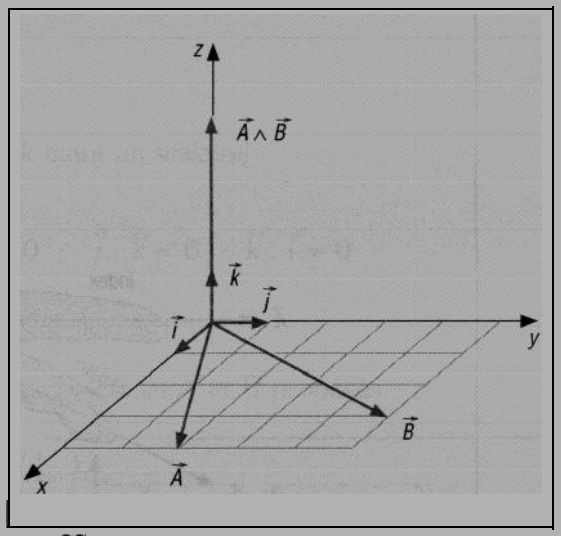


Fig. 22

3. Produits vectoriels des vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$

$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$	$\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$	$\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$
$\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}$	$\vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}$	$\vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$
$\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{0}$	$\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{0}$	$\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$

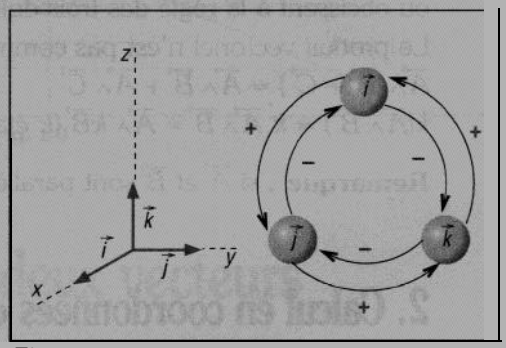


Fig. 23

4. Formule du double produit vectoriel

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

2 FORCES ET VECTEURS-FORCES

OBJECTIFS

- Définir la notion de force et de vecteurs-forces.
- Décrire les composantes et les coordonnées cartésiennes d'une force.

I - Notion de force et de vecteur-force

En mécanique, les forces sont utilisées pour modéliser ou schématiser des charges concentrées et des résultantes d'actions mécaniques très diverses (poids, attraction magnétique, etc.).

Les forces sont représentées par des vecteurs-forces ayant les propriétés générales des vecteurs (voir chapitre précédent) : opérations, coordonnées, produit scalaire, produit vectoriel.

Un vecteur-force est défini par une intensité ou un module (en newton N ou unité dérivée daN, kN, etc.), une direction, un sens et un point d'application (ou un point du support).

Remarque : les forces sont aussi appelées glisseurs (voir chapitre torseurs).

Exemple 1

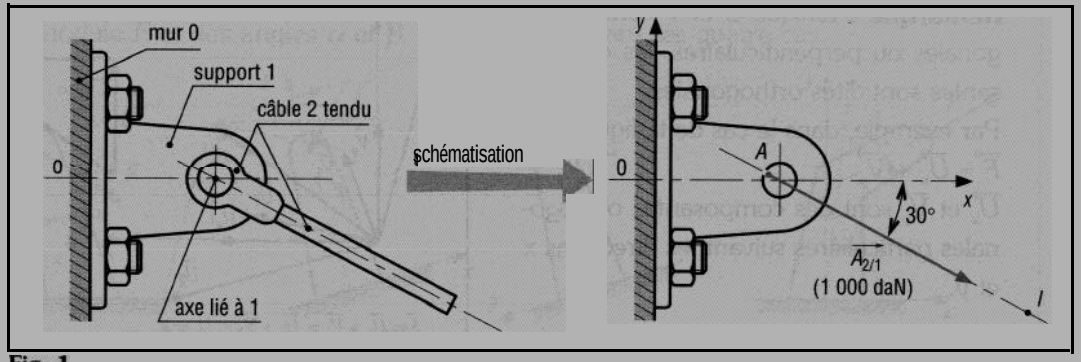


Fig. 1

L'action de contact exercée par le câble (2) sur le support (1) est schématisée par le vecteur-force $\overrightarrow{A_{2/1}}$, de point d'application **A,** de direction celle du câble, d'intensité 1 000 daN, de sens A vers *I* (le câble tire sur le support).

Exemple 2

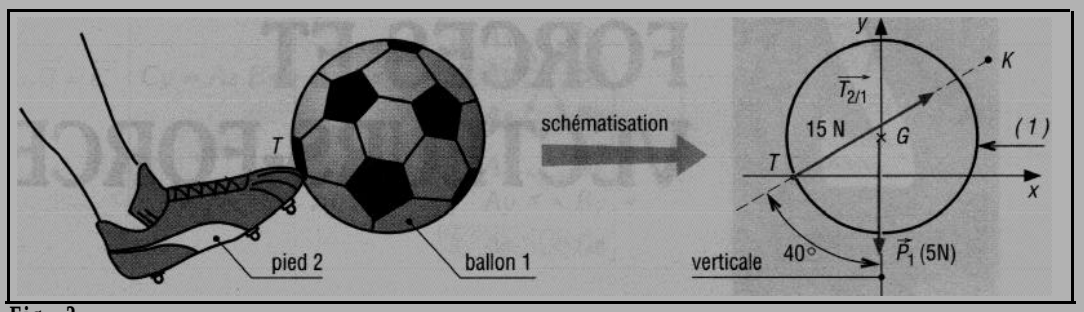


Fig. 2

Au moment du tir, l'action de contact exercée par le pied du footballeur (2) sur le ballon (1) est schématisée par le vecteur-force $\overrightarrow{T_{2/1}}$, point d'application *T*, incliné de 40" par rapport à la verticale (y), d'intensité 15 N, de sens *T* vers *K* (vers l'intérieur du ballon).

Le poids du ballon est schématisé par le vecteur-poids $\vec{P}_1$ (résultante des actions de pesanteur sur le ballon), vertical (axe y), intensité 5 N, sens du haut vers le bas et de point d'application G, le centre de gravité du ballon.

II - Composantes d'une force

Une force $\vec{F}$ agissant en un point ***A*** peut toujours être remplacée par deux autres forces ou composantes ($\vec{U}$ et $\vec{V}$) agissant au même point et vérifiant la condition $\vec{F} = \vec{U} + \vec{V}$.
C'est le cas inverse de la résultante et il existe une infinité de solutions possibles en fonction des directions choisies au départ.

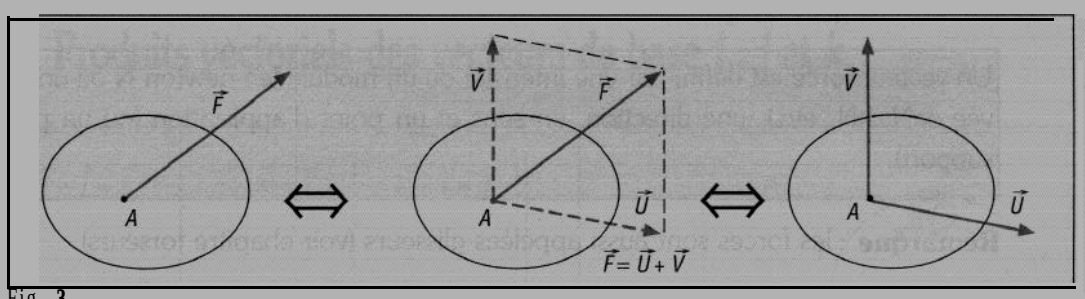


Fig. **3**

Remarque : lorsque $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonales ou perpendiculaires, les composantes sont dites orthogonales.
Par exemple, dans le cas de la figure 4 : $\vec{F} = \vec{U}_x + \vec{V}_y$
$\vec{U}_x$ et $\vec{V}_y$ sont des composantes orthogonales particulières suivant les directions x et y.

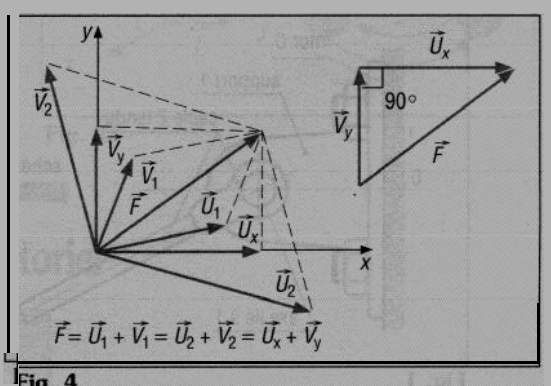


Fig. 4

III - Coordonnées cartésiennes d'une force

On peut considérer les coordonnées cartésiennes F_x et F_y comme étant des composantes orthogonales particulières de la force $\vec{F}$ dans les directions x et y.

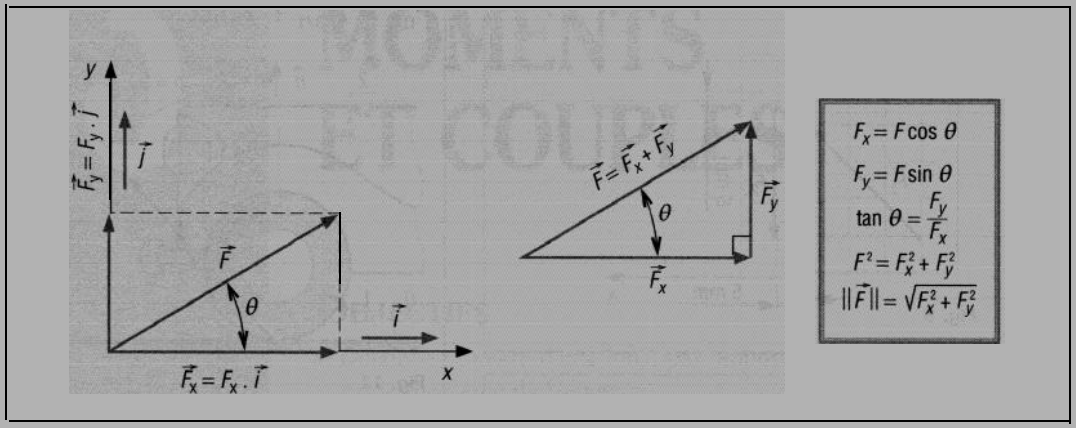


Fig. 3

Exemple : reprenons l'exemple 1 du paraqraphe 1 et déterminons les coordonnées cartésiennes de la force $\overrightarrow{A_{2/1}}$.

$$A_x = A_{2/1} \cos 30° = 1\,000 \times 0{,}866 = 866\,daN$$

$$A_y = -A_{2/1} \sin 30° = -1\,000 \times 0{,}5 = -500\,daN$$

$$\overrightarrow{A_{2/1}} = 866\,\vec{i} - 500\,\vec{j}$$

$$\tan 30° = \frac{A_y}{A_x} = \frac{500}{866} = 0{,}577$$

$$\|\overrightarrow{A_{2/1}}\| = \sqrt{866^2 + 500^2} = 1\,000$$

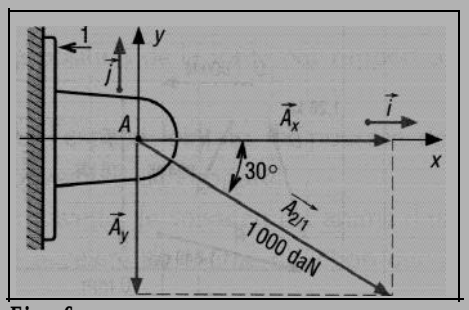


Fig. 6

Remarque : dans l'espace, la force $\vec{F}$ possédera trois coordonnées $\vec{F_x}$, $\vec{F_y}$, $\vec{F_z}$ dans les directions (x, y, z). Même principe que les vecteurs dans le cas général, voir chapitre précédent.

EXERCICES À RÉSOUDRE

1 Écrire les coordonnées cartésiennes F_x et F_y des forces $\vec{F}$ indiquées en fonction du module F et des angles a et β. $F = 1\,000\ N$ dans les quatre cas.

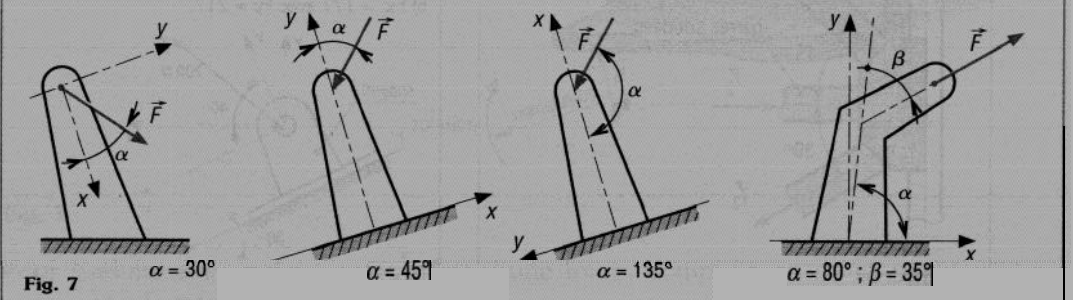


Fig. 7

2 L'échelle utilisée pour représenter les forces est 1 mm nour 20 N. Déterminer les modules des forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ proposées. Écrire ces modules en N, daN et kN.

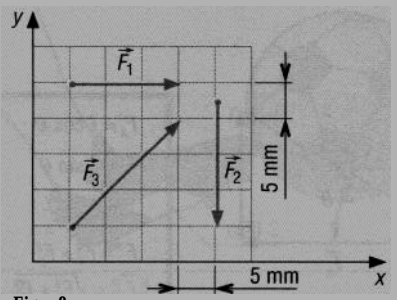


Fig. 8

3 L'échelle utilisée pour représenter les forces indiquées est 1 mm pour 40 daN. Compte tenu de cette échelle, le tracé des forces $\vec{U}$, $\vec{T}$, $\vec{K}$, $\vec{S}$ et $\vec{R}$ est-il correct ?

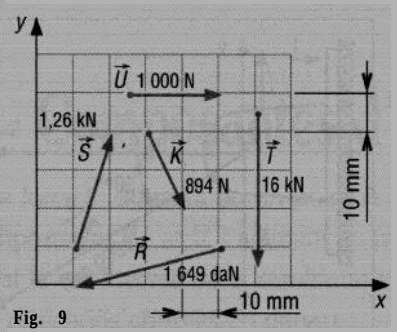


Fig. 9

❑ a) Déterminer Ies coordonnées T_{1x} et T_{1y} de la tension T_1 de la barre (1).
b) Déterminer T_3 et T_{3x} si T_{3y} = 100 daN.
c) Déterminer T_2 si (T_{1x} + T_{2x} + T_{3x} = 0).

Réponse

$T_{1x} = T_{1y} = 141,4$ daN;
$T_3 = 200$ daN; $T_{3x} = 173.2$ daN;
$T_2 = -314,6$ daN

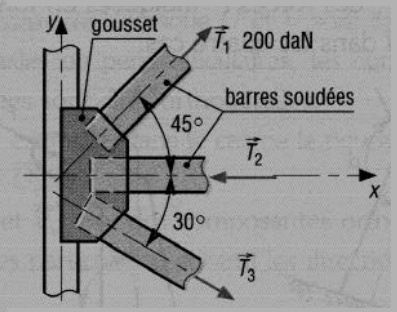


Fig. 10

5 L'action exercée par Ia route 0 sur la roue motrice 1 est schématisée par la force $\overrightarrow{F_{0/1}}$. Si l'effort normal $\overrightarrow{N_{0/1}}$ suivant+ pou-leur 400 daN, déterminer $F_{0/1}$ et $T_{0/1}$ (suivant $\vec{t}$) sachant que $\overrightarrow{F_{0/1}} = \overrightarrow{N_{0/1}} + \overrightarrow{T_{0/1}}$

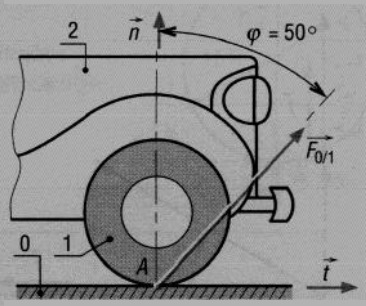


Fig. 11

❑ Sachant que la composante T_x de la tension $\vec{T}$ du câble en A est de 90 daN, déterminer T_y et T.

Réponse

$T_y = 30$ daN; $T = 94,87$ daN

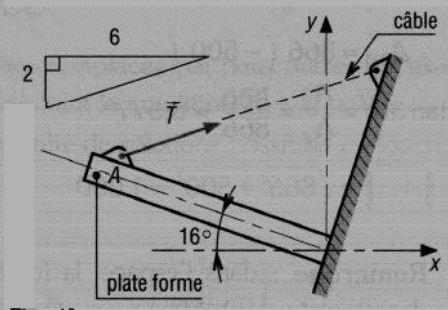


Fig. 12

❑ a) Determiner les coordonnées cartésiennes de F par rapport aux axes (x,y) et (x',y').
b) Déterminer les composantes de $\vec{F}$ suivant les directions x' et y.

Réponse

a) Fx = 153 ; Fy = 129 ; Fx' = 68,4 ; Fy' = 188
b) Fx' = 177 avec Fy = 217

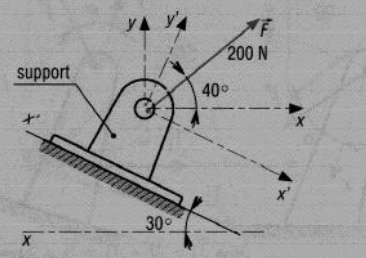


Fig. 13

3 MOMENTS ET COUPLES

OBJECTIFS

- Définir le moment d'une force par rapport à un point et énoncer le théorème de Varignon.
- Développer la notion de vecteur-moment et de moment d'une force par rapport à un axe.
- Décrire et définir les notions de couple et de vecteur-couple.

Les effets d'une force sur un solide dépendent de la position de la force par rapport au corps.

Pour la navette spatiale ci-dessous, au repos dans l'espace lointain, la poussée des moteurs schématisée par la force $\vec{F}$ engendre le mouvement de l'appareil.

Si la force $\vec{F}$ passe par le centre de gravité G de Ia navette, le vaisseau est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré de même direction que $\vec{F}$ **(fig. l-a).**

Si la force $\vec{F}$ ne passe pas par G, le vaisseau est à la fois animé d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation. Ces mouvements sont fonction de l'inclinaison des moteurs ou de la distance d (fig. **l-b).**

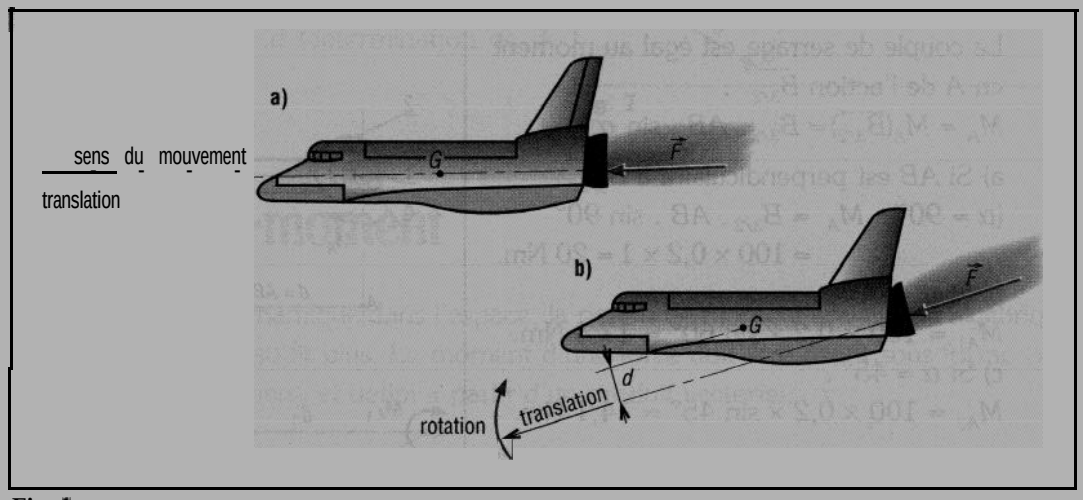


Fig. 1

Pour traduire avec précision les effets d'une force, compte tenu de sa position, il est nécessaire de faire intervenir la notion de moments.

I - Moment scalaire d'une force par rapport à un point

1. Définition

Le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point A, noté $M_A(\vec{F})$, est égal au produit de F par le bras de levier d :

$$M_A(\vec{F}) = F.d$$ (d = distance entre A et $\vec{F}$)

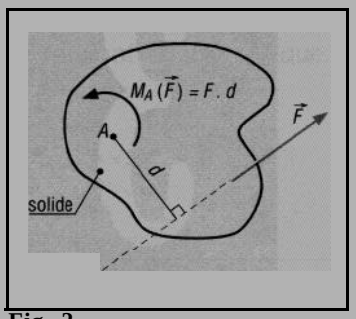


Fig. 2

a) Convention de signe

Si F fait tourner le solide autour de A dans le sens trigonométrique, le moment est dit positif (c'est le cas de la figure 2).

Si $\vec{F}$ est inversée, le moment devient négatif (c'est le cas de la navette autour du point G).

b) Exemple 1 : Déterminons $\|\vec{F_2}\|$ de façon que $M_A(\vec{F_1}) + M_A(\vec{F_2}) = 0$ *(fig. 3)*

$M_A(\vec{F_1}) = F_1 . d_1 = 240 \times 0,1 = 24$ Nm,

$M_A(\vec{F_2}) = -F_2 . d_2 = -0,12F_2$,

$M_A(\vec{F_1}) + M_A(\vec{F_2}) = -0,12F_2 + 24 = 0$

et $F_2 = 200$ N.

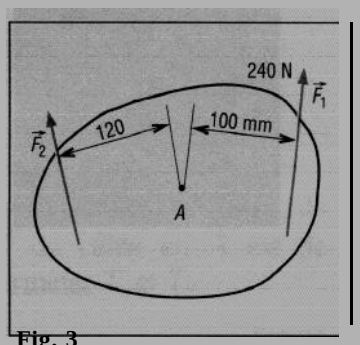


Fig. 3

Remarque : si B est le point d'application de F et si la longueur AB est connue, $M_A(\vec{F})$ peut être calculé par :

$$M_A(\vec{F}) = F . AB . \sin \alpha \quad (1)$$

en remarquant que : AB . sin α = d *(fig. 4)*

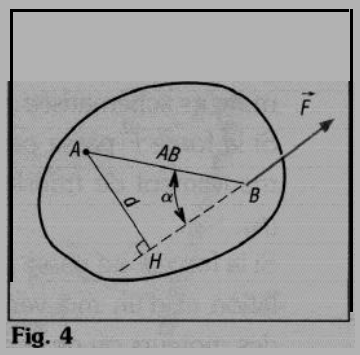


Fig. 4

c) Exemple 2

Déterminons le couple de serrage exercé par une clé plate sur un écrou en fonction de l'inclinaison de l'effort $(\vec{B_{3/2}})$ exercé par la main de l'opérateur.

Le couple de serrage est égal au moment en A de l'action $\vec{B_{3/2}}$:

$M_A = M_A(\vec{B_{3/2}}) = B_{3/2} . AB . \sin \alpha$.

a) Si AB est perpendiculaire à $\vec{B_{3/2}}$ ($\alpha = 90°$) : $M_A = B_{3/2} . AB . \sin 90° = 100 \times 0,2 \times 1 = 20$ Nm.

b) Si $\alpha = 60°$:

$M_{A1} = 100 \times 0,2 \times \sin 60° = 17,3$ Nm.

c) Si $\alpha = 45°$:

$M_{A2} = 100 \times 0,2 \times \sin 45° = 14,1$ Nm.

Remarque : plus la main est inclinée, plus le couple de serrage diminue. Les clés dynamométriques permettent de réaliser des couples de serrage précis indépendamment de l'inclinaison de bras.

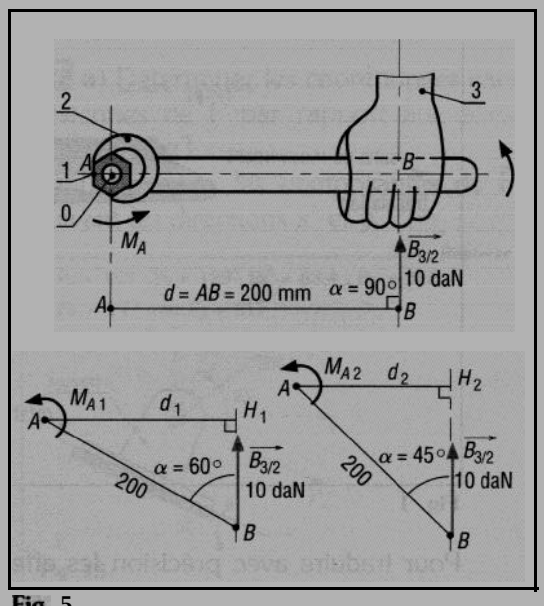


Fig. 5

2. Théorème de Varignon

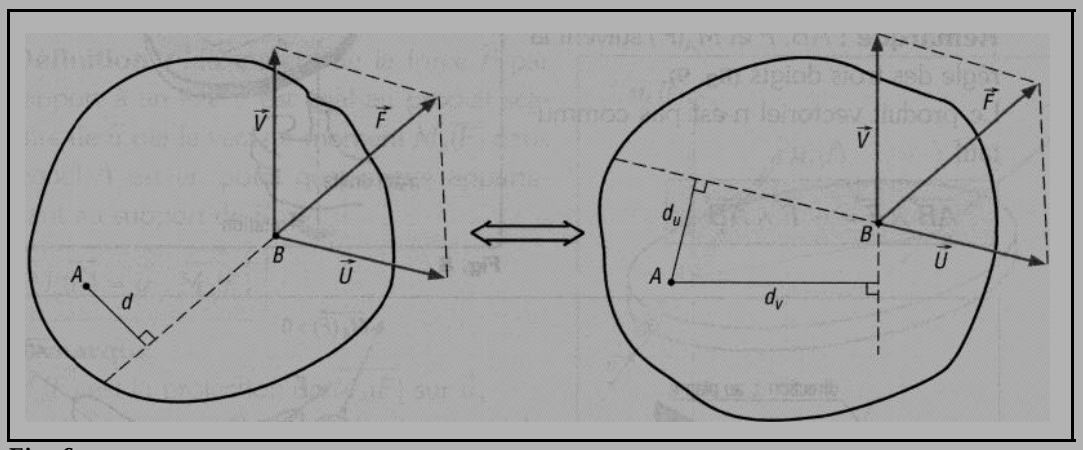


Fig. 6

Le moment de la force $\vec{F}$ au point *A* est égal à la somme des moments de ses composantes $\vec{U}$ et $\vec{V}$ par rapport au même point.

$$M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{U}) + M_A(\vec{V})$$

Pour le cas de la figure 6 : $M_A(\vec{F}) = Fd = -U.d_u + V.d_u$

Exemple : déterminons $M_A(\vec{F})$ de la force $\vec{F}$ proposée figure 7.

$F_x = F \cos 60° = 1\,000 \times 0{,}5 = 500$ N,

$F_y = F \sin 60° = 1\,000 \times 0{,}866 = 866$ N,

$M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F_x}) + M_A(\vec{F_y})$

$= -500 \times 0{,}1 + 866 \times 0{,}16$

$= 88{,}6$ Nm = F . *d*.

Remarque : le calcul à partir des composantes est ici plus simple que l'application directe à partir de F.d (détermination de d plus difficile).

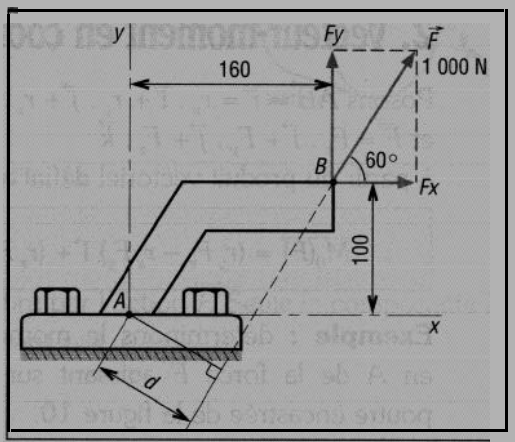


Fig. 7

II - Vecteur-moment

En statique ou en dynamique dans l'espace, la notion de moment scalaire ou algébrique du paragraphe I ne suffit plus. Le moment d'une force doit être décrit sous forme vectorielle (vecteur-moment) et défini à partir d'un produit vectoriel.

1. Définition

Soit un point B, quelconque, appartenant à la direction de la force $\vec{F}$. Le moment en A de $\vec{F}$ est défini par le vecteur :

$$\overrightarrow{M_A(F)} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$$

$\overrightarrow{M,(F)}$ est un vecteur à la fois perpendiculaire à $\vec{F}$ et à $\overrightarrow{AB}$.

Remarque : $\overrightarrow{AB}$, $\vec{F}$ et $\overrightarrow{M,(F)}$ suivent la règle des trois doigts **(fig. 9)**.

Le produit vectoriel n'est pas commutatif :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F} = -\vec{F} \wedge \overrightarrow{AB}$$

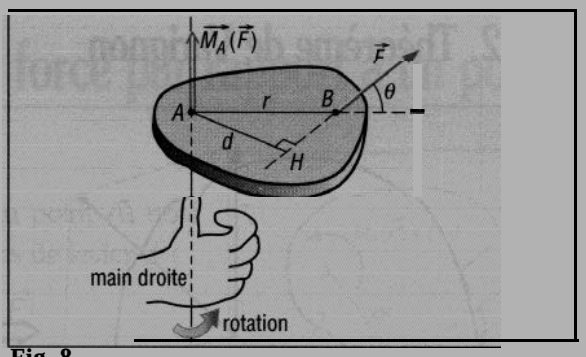


Fig. 8

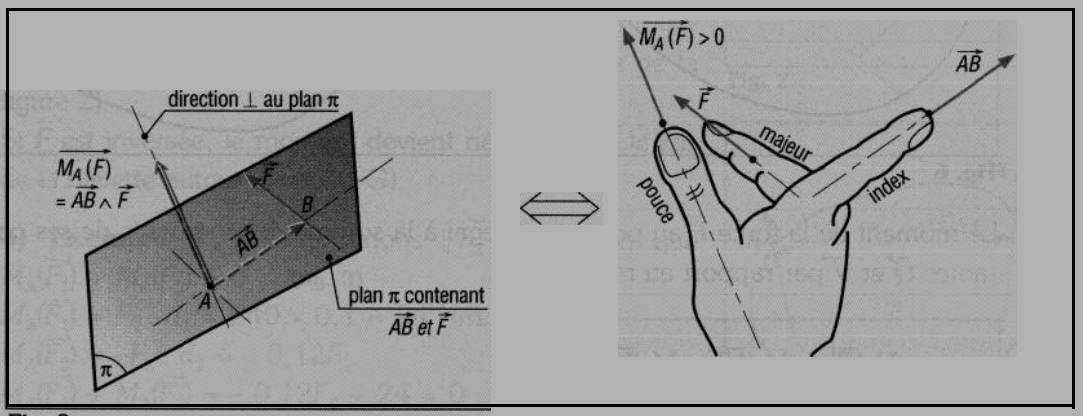


Fig. 9

2. Vecteur-moment en coordonnées cartésiennes

Posons $\overrightarrow{AB} = \vec{r} = r_x \cdot \vec{i} + r_y \cdot \vec{j} + r_z \cdot \vec{k}$

et $\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$

à partir du produit vectoriel défini au chapitre « Vecteurs » :

$$\overrightarrow{M_0(F)} = (r_y F_z - r_z F_y)\,\vec{i} + (r_z F_x - r_x F_z)\,\vec{j} + (r_x F_y - r_y F_x)\,\vec{k}$$

Exemple : déterminons le moment en A de la force $\vec{F}$ agissant sur la poutre encastrée de la figure 10.

$$\overrightarrow{AB} = 0{,}5\,\vec{i} - 0{,}3\,\vec{j}$$

$$\vec{F} = F \sin 30\,\vec{i} - F \cos 30\,\vec{j}$$

$$= 500\,\vec{i} - 866\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 500 \\ -866 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -283 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_A(F)} = -283\,\vec{k}$$

M,(F) = – 283 Nm.

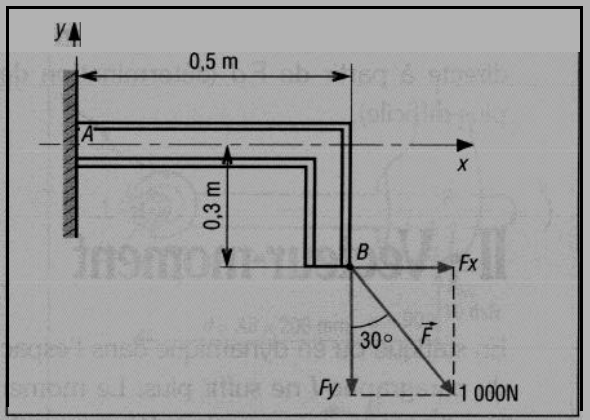


Fig. 10

Remarque

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F} = (0{,}5\,\vec{i} - 0{,}3\,\vec{j}) \wedge (500\,\vec{i} - 8667)$$

$$= 0{,}5\,\vec{i} \wedge 500\,\vec{i} - 0{,}3\,\vec{j} \wedge 500\,\vec{i} - 0{,}5\,\vec{i} \wedge 866\,\vec{j} + 0{,}3\,\vec{j} \wedge 866\,\vec{j}$$

$$= \vec{0} + 0{,}3 \times 500\,\vec{k} - 0{,}5 \times 866\,\vec{k} + \vec{0} = -283\,\vec{k}$$

III - Moment d'une force par rapport à un axe

Définition : le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à un axe u est égal au produit scalaire de $\vec{u}$ par le vecteur moment $\overrightarrow{M_A(F)}$ dans lequel A est un point quelconque appartenant au support de $\vec{u}$.

$$M_u(\vec{F}) = \vec{u} \cdot \overrightarrow{M_A(F)}$$

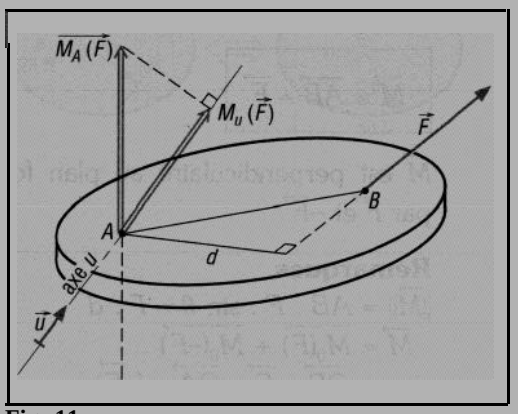


Fig. 11

Remarque

$M_u(\vec{F})$ est la projection de $\overrightarrow{M_A(F)}$ sur $\vec{u}$.

$\vec{u}$ est un vecteur unitaire de la direction (u).

Exemple : déterminons le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe u de l'arbre.

Données :

$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$

$\vec{F} = 2\,000\,\vec{i} + 4\,000\,\vec{j} - 1\,000\,\vec{k}$ (N)

$\overrightarrow{OA} = 50\,\vec{k}$ (mm)

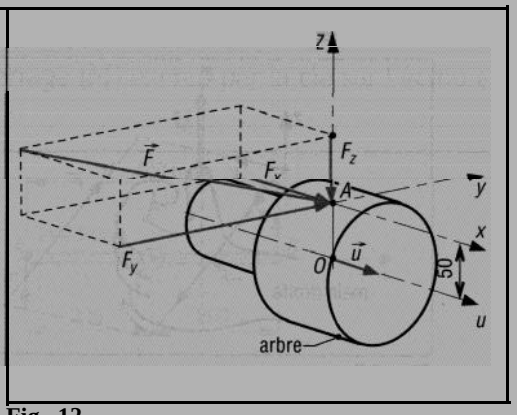


Fig. 12

$$\overrightarrow{M_0(F)} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 4\,000 \\ -1\,000 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_0(F)} = -OA \cdot F_y \cdot \vec{i} + OA\, F_x \cdot \vec{j}$$

$$M_u(\vec{F}) = \vec{u} \cdot \overrightarrow{M_0(F)} = \vec{i} \cdot \overrightarrow{M_0(F)}$$

$$= \vec{i} \cdot (-OA\, F_y \cdot \vec{i} + OA\, F_x \cdot \vec{j})$$

$$M_u(\vec{F}) = -OA \cdot F_y = -200 \text{ Nm}$$

en remarquant que $\vec{u}$ est parallèle à $\vec{i}$.

$M_u(\vec{F})$ correspond au couple engendré sur l'arbre par l'action ?Seule la composante F_y est à l'origine de ce couple, F_x et F_z n'intervenant pas.

IV - Notion de couple et de vecteur-couple

1. Définition

Le moment engendré par deux forces égales et opposées ayant des lignes d'action différentes (non colinéaires) constitue un couple (M).

L'intensité $F.d$ du couple est indépendante du point 0 choisi ou de la valeur de a. Elle ne dépend que de la distance d entre les deux forces et de l'intensité F.

$$M = M_0(\vec{F}) + M_0(-\vec{F}) = F(a+d) - Fa = F \cdot d$$

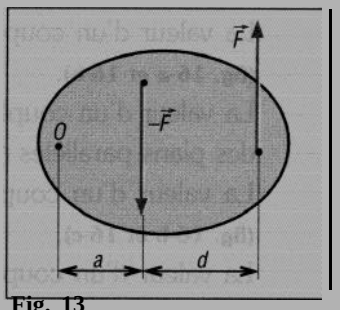


Fig. 13

2. Vecteur-couple

Soit A et B deux points quelconques des supports de $(\vec{F})$ et $(-\vec{F})$.

$$\vec{M} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$$

$\vec{M}$ est perpendiculaire au plan formé par $\vec{F}$ et $-\vec{F}$.

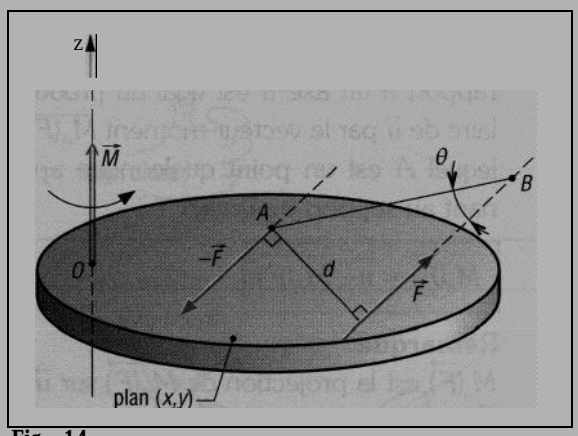


Fig. 14

Remarques

$$\|\vec{M}\| = AB \,.\, F \,.\, \sin\theta = F \,.\, d$$

$$\vec{M} = \overrightarrow{M_0(F)} + \overrightarrow{M_0(-F)}$$
$$= \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OA} \wedge (-\vec{F})$$
$$= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \wedge \vec{F} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}.$$

3. Signes

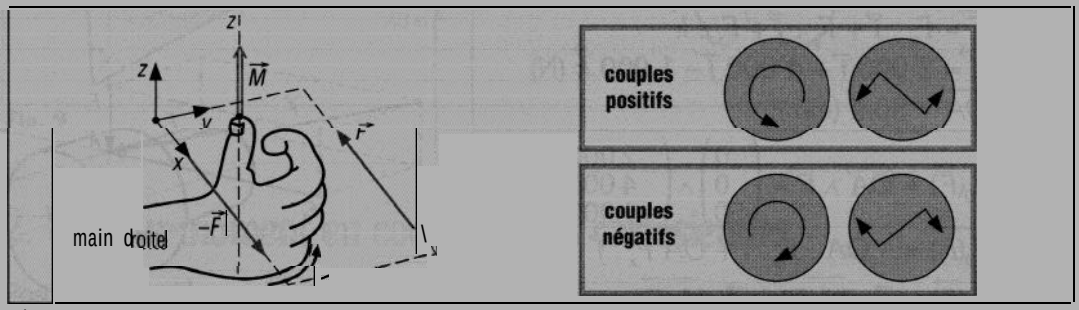


Fig. 15

Un couple positif amène une rotation dans le sens trigonométrique.

4. Propriétés

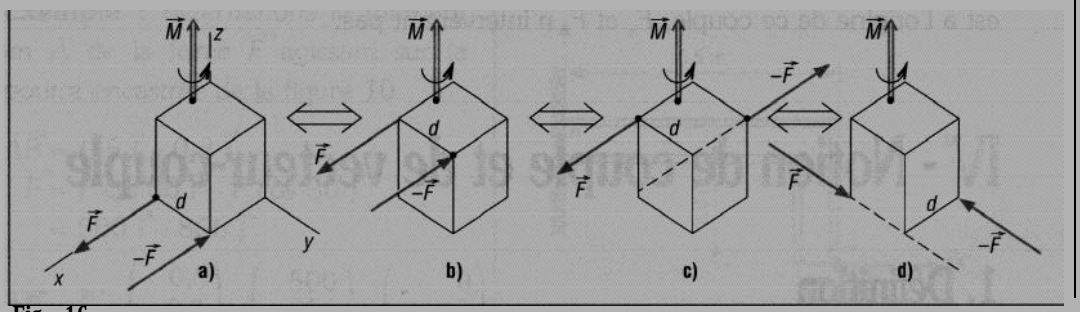


Fig. 16

La valeur d'un couple ne change pas si on déplace $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ dans des plans parallèles **(fig. 16-a et 16-b).**

La valeur d'un couple ne change pas si on tourne en bloc $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ distantes de d dans des plans parallèles **(fig. 14-c et 14-d)**.

La valeur d'un couple reste la même si on déplace $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ le long de leur support **(fig. 16-b et 16-c).**

La valeur d'un couple reste identique si on modifie dans des proportions inverses les valeurs de F et d : $M = F_1 d_1 = F_2 d_2$ (fig. **17)**.

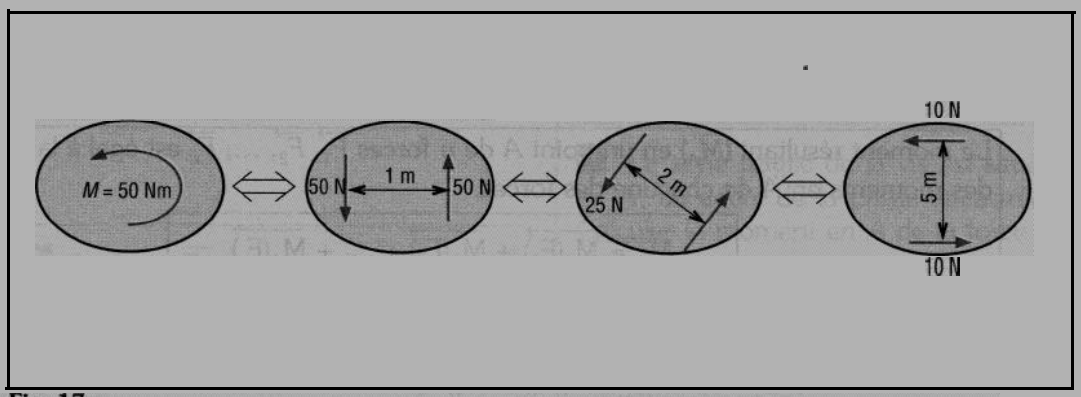


Fig. 17

$M = 50 \text{ Nm} = 50 \times 1 = 25 \times 2 = 10 \times 5$

5. Exemple

Une clé à bougie se compose d'un corps et d'une tige de manœuvre coulissante et réglable. $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ schématisent les actions exercées par les mains de l'opérateur.
Si F = 100 N, déterminons le couple de desserrage (M) exercé par la clé sur l'écrou en E, pour les positions indiquées.

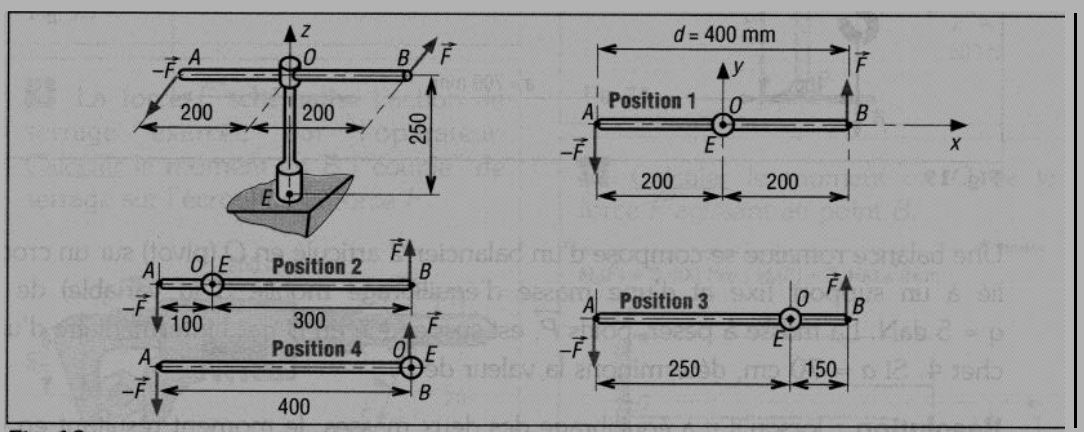


Fig. 18

a) Sous forme algébrique ou scalaire

Pour les quatre positions :

$M = M_E(\vec{F}) + M_E(-\vec{F}) = M_O(\vec{F}) + M_O(-\vec{F})$
$= F \times OB + F \times OA = F.AB = 0{,}4\,F = 40 \text{ Nm}$

Pour la position 1 : $M = 0{,}2\,F + 0{,}2\,F = 0{,}4\,F$.

Pour la position 2 : $M = 0{,}3\,F + 0{,}1\,F = 0{,}4\,F$.

Pour la position 3 : $M = 0{,}15\,F + 0{,}25\,F = 0{,}4\,F$.

Pour la position 4 : $M = 0 + 0{,}4\,F = 0{,}4\,F$.

b) Sous forme vectorielle

$\vec{M} = \overrightarrow{M_E(F)} + \overrightarrow{M_E(-F)} = \overrightarrow{EB} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{EA} \wedge (-\vec{F})$
$= (\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OB}) \wedge \vec{F} + (\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OA}) \wedge (-\vec{F})$
$= \overrightarrow{EO} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{EO} \wedge (-\vec{F}) + \overrightarrow{OA} \wedge (-\vec{F})$
$= \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OA} \wedge (-\vec{F}) = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \wedge \vec{F}$
$= \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F} = AB \,.\, \vec{i} \wedge F \,.\, \vec{j}$
$= AB \,.\, F \,.\, \vec{k} = 40\,\vec{k}$ (Nm)

V - Moment résultant de plusieurs forces

Le moment résultant $(\overrightarrow{M_A})$ en un point A de *n* forces $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \ldots, \overrightarrow{F_n}$ est égal à la somme des moments en A de chacune des forces.

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_A(F_1)} + \overrightarrow{M_A(F_2)} + \ldots + \overrightarrow{M_A(F_n)}$$

Si les forces appartiennent toutes à un même plan (sont coplanaires), le moment peut être écrit sous forme algébrique :

$$M_A = M_A(\overrightarrow{F_1}) + M_A(\overrightarrow{F_2}) + \ldots + M_A(\overrightarrow{F_n})$$

Exemple : balance romaine

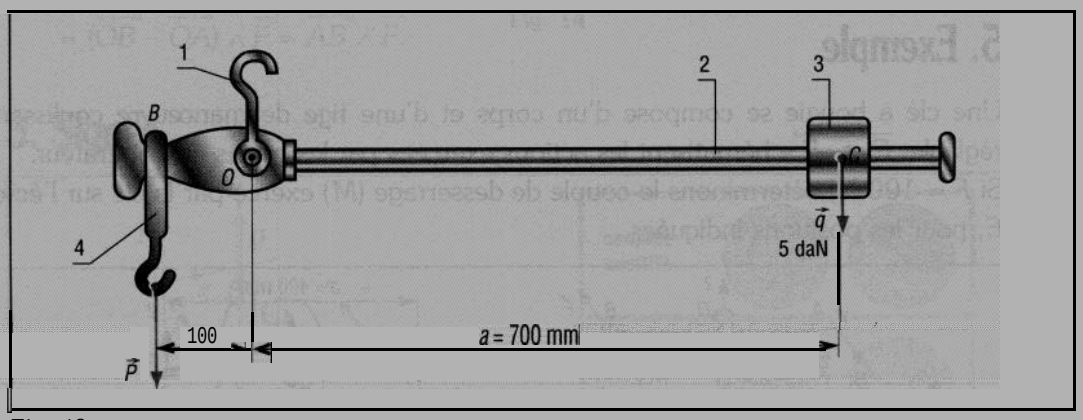


Fig. 19

Une balance romaine se compose d'un balancier 2 articulé en 0 (pivot) sur un crochet 1 lié à un support fixe et d'une masse d'équilibrage mobile 3 (a variable) de poids q = 5 daN. La masse à peser, poids $\overrightarrow{P}$, est suspendue en B par l'intermédiaire d'un crochet 4. Si a = 70 cm, déterminons la valeur de $\overrightarrow{P}$.

Résolution : lorsqu'il y a équilibrage des deux masses, le moment résultant en 0 des poids $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{q}$ est nul.

$M_O = M_O(\overrightarrow{P}) + M_O(\overrightarrow{q}) = P \times 0{,}1 - q \times 0{,}7 = 0$

d'où $P = 7q = 7 \times 5 = 35$ daN

EXERCICES À RÉSOUDRE

❑ La force $\vec{F}$ schématise l'action exercée par la chaussure sur le ballon au moment du tir.

a) Calculer le moment en G de la force $\vec{F}$.

b) Quel est le mouvement pris par le ballon ?

Réponse

$M_G(\vec{F}) = -3$ Nm ; [illegible] + rotation ("tir brossé").

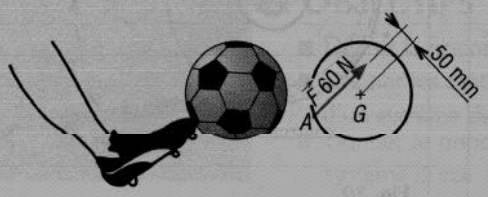


Fig.20

❑ La force $\vec{F}$ schématise l'action de serrage exercée par l'opérateur. Calculer le moment en B ("couple") de serrage sur l'écrou) de la force F.

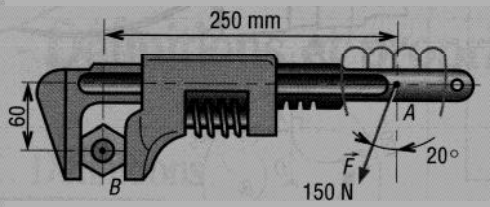


Fig.21

3 La force $\vec{R}$ schématise la résultante des forces de pression dues au vent. Calculer le moment en A de $\vec{R}$, A étant la zone fragile du panneau indicateur.

Réponse

$M_A(\vec{R}) = -180$ Nm ; $\overrightarrow{M_A(R)} = -180\ \vec{k}$ (Nm).

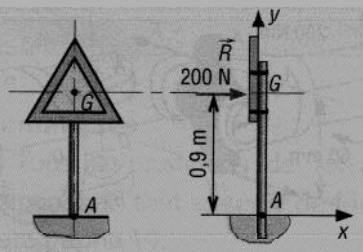


Fig. 22

4 La zone fragile de la vis est située en A, au début de la partie encastrée. Calculer le moment en A de la force $\vec{F}$ agissant sur l'anneau.

Réponse

$M_A(\vec{F}) = -9$ Nm ; $\overrightarrow{M_A(F)} = -9\ \vec{k}$ (Nm).

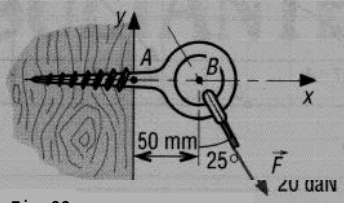


Fig.23

5 Déterminer le moment en 0 de la force $\vec{F}$ agissant sur le point B de la potence.

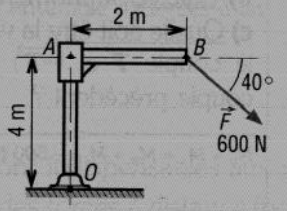


Fig. 24

❑ Calculer le moment en 0 de la force F agissant au point B.

Réponse

$M_0(\vec{F}) = 3\,400$ Nm ; $\overrightarrow{M_0(F)} = 3400\ \vec{k}$ (Nm).

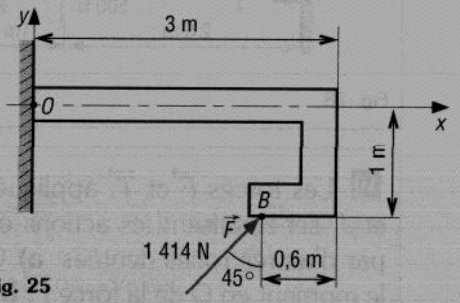


Fig. 25

❑ a) Calculer le moment en B de la force $\vec{F}$ de 2 kN appliquée au point A.

b) Même question en C et en D.

Réponse

$M_B = -832$ Nm ; $M_D = 0$; $M_C = 332{,}8$ Nm.

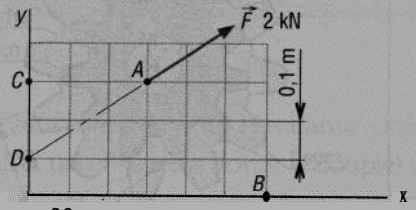


Fig. 26

8 **a)** Calculer le moment en C de la force $\vec{T}$ et le moment en C de la force $\vec{S}$.

b) Déduire le moment résultant en C des deux forces.

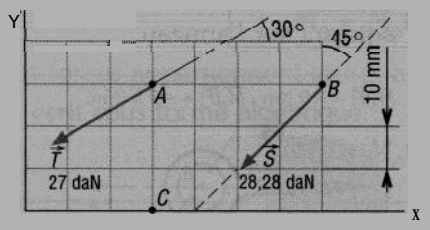


Fig. 27

❑ a) Déterminer le moment résultant en 0 (M_0) exercé par le couple de forces : $\vec{F}$ et $-\vec{F}$.

b) Calculer le moment en A, B et C.

c) Quelle doit être la valeur de T pour que le couple T et $(-\vec{T})$ puisse équilibrer le couple précédent ?

Réponse

$M_0 = M_A = M_B = M_C = -500$ Nm ; $T = 400$ N

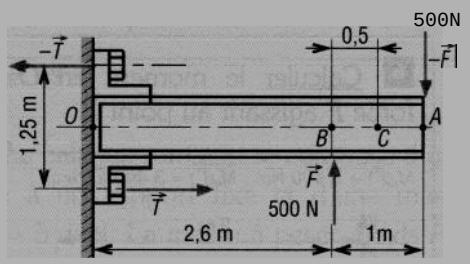


Fig. 28

❑ Les forces $\vec{F}$ et $\vec{T}$, appliquées en I et J, schématisent les actions exercées par d'autres roues dentées.9 Calculer le moment en 0 de la force F. **b)** À partir de quelle valeur la force $\vec{T}$ équilibre-t-elle le couple moteur engendré par $\vec{F}$?

Réponse

F-15000N

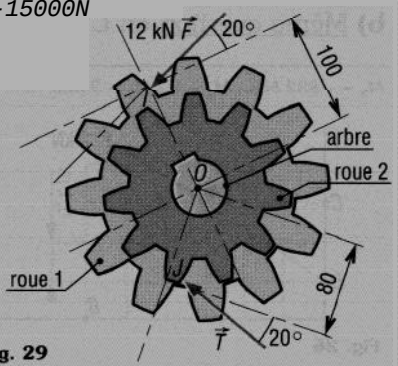


Fig. 29

11 Le rayon R d'enroulement de la courroie sur la poulie est de 100 mm, $\vec{T}$ et $\vec{t}$ schématisent les efforts de tension. Calculer le moment résultant en A des forces, en déduire le couple disponible sur l'arbre de transmission.

Réponse

M_A = − 80 Nm = couple disponible

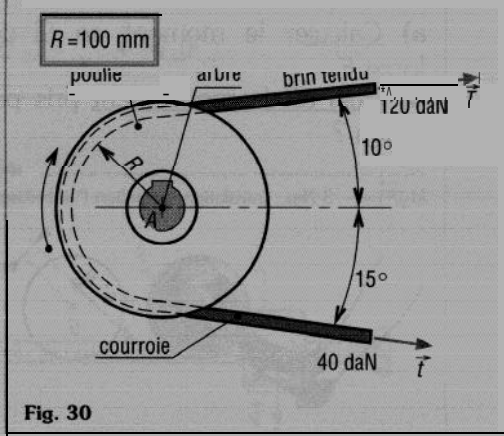


Fig. 30

❑ Le couple transmis par l'arbre moteur au foret aléseur est C = 40 Nm. En déduire les efforts de coupe $\vec{F}$ exercés sur les trois lèvres du foret.

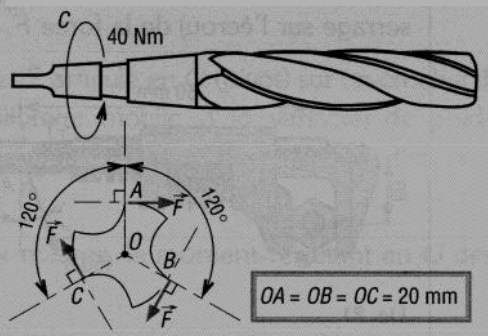


Fig. 31

❑ Le couple moteur C transmis par l'arbre moteur est de 200 Nm.
En déduire les efforts $\vec{F}$ exercés sur le croisillon du cardan.

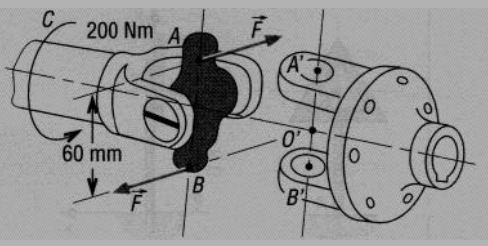


Fig. 32

4 NOTION DE RÉSULTANTE

OBJECTIFS

- Définir la notion de résultante et indiquer son rôle fondamental.
- Donner les méthodes permettant de déterminer la résultante d'un système de plusieurs forces connues.
- Donner le principe de réduction d'un ensemble de forces à un système [force + couple).

Les résultantes ont un rôle fondamental en mécanique et sont indispensables aux résolutions graphiques. Elles ne sont ni des forces de contact, ni des forces à distance (poids), mais des forces calculées à partir d'autres, connues.

I - Définitions et propriétés

1. Définitions

On appelle résultante d'un système de forces $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \ldots, \overrightarrow{F_n}$ la force $\overrightarrow{R}$ telle que :

a) $\overrightarrow{R}$ est égale à la somme vectorielle des n forces considérées.

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \ldots + \overrightarrow{F_n} \qquad (1)$$

b) Le moment résultant en n'importe quel point I des n forces est égal au moment en I de la résultante $\overrightarrow{R}$.

$$M_I(\overrightarrow{R}) = M_I(\overrightarrow{F_1}) + M_I(\overrightarrow{F_2}) + \ldots + M_I(\overrightarrow{F_n}) \qquad (2)$$

Remarques

- Tous les systèmes de forces ne sont pas réductibles à une résultante unique. Cependant, tout système de forces peut-être réduit à un ensemble (force + couple) (voir paragraphe V) .
- Dans l'espace, l'équation (2) est remplacée par une équation vectorielle.

2. Propriétés

La droite servant de **support ou de ligne d'action à la résultante est unique et la position du point d'application sur cette droite est sans importance (vecteur glissant).**

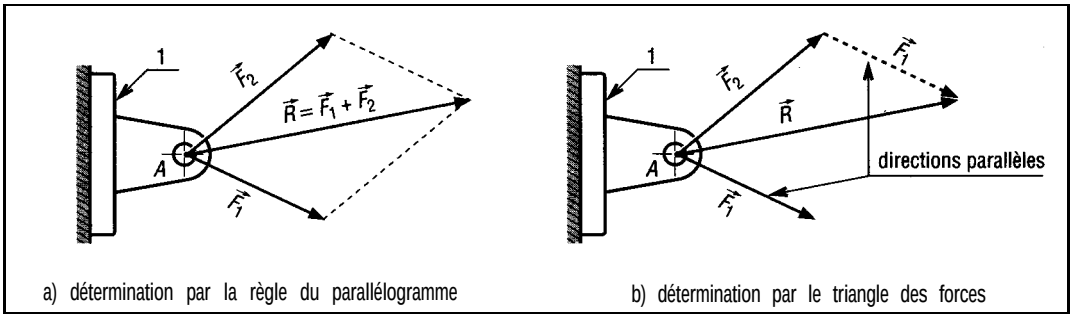
La résultante est dite équivalente aux ***n*** forces considérées et peut les remplacer dans n'importe quel problème sans en modifier les résultats.

II - Résultante de forces concourantes

1. Résultante de deux forces concourantes

La résultante de deux forces concourantes passe par le point de **concours de celles-ci**. Son intensité et sa direction peuvent être obtenues par la **règle** du **parallélogramme** **(fig. 1-a) ou** par un triangle de construction **(fig. 1-b).**

Exemple : déterminons la résultante des actions $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ indiquées fig. 1.



a) détermination par la règle du parallélogramme

b) détermination par le triangle des forces

Fig. 1

Remarque 1 : si les forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ ont des points d'application différents (fig. **2)**, il est possible de les translater le long de leur ligne d'action jusqu'au point de concours *I* puis de les additionner suivant la règle du parallélogramme ou du triangle.

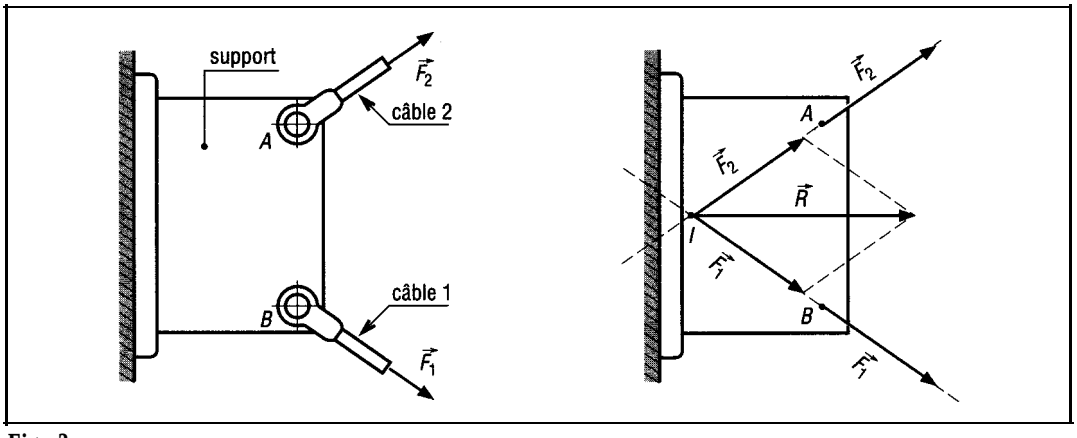


Fig. 2

Remarque 2 : $\vec{R}$ représente l'action conjuguée des deux câbles et à même effet physique que ceux-ci sur le support. Autrement dit, les deux câbles (tension $\vec{F_1}$ et F_2) pourraient être remplacés par un câble unique tirant dans la direction $(I, \vec{R})$.

Remarque 3 **:** $\vec{R}$ vérifie la relation (2) de la définition du paragraphe I. Si I est le point de concours des deux forces, alors $M_I(\vec{F_1}) = 0$ et $M_I(\vec{F_2}) = 0$ (les bras de levier sont nuls). Il en résulte que $M_I(\vec{R}) = 0$. Comme $\vec{R}$ est différent de $\vec{0}$, $\vec{R}$ ne peut que passer par I.

2. Résultante de plusieurs forces concourantes au même point

Soit un système de n forces $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \ldots, \vec{F_n}$ concourantes en un même point I. La résultante $\vec{R}$ des n forces passe aussi par I et est égale à la somme vectorielle des n forces : $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \ldots + \vec{F_n}$

Remarque : ce cas généralise celui du paragraphe précédent, graphiquement l'intensité et la direction de $\vec{R}$ peuvent être obtenues par un polygone des forces (voir fig. **3)**.

Exemple : pour la vis proposée figure 3, déterminons la résultante ou l'effet combiné des quatre tensions de câbles $\vec{T_1}, \vec{T_2}, \vec{T_3}$ et $\vec{T_4}$.

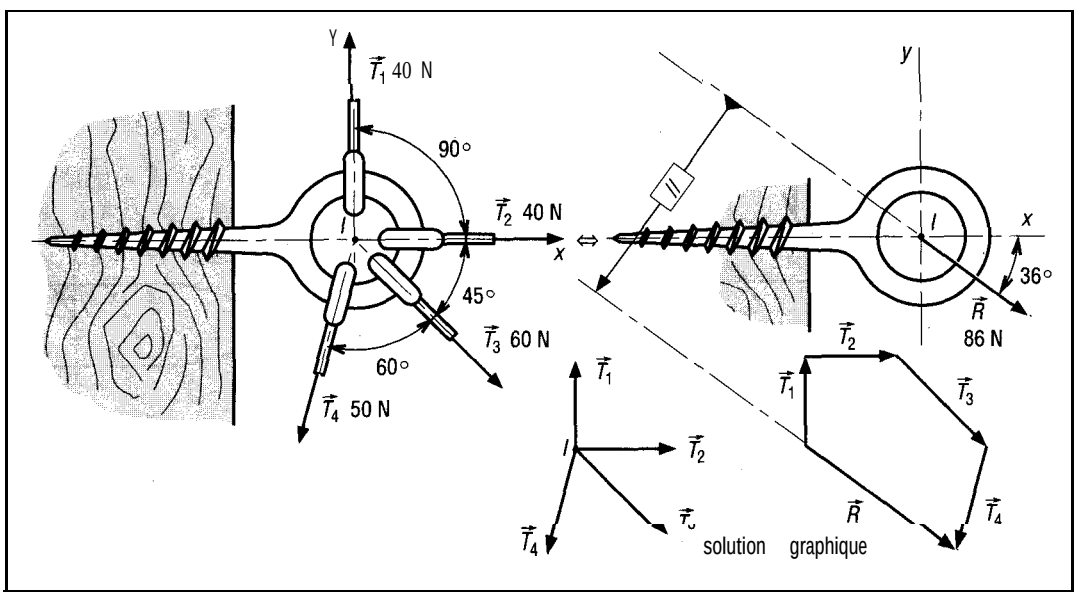


Fig. 3

Par le calcul : $\vec{R} = \vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{T_3} + \vec{T_4}$ donne en projection sur les axes x et y :

$$R_x = T_{1x} + T_{2x} + T_{3x} + T_{4x}$$
$$= 0 + 40 + 60 \cos 45^\circ + 50 \cos 105^\circ = 69{,}49 \text{ N}$$

$$R_y = T_{1y} + T_{2y} + T_{3y} + T_{4y}$$
$$= 40 + 0 - 60 \sin 45^\circ - 50 \sin 105^\circ = -50{,}72 \text{ N}$$

$$\left\|\vec{R}\right\| = R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{69{,}49^2 + 50{,}72^2} = 86\,N$$

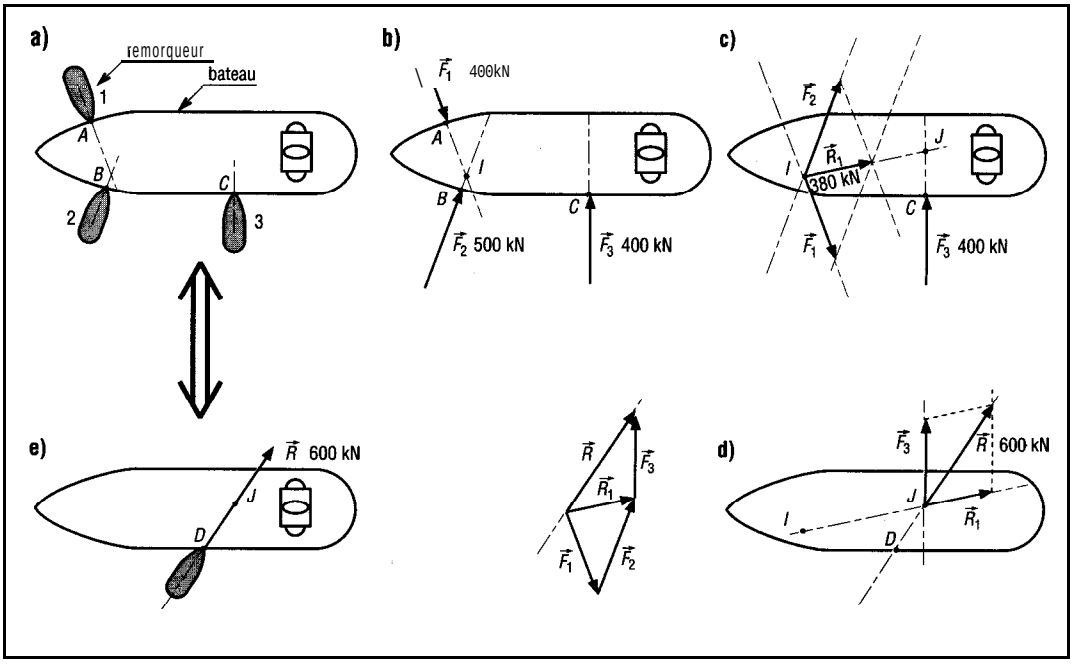
$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = -\frac{50{,}72}{69{,}49} = -0{,}73 \text{ et } \theta = -36{,}1^\circ$$

III - Résultante d'un système de forces planes quelconques

La méthode décrite s'utilise dans le cas des résolutions graphiques. La méthode du dynamique et du funiculaire est également utilisable (voir chapitre "statique plane") ainsi que les méthodes calculées en utilisant la définition du paragraphe 1.

Principe : si les forces connues ne sont plus toutes concourantes au même point, il est nécessaire de déterminer graphiquement la ligne d'action de la résultante par approches successives, en combinant les forces deux à deux.

Exemple : déterminons la résultante des actions $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$ exercées par trois remorqueurs pour manœuvrer un pétrolier (fig. 4-a).



ig. 4

$\vec{R_1}$, résultante de $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ passe par I **(fig. 4-c)** ; $\vec{R}$ résultante de $\vec{R_1}$ et $\vec{F_3}$, mais aussi de $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$, passe par J, point de concours de $\vec{R_1}$ avec $\vec{F_3}$. Le pétrolier se comporte comme si un seul remorqueur poussait dans la direction DJ avec une poussée de 600 kN (fig. 4-e).

IV - Résultante d'un système de forces parallèles

Ce cas particulier peut se résoudre par calcul à partir de la définition du paragraphe 1 ou graphiquement (plusieurs méthodes possibles : dynamique + funiculaire, en se ramenant à des forces concourantes, etc.).

Exemple 1 : déterminons la résultante des forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ en se ramenant à des forces concourantes.

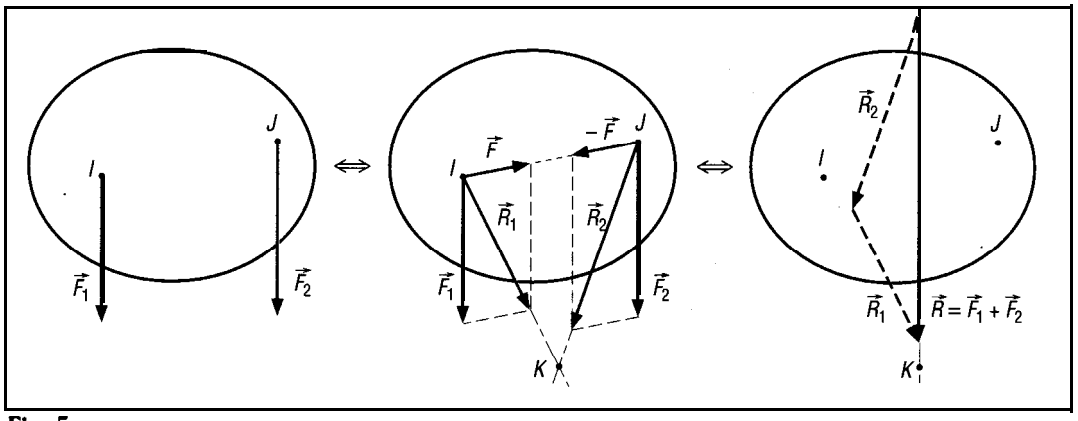


Fig. 5

$\vec{R_1} = \vec{F_1} + \vec{F}$ et $\vec{R_2} = \vec{F_2} - \vec{F}$; $\vec{R_1} + \vec{R_2} = \vec{F_1} + \vec{F} + \vec{F_2} - \vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{R}$; $\vec{R}$ résultante de $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ est aussi résultante de $\vec{R_1}$ et $\vec{R_2}$ et, de ce fait, passe obligatoirement par K, point de concours de $\vec{R_1}$ et $\vec{R_2}$.
$\vec{F}$ et $-\vec{F}$ ont pour ligne d'action commune IJ (n'importe quelle autre droite peut convenir).

Exemple 2 : déterminons par le calcul la résultante de $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$ (**fig.** 6).

a) $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$
En projection sur y parallèle aux forces :
$R = F_1 + F_2 + F_3 = 50 + 220 + 110 = 380$ kN

b) $M_I(\vec{R}) = M_I(\vec{F_1}) + M_I(\vec{F_2}) + M_I(\vec{F_3})$
$Rd_R = F_1 \times 9 + 0 + F_3 \times 2$
$380\ d_R = 9 \times 110 + 2 \times 220 = 1\,430$
$d_R = 3{,}76$ m

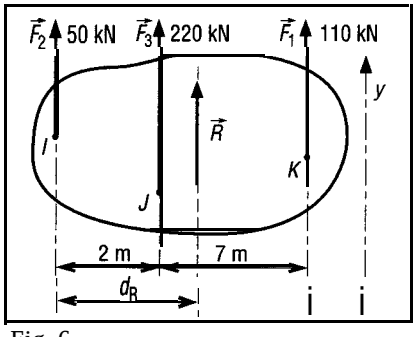


Fig. 6

V • Réduction d'un système de forces à un ensemble (force + couple)

Il n'est pas toujours possible de réduire un système de forces à une résultante $\vec{R}$ unique. En revanche, en un point I quelconque, n'importe quel système de forces peut-être réduit à une force $\vec{S}$ et à un couple M_I obéissant aux équations (1) et (2).

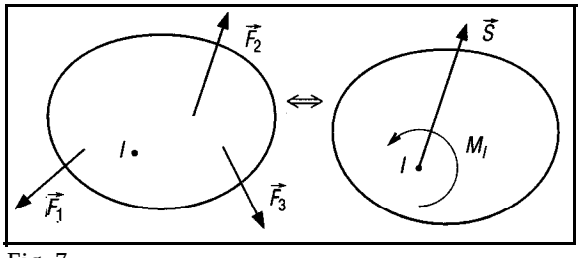


Fig. 7

$$\vec{S} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \ldots + \vec{F_n} \quad (1)$$

$$M_I = M_I(\vec{F_1}) + \ldots + M_I(\vec{F_n}) \quad (2)$$

Remarque : dans certains cas, le système de forces peut se réduire à un couple unique ($M_I \neq 0$ et $\vec{S} = 0$).

Exemple : une poutre encastrée en un point 0 dans un mur supporte trois charges concentrées, schématisées par les forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$.

a) Déterminons un ensemble (force + couple) équivalent aux trois forces en 0.

b) Existe-t-il, dans ce cas, une résultante unique $\vec{R}$ équivalente aux trois forces ?

Résolution

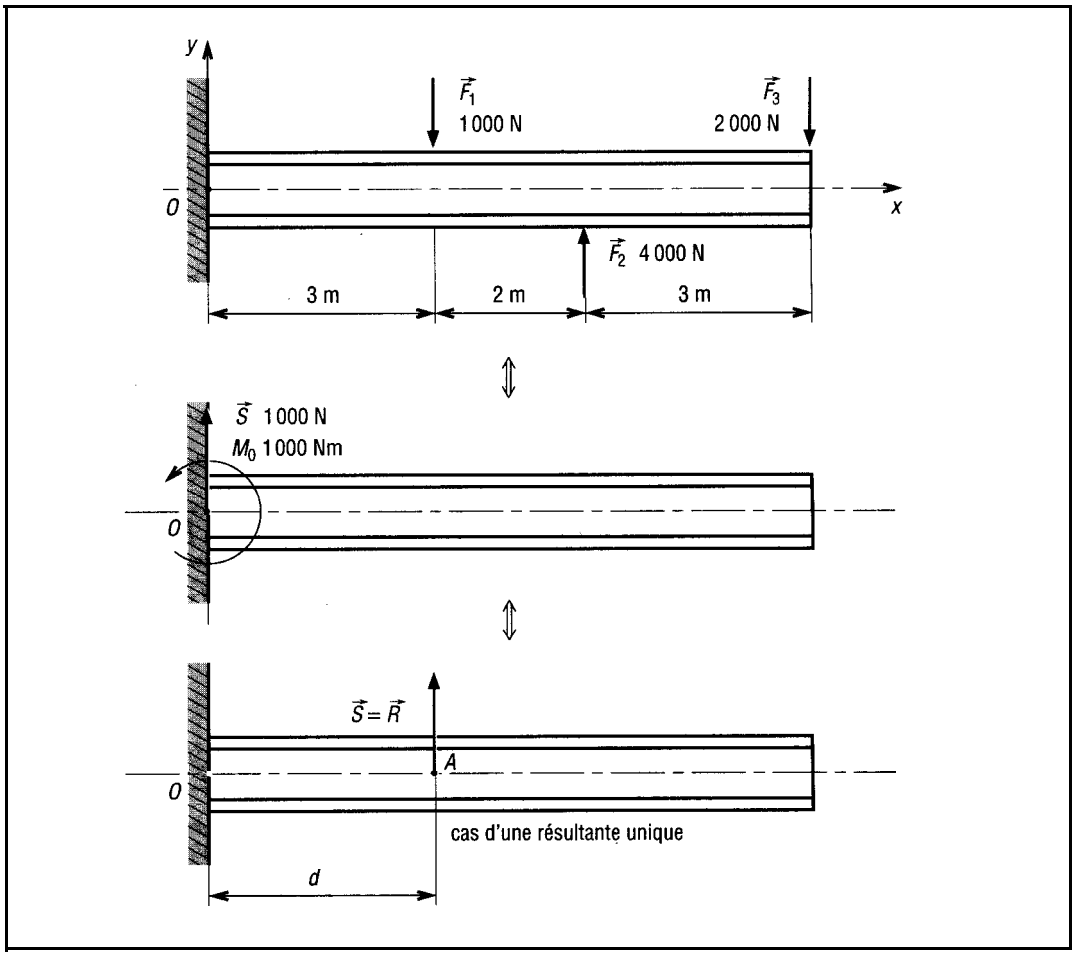


Fig. 8

a) $\vec{S} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$

En projection sur la verticale y :

$S = -F_1 + F_2 - F_3 = 1\ 000$ N

$M_0 = M_0(\vec{F_1}) + M_0(\vec{F_2}) + M_0(\vec{F_3})$

$M_0 = (-1\ 000 \times 3) + (4\ 000 \times 5) - (2\ 000 \times 8) = 1000$ Nm

b) Supposons qu'il existe une résultante unique telle que $OA = d$.

$M_A(\vec{R}) = M_A(\vec{F_1}) + M_A(\vec{F_2}) + M_A(\vec{F_3}) = 0$

$-1000(3-d) + 4\ 000(5-d) - 2\ 000(8-d) = 0$

On obtient $d = 1$. La résultante existe.

EXERCICES À RÉSOUDRE

❑ Déterminer la résultante $\vec{R}$ de $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ agissant sur le palier en A.

Réponse.

$R_x = 23.7$; $R_y = 58{,}3$ daN ; $\alpha_x = 67{,}9°$.

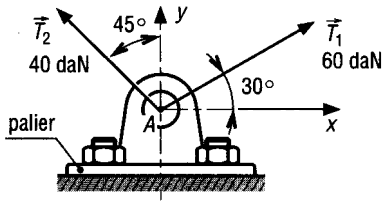


Fig. 9

❑ Le palier à roulement proposé est soumis aux actions $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

a) Calculer les composantes horizontale (x) et verticale (y) des forces $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

b) En déduire la résultante des deux forces.

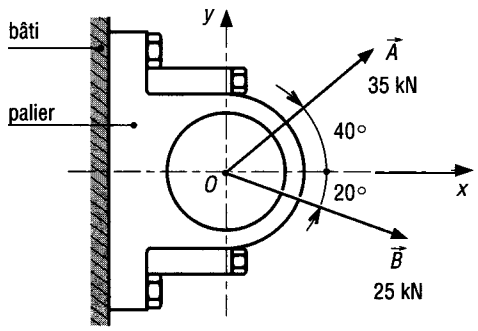


Fig. 10

3 La tension du câble AB est $T_1 = 18{,}5$ kN, celle du câble AC est $T_2 = 13$ kN avec a = 45".

a) Déterminer la résultante $\vec{R}$ de $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$.

b) Pour quelle valeur de a, $\vec{T_2}$ est-elle minimale si $\vec{R}$ conserve la même valeur ?

Réponse

$R_x = 25$ kN ; $R_y = 0$

a=60" T_1 21,7 kN; T_2 =12,5kN.

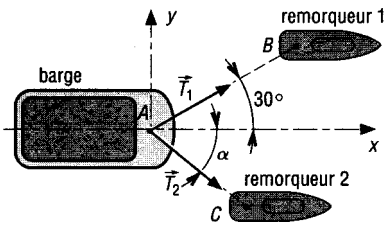


Fig. 11

4 Pour les trois cas proposes, déterminer la résultante des trois forces $\vec{F}$, $\vec{T}$ et $\vec{S}$.

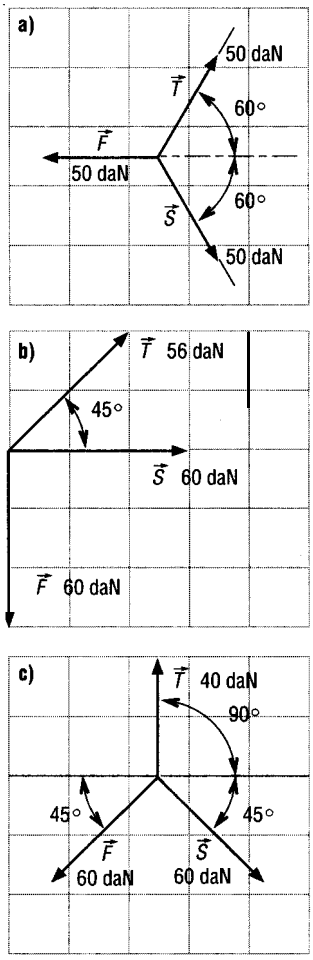


Fig. 12

❑ $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ et $\vec{F_4}$ schématisent les actions exercées par les câbles sur la tête de la vis. Déterminer la résultante des quatre forces.

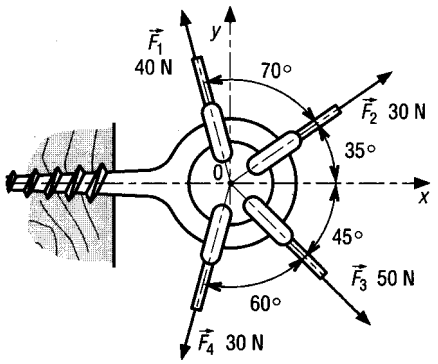


Fig. 13

❑ Les trois barres ci-dessous sont soudées sur le même gousset. $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$ schématisent les actions de tension ou de compression dans les barres. Déterminer $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$ sachant que la résultante des trois forces est nulle.

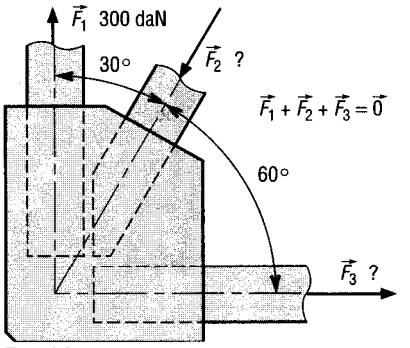


Fig. 14

❑ Les forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$ schématisent les actions exercées par d'autres roues dentées. Déterminer la résultante des trois forces. Quelle est la particularité ? Calculer le moment résultant en 0 des trois forces.

Réponse

R = 0 ; M_0 = 5 074 Nm.

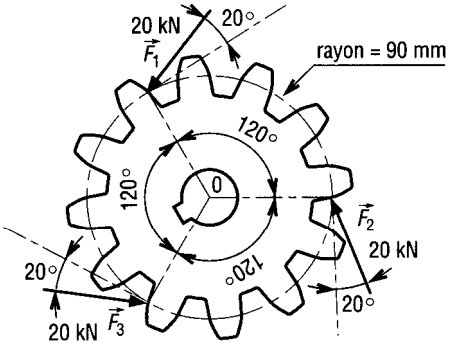


Fig. 15

❑ $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$ schématisent les forces exercées sur la structure en treillis. Déterminer la résultante des trois forces.

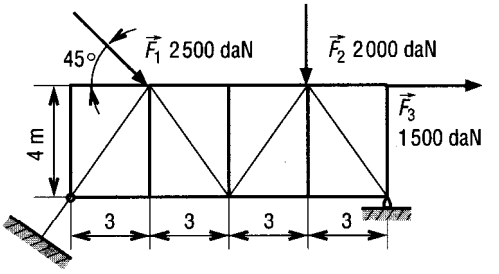


Fig. 16

❑ Les actions $\vec{R_1}$, $\vec{R_2}$ et $\vec{R_3}$ schématisent les actions exercées par les remorqueurs. Déterminer la résultante des trois forces.

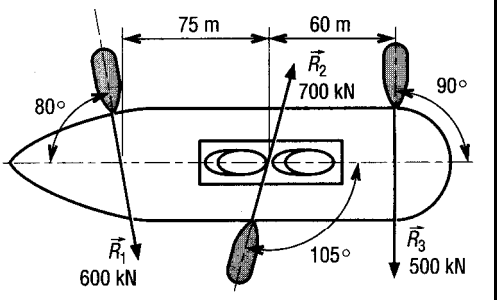


Fig. 17

❑ La force $\vec{F}$ schématise la résultante des actions exercées par le moyeu sur la bague extérieure du roulement. $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ et $\vec{F_4}$ schématisent les forces de compression dans les billes. Déterminer le module des quatre forces sachant que $\vec{F}$ en est aussi la résultante.

Réponse

F_1 = 49,86 daN ; F_2 = 99,73 daN

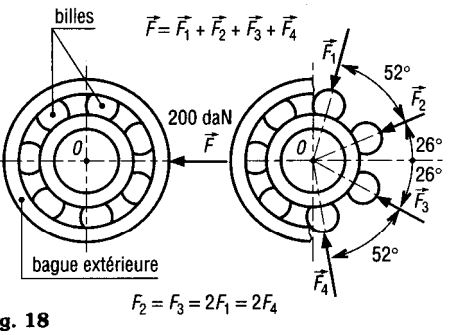


Fig. 18

❑ $\vec{P_1}$ (150 kN) schématise le poids de la partie camion, $\vec{P_2}$ (90 kN) le poids du corps de la grue et $\vec{P_3}$ (70 kN) le poids de la flèche télescopique. Déterminer la résultante des trois forces.

Réponse

R = 310 dR = 1,94 m

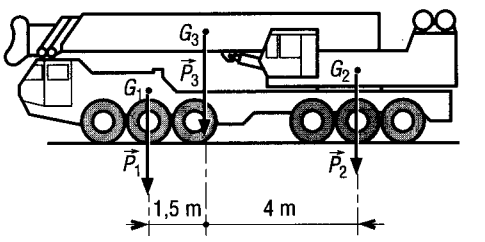


Fig. 19

5 STATIQUE PLANE

OBJECTIFS

- Énoncer le principe fondamental de la statique, le principe des actions mutuelles et le principe de transmissibilité des forces.
- Proposer une méthode de résolution des problèmes de statique.
- Développer la notion fondamentale d'isolement d'un solide.
- Indiquer les principaux cas d'équilibre et les équations correspondantes.
- Fournir une schématisation et une représentation des actions mécaniques.
- Indiquer les principales méthodes de résolution graphique.
- Définir la notion de problème hyperstatique.

En mécanique, la statique a pour objectif l'étude de l'équilibre des corps. On peut la considérer comme une composante particulière de la dynamique ; cependant sur un plan historique ses principes ont été découverts les premiers.

Le cours proposé se divise en trois parties complémentaires : la statique plane (comprenant ce chapitre et les chapitres « treillis » et « frottements »), la statique dans l'espace et la statique par les torseurs d'actions mécaniques.

En statique plane, les actions et les forces étudiées appartiennent toutes à un même plan (« forces coplanaires »). D'emploi universel, celle-ci est particulièrement bien adaptée à la résolution des problèmes faisant intervenir des systèmes articulés avec barres, vérins et composants divers, ainsi que pour des structures de type treillis.

Si les actions ou les forces ont des directions quelconques dans l'espace, se reporter au chapitre « statique dans l'espace ».

S'il est nécessaire de faire une étude détaillée des actions exercées sur les liaisons entre solides, se reporter au chapitre « statique par les torseurs », plus spécialisé en ce domaine.

Remarque : pour ce chapitre, sauf si une extrême précision est exigée, il ne faut pas hésiter à utiliser des méthodes graphiques pour la résolution des exercices. Ces solutions sont en général plus rapides et plus faciles à mettre en œuvre. Plus visuelles, elles permettent aussi de détecter plus rapidement les erreurs éventuelles.

I - Principe fondamental de la statique

1. Énoncé du principe : cas des forces coplanaires

Un solide indéformable en équilibre sous l'action de n forces extérieures ($\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, . . . , $\vec{F_n}$) reste en équilibre si :

1) la somme vectorielle S de toutes les forces extérieures est nulle

$$\vec{S} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \ldots + \vec{F_n} = \vec{0} \qquad (1)$$

2) le moment résultant M, en n'importe quel point I de toutes les forces extérieures est nul

$$M_I = M_I(\vec{F_1}) + M_I(\vec{F_2}) + \ldots + M_I(\vec{F_n}) = 0 \qquad (2)$$

Remarques

- Pour ce chapitre, la notion de moment scalaire ou algébrique est suffisante pour les résolutions. Dans l'espace, il sera nécessaire d'utiliser la notion de vecteur-moment.
- L'énoncé précédent est également vérifié pour des solides dont le mouvement est effectué sans accélération, cas des solides en mouvement de translation rectiligne uniforme.
- Dans le cas d'un ressort, le principe fondamental n'est pas applicable. En effet, le ressort est un corps déformable et sa déformation accumule de l'énergie potentielle. Il faudra, pour les résolutions, tenir compte des forces intérieures au ressort.

2. Principe des actions mutuelles

Pour deux solides 0 et 1 en contact, l'action exercée par le solide 0 sur le solide 1 est égale et opposée à l'action exercée par le solide 1 sur le solide 0.

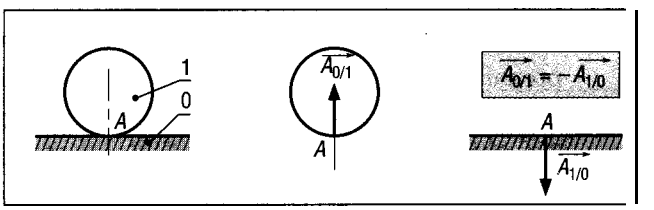


Fig. 1

II - Principe de transmissibilité des forces en statique

L'équilibre, ou le mouvement d'un solide, reste inchangé si une force $\vec{F}$ agissant en un point I est remplacée par une force $\vec{F}$ de même intensité, de même direction et de même sens, agissant en un point M appartenant à la ligne d'action (ou support) de la force $\vec{F}$.

Autrement dit, l'effet d'une force sur un solide dépend uniquement de l'intensité, de la ligne d'action et du sens de la force. Le point d'application sur la ligne d'action ne joue aucun rôle et n'a aucune influence en statique sur l'équilibre des solides, leur mouvement éventuel à vitesse constante et sur les résultats numériques obtenus.

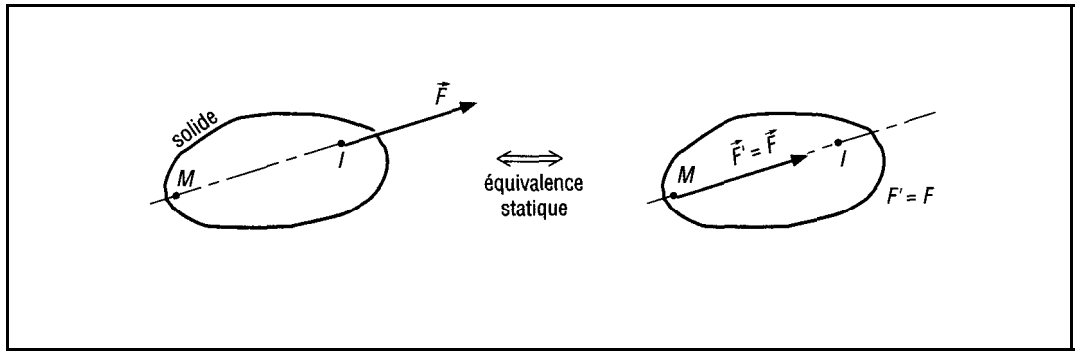


Fig. 2

Remarque : le principe de transmissibilité n'est pas applicable à la résistance des matériaux dans la mesure où le déplacement des forces peut transformer la nature des efforts intérieurs (fig. 3).

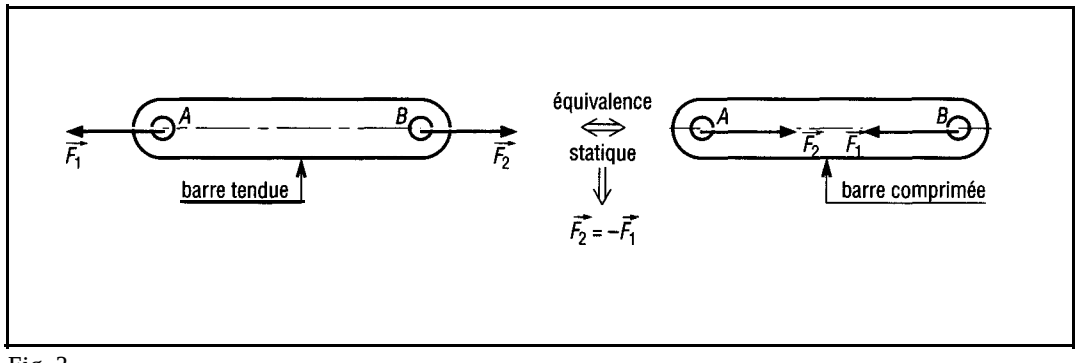


Fig. 3

Exemple : voici une barre tendue sous l'action de deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ appliquées en A et B. Si on applique le principe de transmissibilité en translatant $\vec{F_1}$ en B et $\vec{F_2}$ en A, l'équilibre statique est inchangé : $\vec{F_2} = -\vec{F_1}$ dans les deux cas. Par contre, la barre initialement tendue devient comprimée, ce qui modifie la sollicitation et les critères de résistance à adopter pour des calculs éventuels.

III • Méthode de résolution des problèmes de statique

La méthode générale proposée par l'organigramme figure 4 est applicable à tous les problèmes de statique, qu'ils soient dans le plan, dans l'espace, avec ou sans torseurs.
Une des étapes essentielles concerne l'isolement du solide décrite en détail au paragraphe suivant.
La méthode est généralisable aux ensembles de solide, compte tenu des conditions indiquées au paragraphe V.

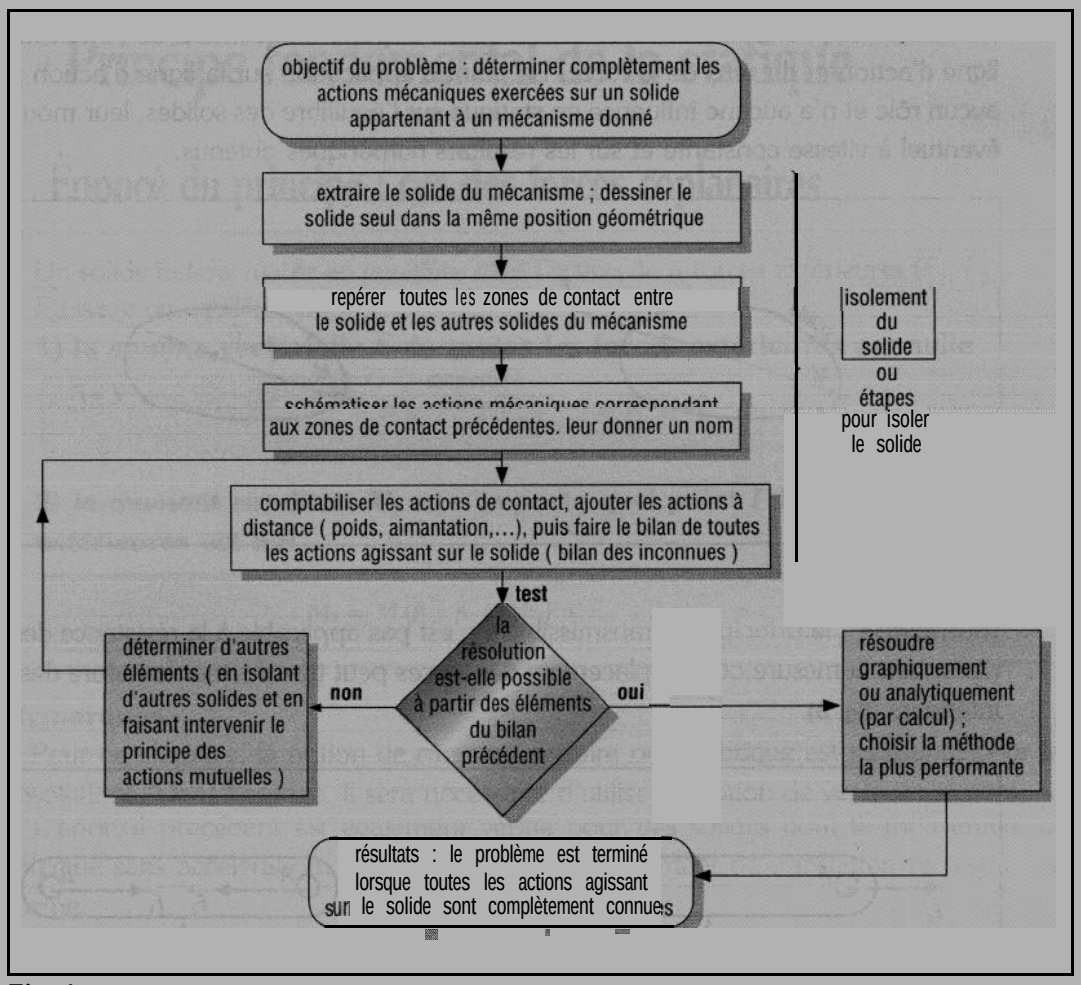


Fig. 4

Remarque : avant d'envisager une résolution, il faut au préalable vérifier que l'étude a un sens. Par exemple : le solide étudié est-il au départ dans une position d'équilibre ?

Exemple 1

La planche du plongeoir n'est pas en équilibre et tourne autour de l'articulation **A.** Le principe ne peut pas être appliqué à cet exemple.

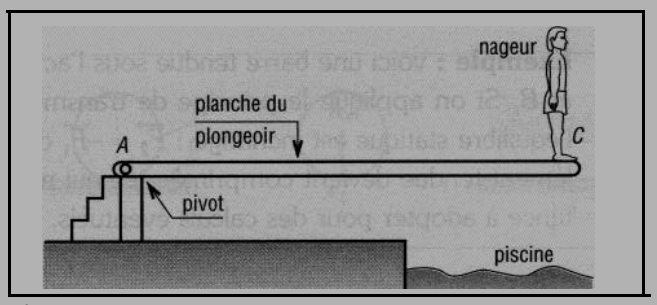


Fig. 5

Exemple 2

La paire de ciseaux 1 + 2 n'est pas en équilibre et se ferme sous l'action des forces $\vec{F}$ et $-\vec{F}$. Le principe fondamental n'est pas applicable alors que, paradoxalement, les équations (1) et (2) de l'énoncé du paragraphe I-l sont vérifiées dans ce cas.

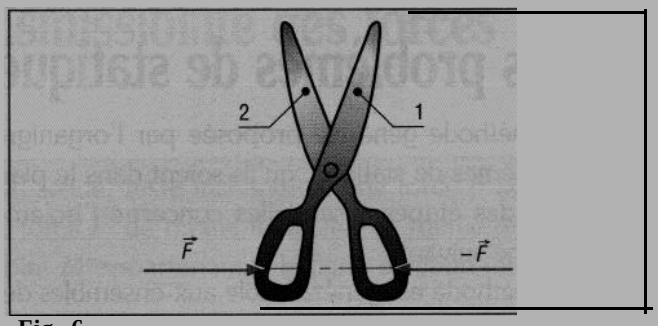


Fig. 6

IV - Isolement d'un solide.

Universellement utilisée, la notion d'isolement d'un solide est fondamentale dans l'analyse et la résolution des problèmes de mécanique. C'est la première étape de toute résolution en statique ou en dynamique.

Le solide isolé peut être un croquis à main levée, un dessin simplifié ou un dessin précis à l'échelle du solide étudié, destiné à décrire et à définir toutes les actions ou efforts qui s'y exercent : poids, actions de contact... Tous les éléments connus concernant les actions extérieures agissant sur le solide isolé doivent être clairement indiqués : direction, intensité, sens, point d'application mais aussi les distances entre les actions et les axes (0, x, y) éventuellement choisis pour des calculs.

Exemple : reprenons le plongeoir du paragraphe précédent, normalement constitué avec un appui supplémentaire en B. Afin de simplifie; le repérage et la désignation des efforts, le nageur est repéré par (2), la planche par (1) et les appuis fies (bords, poteaux divers, etc.) par (0). A est une articulation (pivot) et B un appui simple.

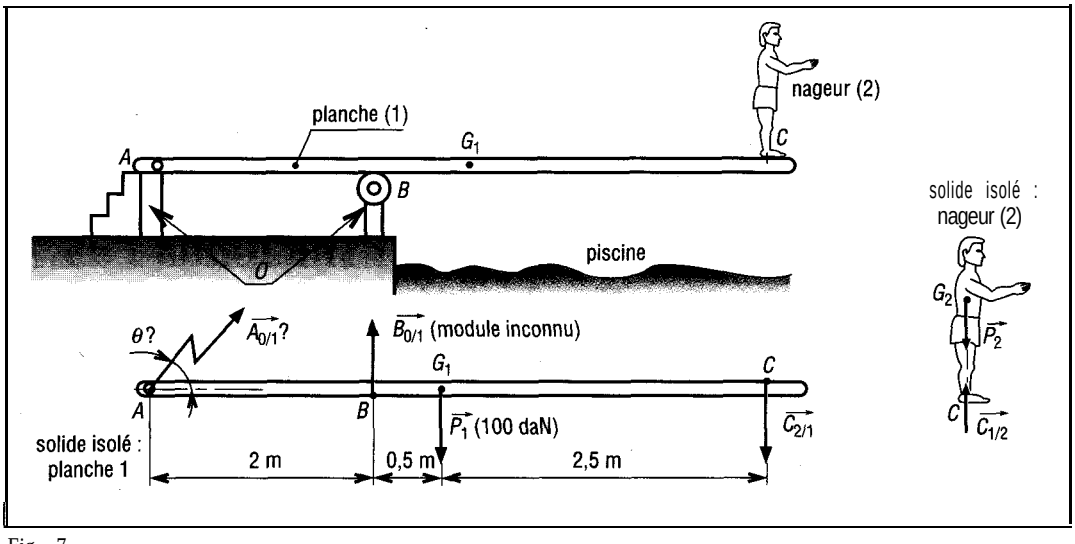


Fig. 7

La planche (1) supporte quatre actions en A, B, C et G_1 (centre de gravité) schématisées par les vecteurs forces A,/;, $\overrightarrow{B_{0/1}}$, $\overrightarrow{C_{2/1}}$ et $\overrightarrow{P_1}$ (poids de la planche).

Le nageur (2) est soumis à deux actions, son poids $\overrightarrow{P_2}$ en G_2 et $\overrightarrow{C_{1/2}}$ en C.

D'après le principe des actions mutuelles : $\overrightarrow{C_{1/2}} = -\overrightarrow{C_{2/1}}$.

Remarque : la schématisation des actions de contact (cas des liaisons en A, B et C) est abordée au paragraphe VII. Afin de simplifier l'analyse et comptabiliser les éléments connus ou inconnus, il peut être intéressant d'utiliser un tableau récapitulatif par solide.

Exemple de tableau pour la planche (1)

La première colonne ($\overrightarrow{F_{ext}}$) comptabilise toutes les actions extérieures agissant sur le solide.

La deuxième colonne (PS) indique le point d'application ou, à défaut, un point de la ligne d'action.

La troisième colonne (D) et la quatrième précisent la direction et l'intensité de l'action.

Solide isolé : planche 1			
$\overrightarrow{F_{ext}}$	PS	D	I (daN)
$\overrightarrow{A_{0/1}}$	A	?	?
$\overrightarrow{B_{0/1}}$	B	verticale	?
$\overrightarrow{P_1}$	G_1	verticale	100 daN
$\overrightarrow{C_{2/1}}$	C	verticale	?

Remarque : chaque case du tableau représente une inconnue possible. Avec des forces concourantes, la résolution ne sera possible qu'avec trois inconnues au plus. Si les forces sont parallèles, il faudra au plus deux inconnues pour aboutir au résultat.

V • Cas des ensembles de solides

Dans le cas des ensembles de solides, les actions mutuelles exercées entre les solides de l'ensemble deviennent des efforts intérieurs et ne doivent pas être comptabilisées dans le nombre des actions extérieures. Le principe fondamental s'applique de la même manière.

Exemple : isolons l'ensemble planche + nageur de l'exemple du paragraphe précédent. L'ensemble 1 + 2 supporte 4 actions extérieures : $\overrightarrow{A_{0/1}}, \overrightarrow{B_{0/1}}, \overrightarrow{P_1}$ et $\overrightarrow{P_2}$. Les actions mutuelles $\overrightarrow{C_{1/2}}$ et $\overrightarrow{C_{2/1}}$ deviennent des efforts intérieurs et ne sont pas prises en compte dans le bilan des actions extérieures et dans l'application du principe fondamental.

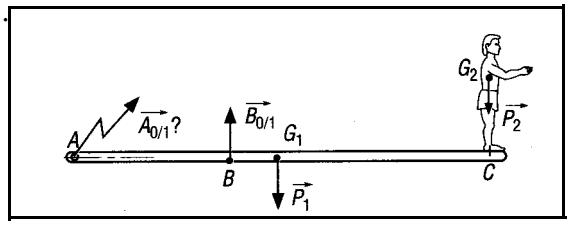


Fig. 8

VI - Équations d'équilibre - Principaux cas

Après isolement du solide et réalisation du bilan des inconnues, l'application du principe fondamental conduit à des résolutions que l'on peut regrouper par famille.

1. Solide soumis à l'action de deux forces

Les deux forces ont même support ou même ligne d'action, même intensité, mais sont de sens opposés.

Un solide soumis à l'action de deux forces reste en équilibre si les deux forces sont égales et opposées.

Exemples : l'équilibre du nageur du paragraphe IV donne $\overrightarrow{C_{1/2}} = -\overrightarrow{P_2}$, direction commune, la verticale passant par G,. Les cas (a) et (b) de la figure 9 montrent des cas d'équilibre sous l'action de deux forces. Dans le cas (c), l'équation de moment n'est pas vérifiée et il n'y a pas équilibre (le solide tourne dans le sens trigonométrique).

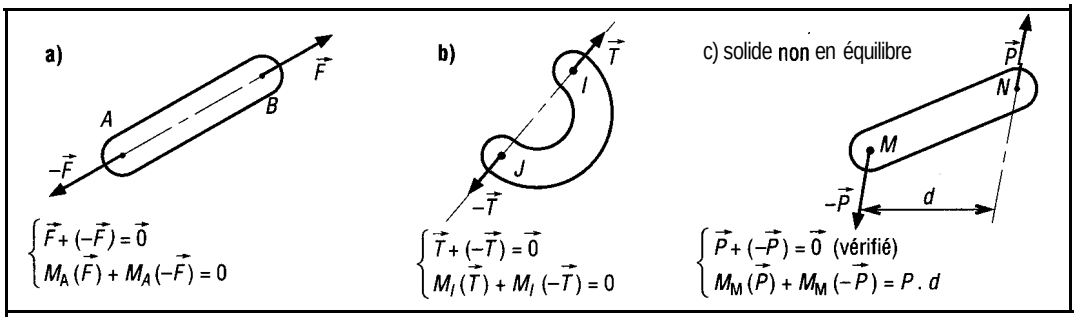


Fig. 9

2, Solide soumis à l'action de trois forces concourantes

Un solide soumis à l'action de trois forces reste en équilibre si les trois forces sont concourantes au même point et si la somme vectorielle des trois forces est nulle.

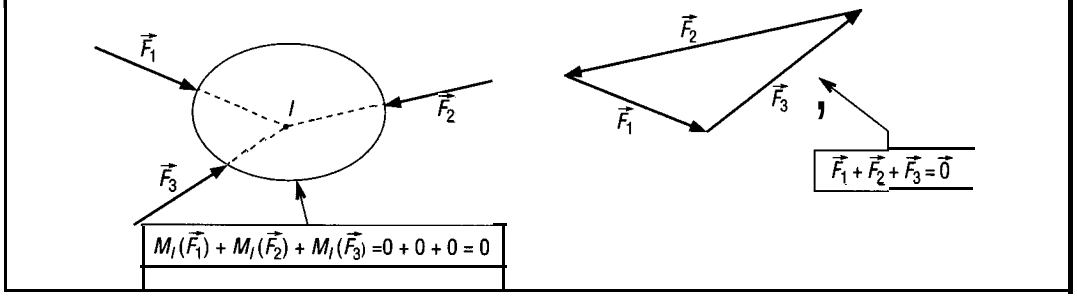


Fig. 10

3. cas général

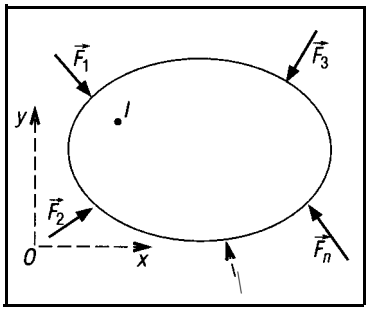


Fig. 11

a) $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \ldots + \vec{F_n} = \vec{0} = \Sigma \vec{F_i}$ donne deux équations scalaires de projection sur les axes x et y.

$\Sigma F_i x = F_1 x + F_2 x + \ldots + F_n x = 0$ (1)

$\Sigma F_i y = F_1 y + F_2 y + \ldots + F_n y = 0$ (2)

b) L'équation de moment en n'importe quel point I fournit une troisième équation scalaire :

$\Sigma M_I(\vec{F_i}) = M_I(\vec{F_1}) + M_I(\vec{F_2}) + \ldots + M_I(\vec{F_n}) = 0$ (3)

Remarque : les coordonnées cartésiennes $F_i x$ et $F_i y$ de $\vec{F_i}$ représentent chacune une inconnue. Les équations disponibles permettront de déterminer au plus trois inconnues (pour trois équations à trois inconnues).

Équations alternatives : afin de simplifier les solutions calculées, il peut être avantageux d'utiliser deux équations de moment avec une seule équation de projection ou encore trois équations de moment à la place des équations initiales (voir tableau). L'emploi des équations de moment limite ou supprime les difficultés de projection sur des axes orthonormés.

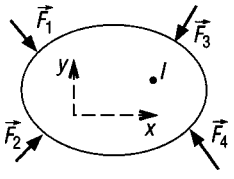
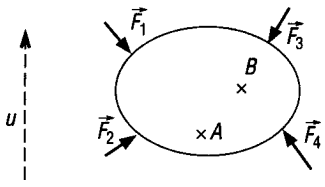
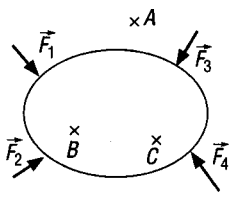
Équations d'équilibre possibles		
Cas général	Équations alternatives possibles	
		
$\Sigma F_{ix} = 0$ $\Sigma F_{iy} = 0$ $\Sigma M_I(\vec{F_i}) = 0$	$\Sigma F_{iu} = 0$ $\Sigma M_A = 0$ $\Sigma M_B = 0$ AB non perpendiculaire à (u)	$\Sigma M_A(\vec{F_i}) = 0$ $\Sigma M_B(\vec{F_i}) = 0$ $\Sigma M_C(\vec{F_i}) = 0$ A, B et C non alignés

Fig. 12

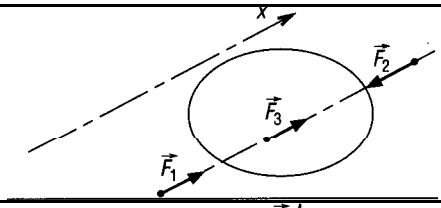
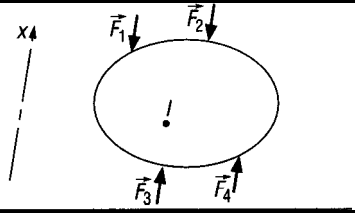
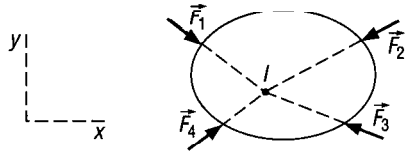
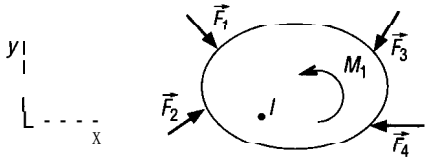
Principaux cas d'équilibre	Solide isolé	Équations indépendantes	Nombre d'inconnues déterminables
Forces colinéaires		$\Sigma F_{ix} = 0$	1
Forces parallèles		$\Sigma F_{ix} = 0$ $\Sigma M_I(F_i) = 0$	2
Forces concourantes (même point)		$\Sigma F_{ix} = 0$ $\Sigma F_{iy} = 0$ $(\Sigma M_I(\vec{F_i}) = 0)$	2* (3)
Cas général		$\Sigma F_{ix} = 0$ $\Sigma F_{iy} = 0$ $\Sigma M_I(F_i) = 0$	3

Fig. 13 * Deux inconnues à condition que les directions des $\vec{F_i}$ soient connues.

VII • Schématisation et représentation des actions mécaniques

Les actions mécaniques représentent les efforts exercés sur et entre les solides réels. Ces actions sont schématisées ou modélisées par des forces, moments, couples, pressions, contraintes, torseurs, etc. On peut les diviser en deux grandes familles : les actions à distance et les actions de contact (les plus nombreuses et les plus diverses).

1. Actions mécaniques à distance

Elles sont essentiellement de deux types : poids et aimantation.

Rappels sur le vecteur-poids

Le poids d'un solide peut être représenté par un vecteur-force $\vec{P}$ appelé vecteur-poids et ayant les caractéristiques suivantes :

– Point d'application : G le centre de gravité du corps.

– Direction : la verticale passant par G.

– Sens : vers le bas.

– Intensité ou module : $\boxed{P = m.g}$ avec

P = poids en Newton

m = masse du solide en kilogramme

$g = 9{,}81\ m.s^{-2}$ = accélération de la pesanteur ou attraction terrestre.

Remarque : la valeur de l'accélération de la pesanteur g est fonction de la latitude sur le globe terrestre (voir graphe ci-dessous) et de l'altitude.

Variation de g avec l'altitude (h)

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

g_0 = 9,81 m.s^{-2}
R = rayon de la Terre (≃) 6378 km
h = altitude

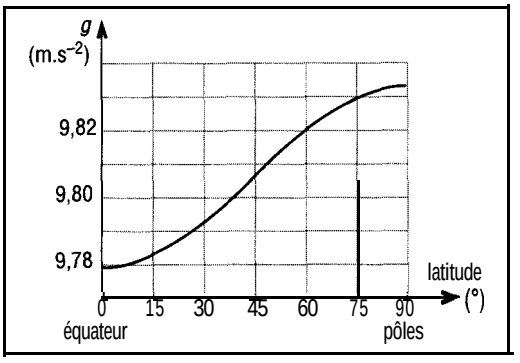


Fig. 14

2. Actions mécaniques de contact

Les actions de contact se divisent en trois groupes :
- les actions ou charges concentrées,
- les actions réparties sur une ligne ou charges linéiques,
- les actions réparties sur une surface ou charges surfaciques.

a) Actions ou charges concentrées

Chaque fois que l'effort de contact est concentré en un point ou sur une toute petite surface, l'action est schématisée par un vecteur-force. Unités : N ou dérivés (daN, kN, etc.).

Exemple : action exercée par un plan horizontal (0) sur une bille (1). L'effort de contact est concentré au point A et est schématisé par le vecteur-force $\overrightarrow{A_{0/1}}$ perpendiculaire au plan (0) et passant par le centre de gravité de la bille.

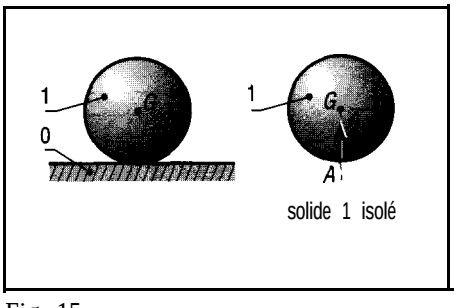


Fig. 15

b) Actions réparties sur une ligne ou charges linéiques

L'effort de contact est réparti sur une ligne droite ou non. L'action exercée est schématisée par une charge linéique (q), uniforme ou non. Unités : N.m^{-1} ou N/m.

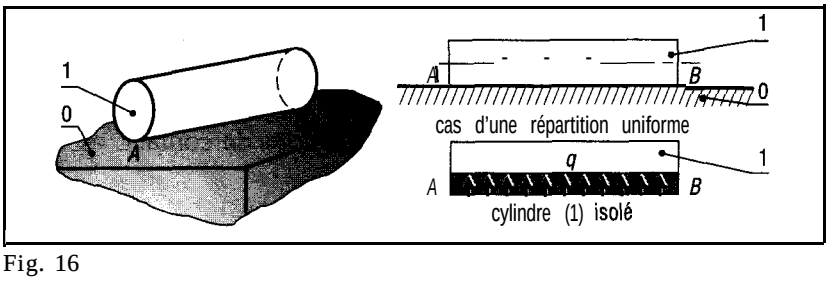


Fig. 16

Exemple

Action exercée par un plan horizontal (0) sur un cylindre (1). L'effort de contact est réparti de façon uniforme (q constant) le long de AB et schématisé par une charge linéique q (N.m^{-1}). Dans le but de simplifier les résolutions, la charge répartie peut être remplacée par sa résultante R, au milieu de AB et d'intensité : $R = qL$.

Remarque : ici, q est égal au poids du cylindre divisé par la longueur AB :

$$\left(q = \frac{mg}{L}\right) \quad ; \quad \vec{R} = -\overrightarrow{mg}$$

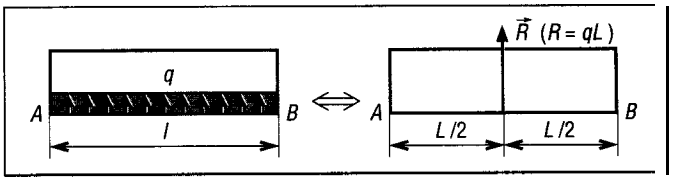


Fig. 17

c) Actions réparties sur une surface ou pression de contact

Lorsque l'effort de contact est réparti sur une surface, l'action exercée est schématisée par une pression de contact ou une pression (p) qui peut être uniforme ou non.
Unités : Pa $(N.m^{-2})$, bar (1 bar = 10^5 Pa).

Exemple 1 : action exercée par un fluide sous pression sur un piston de vérin.

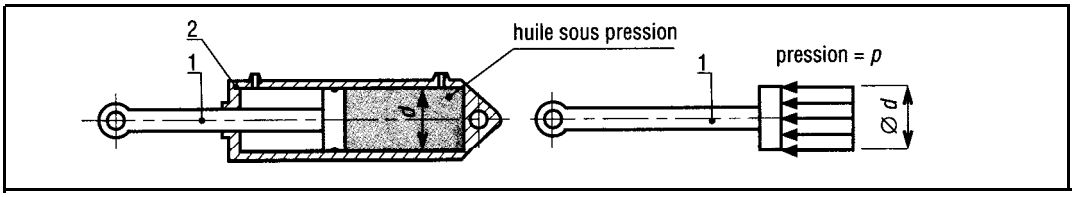


Fig. **18**

L'effort de contact entre huile et piston est réparti de façon uniforme sur une surface circulaire de diamètre d et est schématisé par la pression p qui est la pression du fluide. Dans le but de simplifier les résolutions, cette action peut être remplacée par sa résultante $\vec{R}$, dirigée suivant l'axe du piston et d'intensité $R = pS = p\pi d^2/4$.

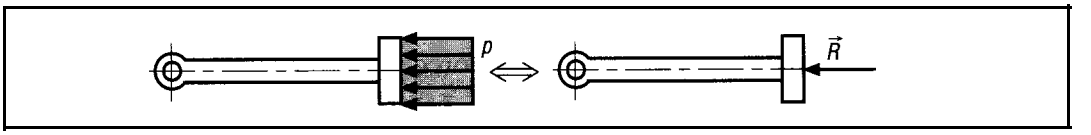


Fig. 19

Exemple 2 : action d'un plan horizontal (0) sur un prisme triangulaire (1).

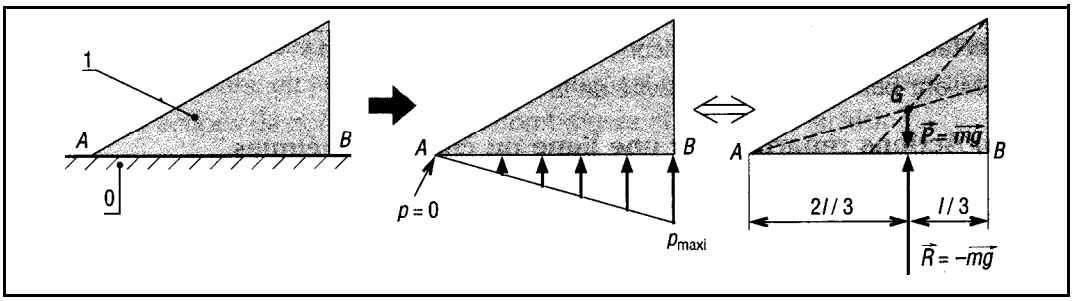


Fig. 20

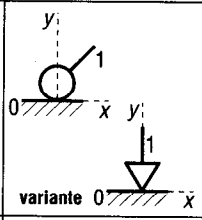
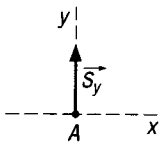
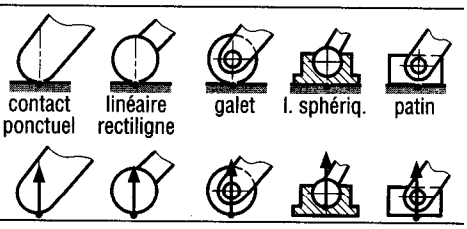
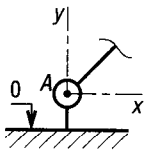
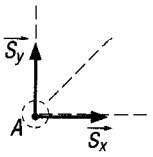
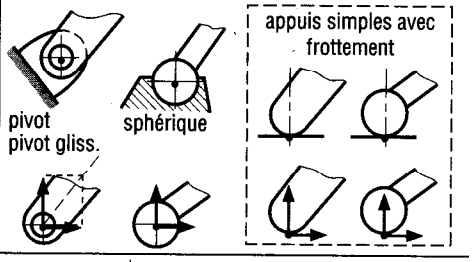
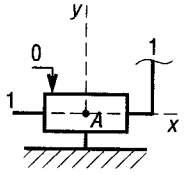
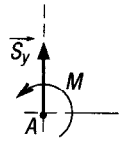
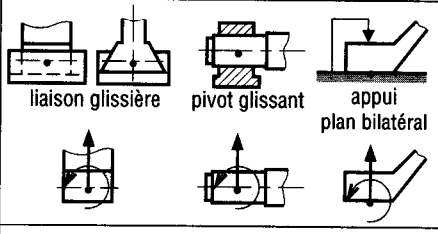
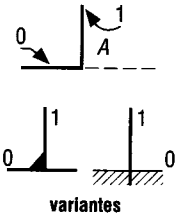
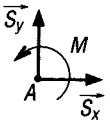
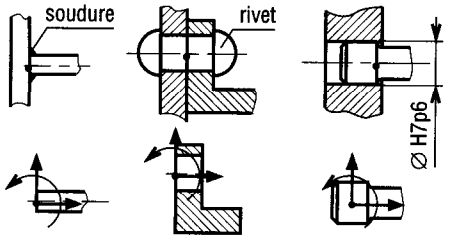
Dans ce cas, la pression de contact est linéairement croissante en allant de A $(p = 0)$ à B $(p = p_{maxi})$. R, résultante des pressions de contact, est égale à ***mg.***

3. Actions de contact exercées dans les liaisons mécaniques usuelles

En statique plane, les liaisons entre solides se ramènent à quatre familles principales : appui simple, articulation ou pivot, glissière, encastrement.

Chaque famille peut supporter ou transmettre des efforts différents **(fig. 21)**.

L'action exercée par les surfaces de liaison des solides (0 et 1) en contact est schématisée par une résultante $\vec{S}$ (coordonnées S_x et S,) et un moment résultant éventuel M.

Type de la liaison	Schématisation usuelle	Action de contact entre 0 et 1	Exemples
Appui simple (1 inconnue)			
Articulation ou pivot (2 inconnues)			
Glissière (2 inconnues)			
Encastrement (3 inconnues)			

Remarques

Le choix d'une schématisation ou d'une autre est fonction des interprétations que l'on peut faire à partir de la liaison réelle. Par exemple, il est fréquent qu'une liaison de type glissière soit aussi schématisée par un appui simple, le moment M étant supprimé ou négligé. De même, le fait de négliger ou non les frottements influe sur les interprétations possibles. Si une étude plus détaillée est nécessaire, se reporter au chapitre " statique par les torseurs ".

VIII • Méthodes de résolution graphique

Les méthodes graphiques sont, pour le plus grand nombre d'individus, les plus faciles à mettre en œuvre et celles qui amènent le moins d'erreurs dans les résolutions d'exercices. Cependant, elles exigent des figures tracées à une échelle donnée ou choisie et un minimum de soin doit être apporté aux tracés pour obtenir des résultats précis.

1. Cas d'un solide soumis à trois forces concourantes

Les trois forces $(\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3})$ doivent être concourantes au même point (I) et la somme des trois forces doit être nulle : $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{0}$. Plaçons-nous dans le cas le plus général avec trois inconnues au départ : une direction (celle de $\vec{F_3}$) et deux modules (ceux de $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$). L'ordre des constructions est indiqué sur la figure 22 et la figure 24.

Remarque 1 : les directions du triangle des forces doivent être parfaitement parallèles à celles de la figure initiale ayant servi à déterminer le point I. Il est indispensable de choisir une échelle pour tracer $\vec{F_1}$ sur le triangle des forces (exemple : 1 cm pour 1 000 N, etc.) ; les modules de $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$ seront mesurés à partir de cette même échelle. L'extrémité de chaque force coïncide avec l'origine de la force suivante.

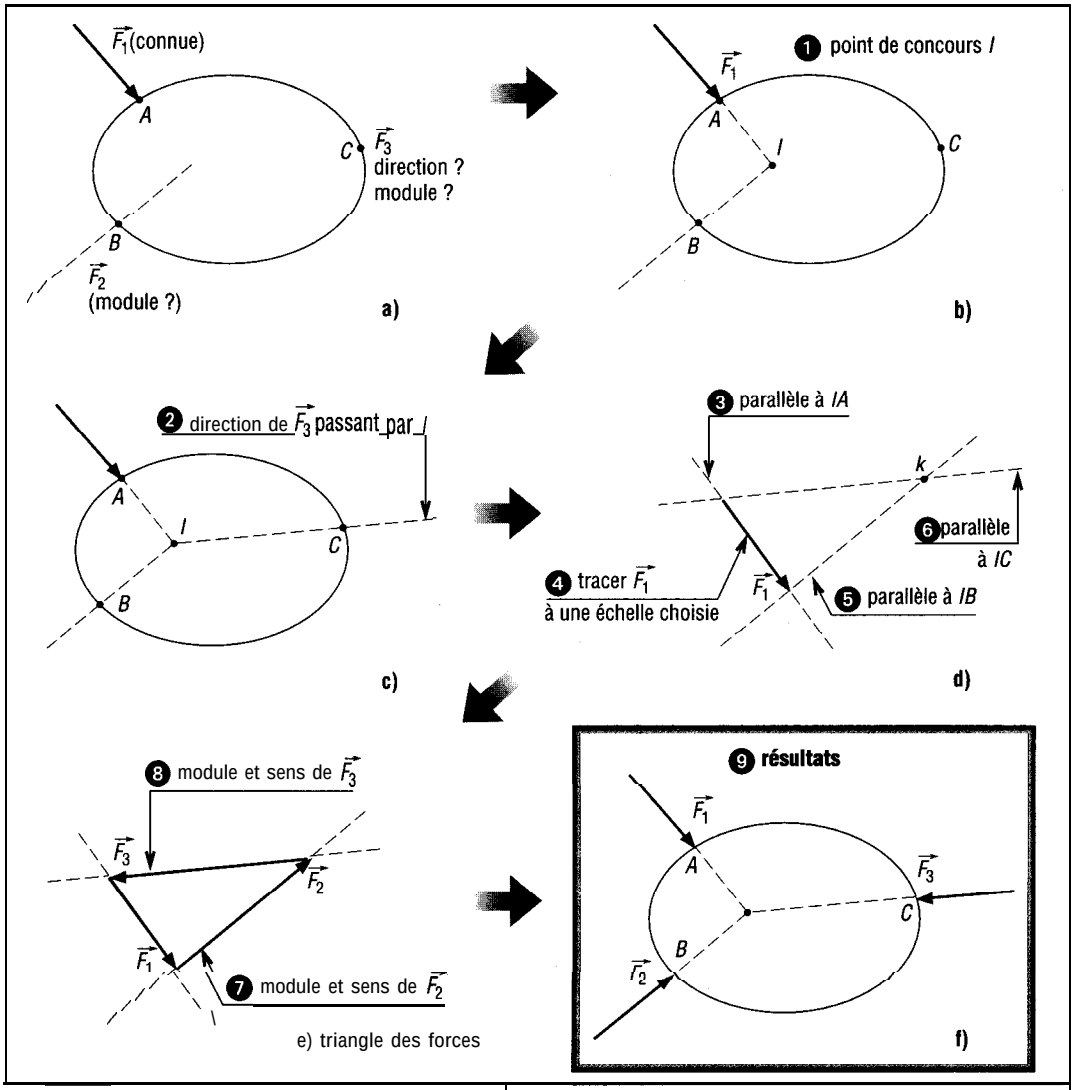


Fig. 22

Remarque 2 : il existe toujours deux possibilités pour tracer le triangle des forces ; voir figure 23, l'ensemble des deux forme un parallélogramme. La méthode de travail est résumée dans l'organigramme figure 24.

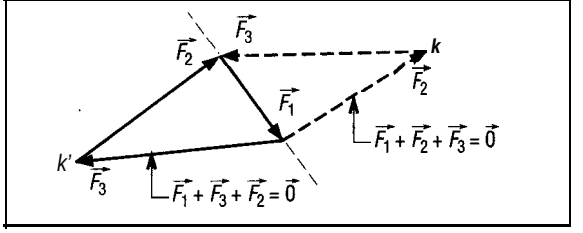


Fig. 23

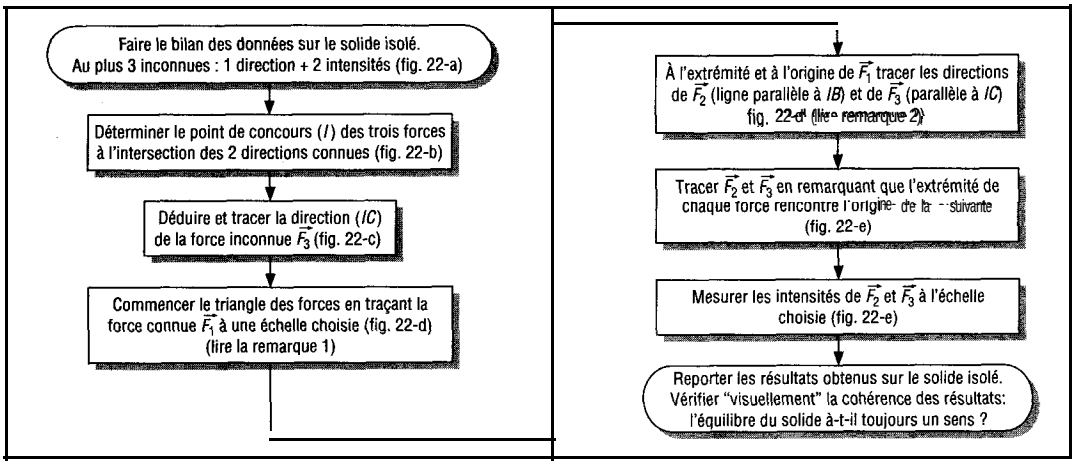


Fig. 24

2. Solides soumis à l'action de quatre forces et plus

Si les forces ne sont pas parallèles, le nombre maximal d'inconnues déterminables, pour chaque équilibre étudié, est de trois. Au-delà, la résolution n'est pas possible ou ne peut être que partielle. Deux cas principaux se présentent, chacun amenant des résolutions graphiques différents : une direction et deux modules inconnus ou trois modules inconnus.

a) Cas d'une direction et deux modules inconnus

Sur les quatre forces, deux présentent des éléments inconnus et les deux autres (ou plus) sont complètement connues.

Méthode de résolution : déterminer la résultante de toutes les forces connues (voir chapitre "forces et résultantes" et le paragraphe 3) afin de se ramener à trois forces concourantes et au cas de résolution du paragraphe 1.

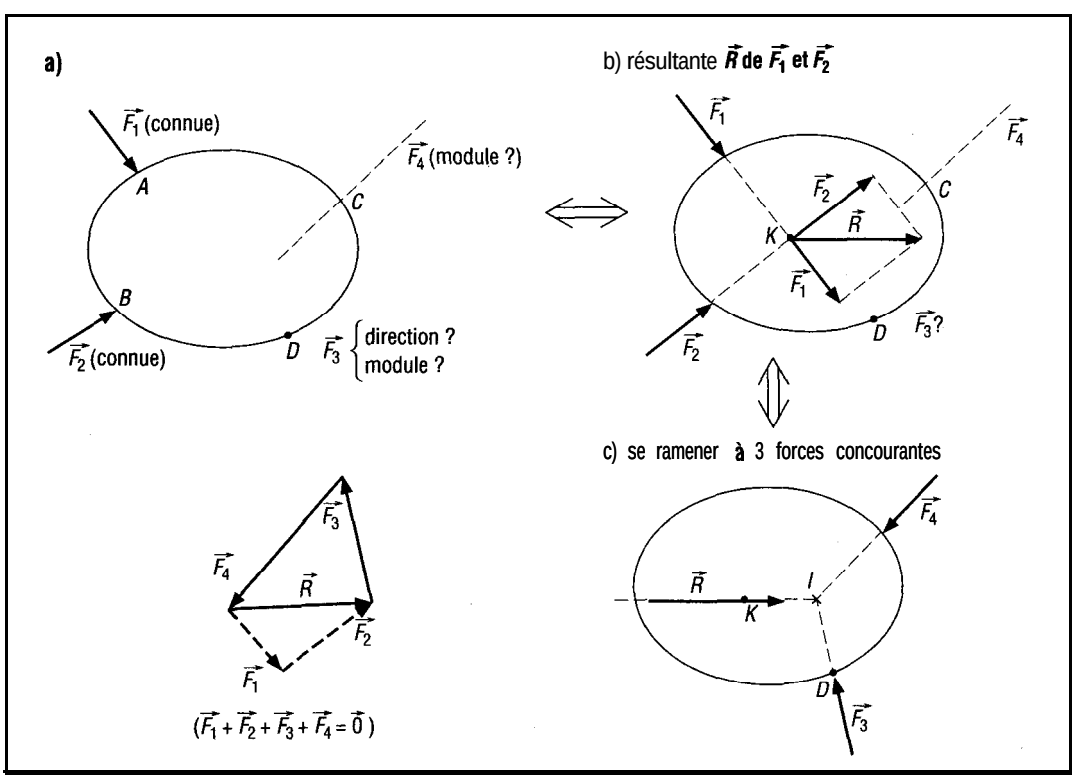


Fig. 25

b) Cas de trois modules inconnus (méthode de Culman)

Toutes les directions des forces sont connues, une seule force sur les quatre est complètement connue.

Méthode de résolution : mettre les quatre forces en deux groupes de deux forces concourantes (points de concours I et J) afin de se ramener à deux résultantes $\vec{R_1}$ et $\vec{R_2}$ égales et opposées, ayant même ligne d'action IJ.

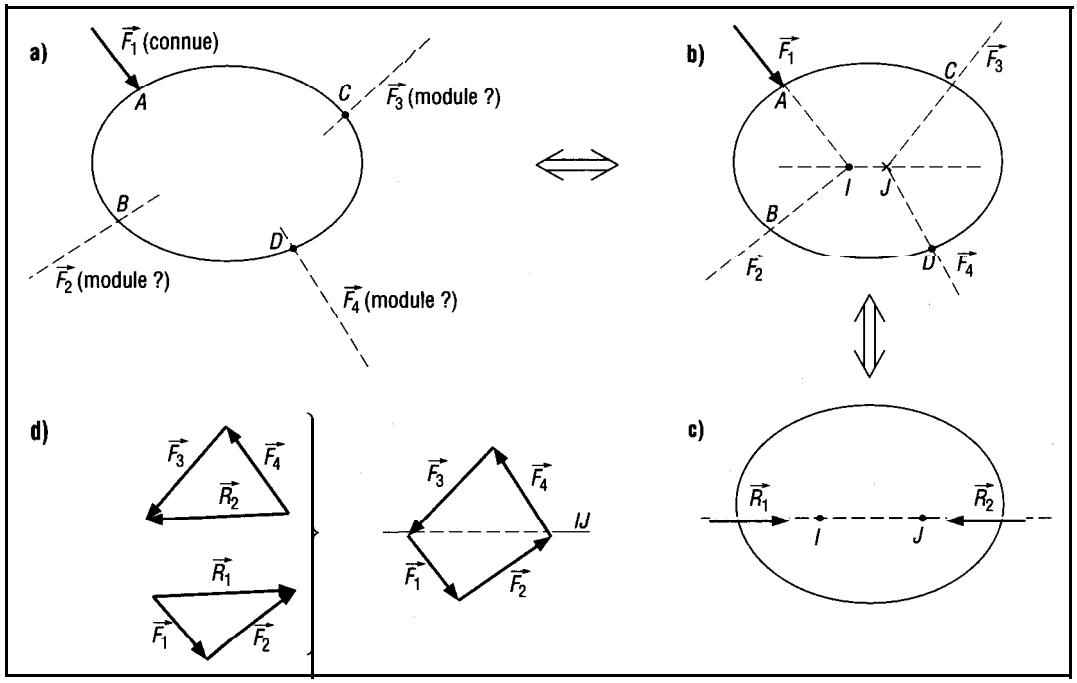


Fig. 26

$\vec{R_1} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$; $\vec{R_1}$ résultante de $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ passe par le point 1.
$\vec{R_2} = \vec{F_3} + \vec{F_4}$; $\vec{R_2}$ résultante de $\vec{F_3}$ et $\vec{F_4}$ passe par le point J.
$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = (\vec{F_1} + \vec{F_2}) + (\vec{F_3} + \vec{F_4}) = \vec{R_1} + \vec{R_2} = \vec{0}$ ou $\vec{R_1} = -\vec{R_2}$.

On revient au cas d'un solide soumis à deux forces égales et opposées, IJ est la ligne d'action obligatoire de $\vec{R_1}$ et $\vec{R_2}$. Les modules inconnus sont déterminés à partir des triangles des forces $(\vec{R_1}, \vec{F_1}, \vec{F_2})$ et $(\vec{R_2}, \vec{F_3}, \vec{F_4})$ ou par le quadrilatère des forces $(IJ, \vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \vec{F_4})$.

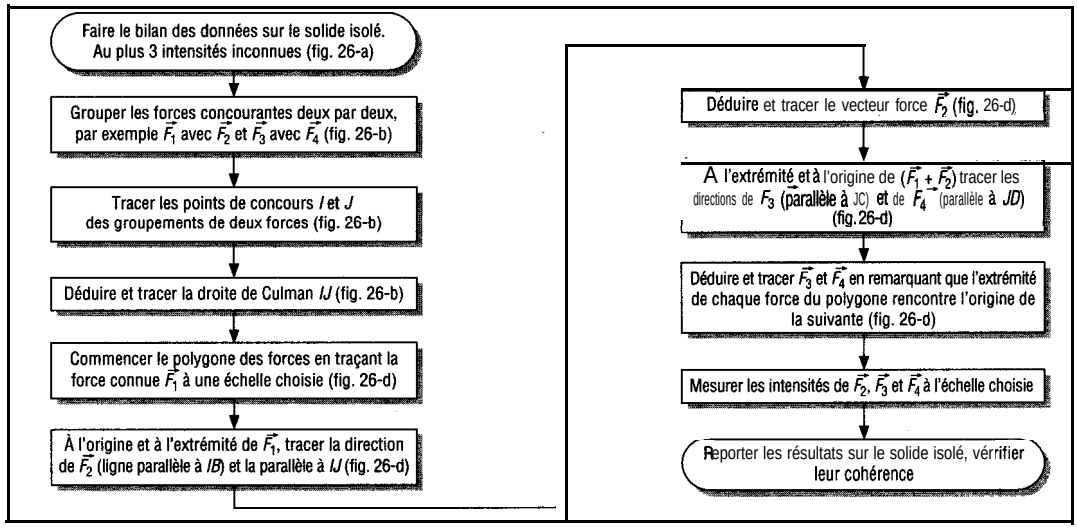


Fig. 27

3. Statique graphique • Méthode du dynamique et du funiculaire

Cette méthode, intéressante dès que les forces à manipuler sont nombreuses, permet de déterminer des résultantes et résoudre des problèmes d'équilibre, avec des forces parallèles ou concourantes. La méthode est purement graphique.

a) Résultante d'un système de forces

Exemple : déterminons la résultante $\vec{R}$ des actions $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ exercées par trois remorqueurs (l-Z-3) sur un paquebot (4).

Les constructions graphiques sont effectuées en alternance sur le funiculaire (figure définissant la position géométrique des forces) et sur le dynamique ou polygone des forces (figure définissant les intensités des forces).

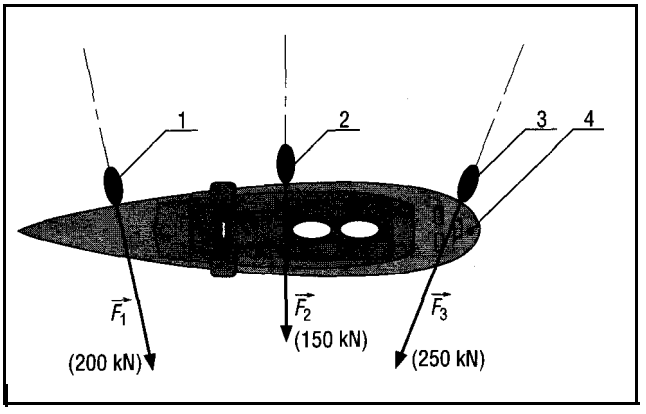


Fig. 28

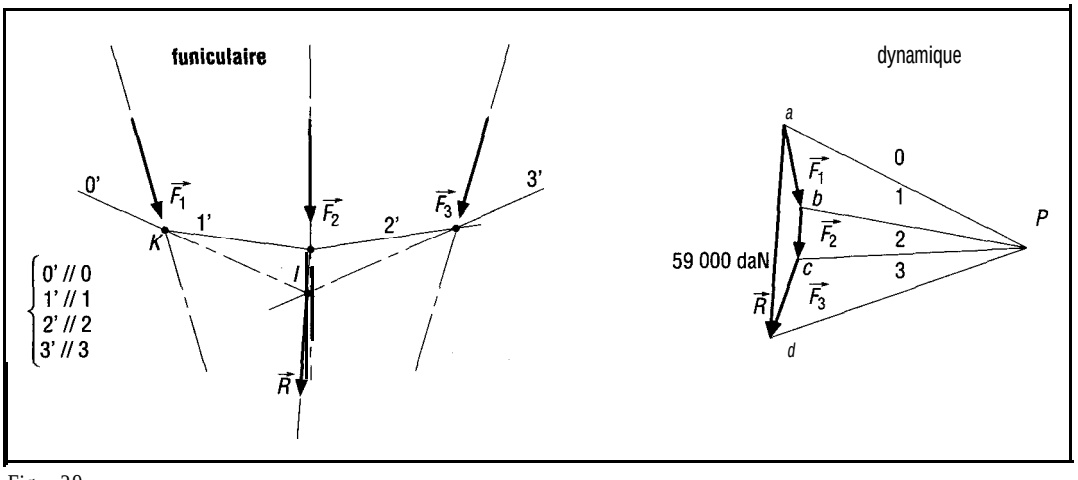


Fig. 29

Ordre des tracés

• Sur le dynamique :

- Choisir une échelle pour tracer les forces (exemple : 1 cm pour 50 kN).
- Tracer $\vec{F_1} = \vec{ab}$ (200 kN) ; $\vec{F_2} = \vec{bc}$ (150 kN) ; $\vec{F_3} = \vec{cd}$ (250 kN).
- Déduire la direction (droite *ad)* de la résultante $\vec{R}$ et son intensité : $\vec{R} = \vec{ad}$ (590 kN mesuré).
- Choisir un point P appelé pôle (la position n'a pas d'importance, éviter d'être trop près des forces).
- Tracer les rayons polaires Pa, Pb, Pc et Pd et les numéroter (0, 1, 2 et 3).

• Sur le funiculaire :

- Tracer les côtés du funiculaire 0', 1', 2', 3' tels que 0' soit parallèle au côté 0 du dynamique, 1' parallèle à 1, 2' à 2 et 3' à 3. 0' et 1' se coupent en K, etc.
- Déterminer I point de concours des côtés extrêmes du funiculaire, I est situé à l'intersection de 0' et 3'.
- La résultante $\vec{R}$ passe par I, sa ligne d'action est parallèle à $\vec{ad}$.

Remarques : il y a parallélisme entre les forces des deux figures :
$\overrightarrow{F_1}$ sur le funiculaire est parallèle à $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{ab}$ sur le dynamique, etc.
0' et 1' se coupent en K sur $\overrightarrow{F_1}$, par correspondance 0 et 1 limitent $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{ab}$ sur le dynamique, etc. La position ou le choix de K sur $\overrightarrow{F_1}$ est sans importance.

b) Étude de l'équilibre d'un solide sous l'action de forces parallèles

Exemple : pour la voiture de collection proposée, déterminons les actions $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ exercées par le sol sur les roues en A et B. On se place dans le plan de symétrie du véhicule. $\overrightarrow{P}$ est le poids de celui-ci, le sol est supposé horizontal et $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont parallèles.

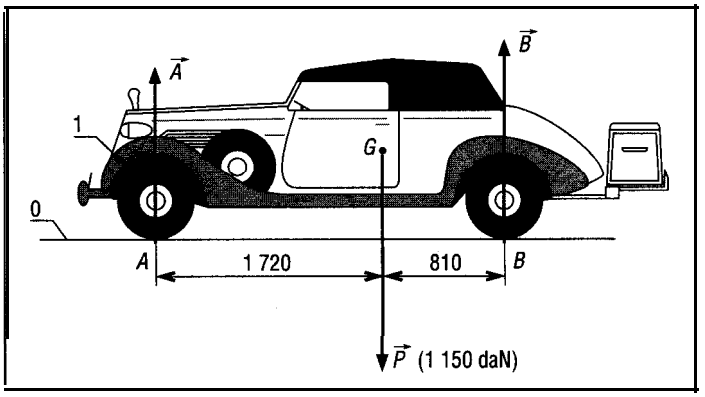


Fig. 30

Ordre des tracés

- Commencer le dynamique : choisir une échelle des forces (exemple : 1 cm pour 100 daN) ; tracer $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{ab}$ (1 150 daN) ; choisir un pôle S ; tracer les côtés Sa(1) et Sb(2).
- Commencer le funiculaire : tracer 1' parallèle à 1 et 2' parallèle à 2 se coupant sur $\overrightarrow{P}$.

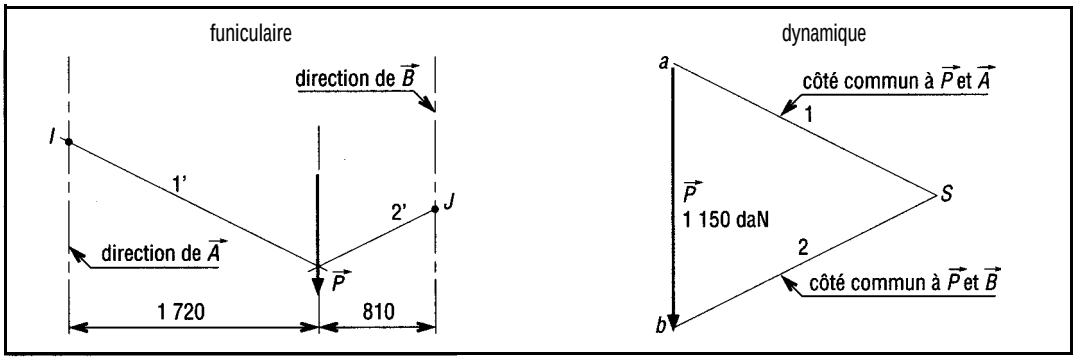


Fig. 31

Propriété : pour tout solide en équilibre, les côtés extrêmes du funiculaire sont confondus ; la droite commune est appelée ligne de fermeture. Le funiculaire est dit fermé.

Remarque 1 : si sur le dynamique les forces respectent l'ordre $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{ca}$, $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{bc}$ avec $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{B} = \overrightarrow{ca} + \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{0}$, le point c est situé sur $\overrightarrow{P}$ entre a et b et Sc est le rayon polaire parallèle à la ligne de fermeture qui ne peut être que la droite IJ.

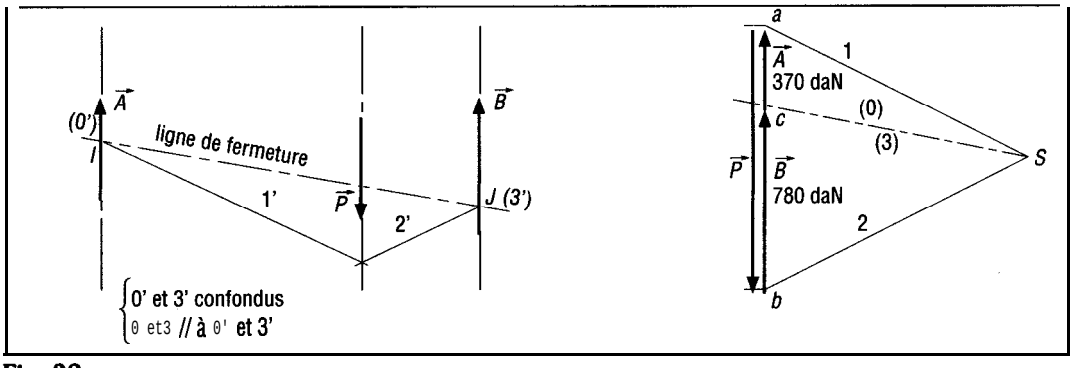


Fig. 32

Les côtés extrêmes (0' et 3') du funiculaire sont confondus avec la ligne de fermeture IJ. Par correspondance, les rayons polaires (0 et 3) sont confondus avec Sc.

Remarque 2 : sur le dynamique, les actions situées entre deux rayons polaires (0 et 1), (1 et 2), (2 et 3) sont celles qui, sur le funiculaire, sont situées à l'intersection des lignes portant les repères équivalents (0' et 1'), (1' et 2'), (2' et 3').

c) Étude de l'équilibre d'un solide sous l'action de forces concourantes

Exemple : une poutre, articulée en A et en appui simple en B, supporte une charge inclinée de 2 600 daN en C. Déterminer les actions $\vec{A}$ et $\vec{B}$ exercées par les appuis en A et B.

Remarque : la méthode est analogue à celle du paragraphe précédent. Pour réussir la construction du funiculaire, il faut impérativement faire passer la ligne de fermeture par le point d'application A, seul point connu de la direction de $\vec{A}$.

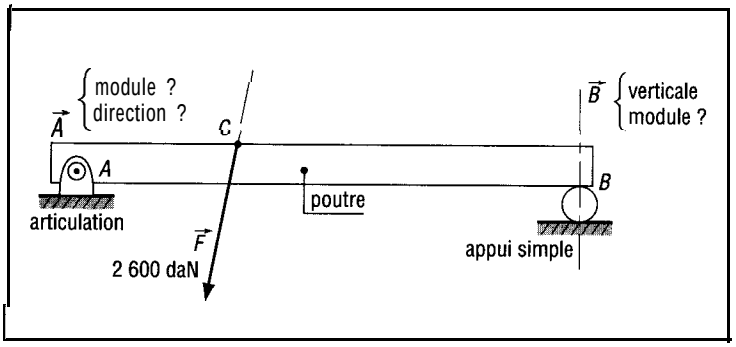


Fig. 33

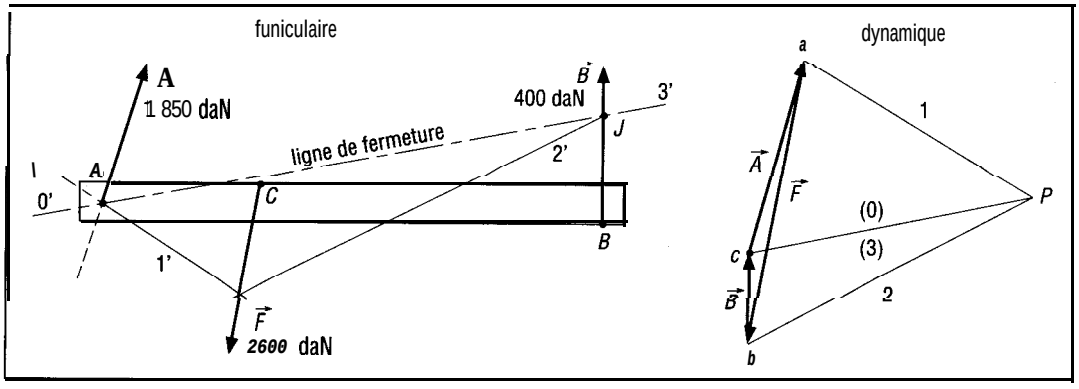


Fig. 34

Ordre des constructions

Choix d'une échelle des forces (exemple : 1 cm pour 200 daN) ; $\vec{F} = \vec{ab}$; pôle P ; rayons polaires Pa (1) et Pb (2) ; direction de $\vec{B}$ à partir de b ; 1' parallèle à 1 passant par A ; 2' parallèle à 2 ; ligne de fermeture AJ ; rayon Pc (0 ou 3) parallèle à AJ ; point c, intersection de la direction de $\vec{B}$ avec Pc ; forces $\vec{B} = \vec{bc}$ et $\vec{A} = \vec{ca}$.
Mesure des forces à l'échelle choisie : A = 1 850 daN et B = 400 daN.

IX • Problèmes hyperstatiques

Un solide, ou un ensemble de solides, qui possède des appuis ou des liaisons surabondantes par rapport à ce qui est strictement nécessaire au maintien de l'équilibre, est dit statiquement indéterminable ou hyperstatique.
Pour ces cas, les actions exercées ne peuvent pas être déterminées à partir des seules équations de la statique.

Exemple 1 : la poutre (ABC) est en appui sur trois articulations fixes A, B et C qui donnent au total six inconnues statiques : A_x, A_y, B_y, B_x, C_x, C_y. On ne dispose que de trois équations pour la résolution, le système est dit hyperstatique d'ordre 3 (6 – 3 = 3).

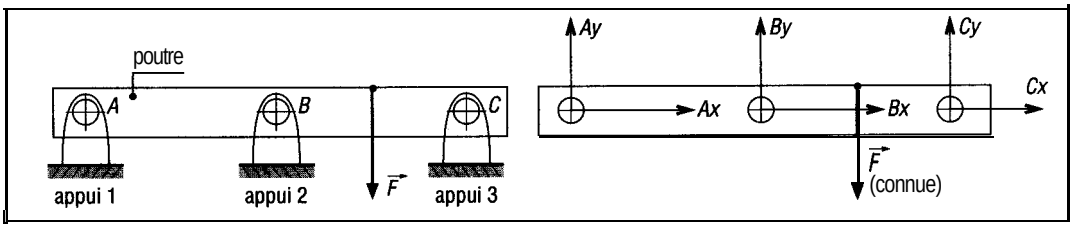


Fig. 35

Exemple 2 : une caisse de poids $\vec{P}$ connu est suspendue en A, B et C par l'intermédiaire de trois câbles (2), (3) et (4) de directions concourantes en E. La résolution statique nous donne deux équations avec trois inconnues : $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ et $\vec{T}_3$, les tensions des câbles. Le système est dit hyperstatique d'ordre 1 (3 – 2 = 1).

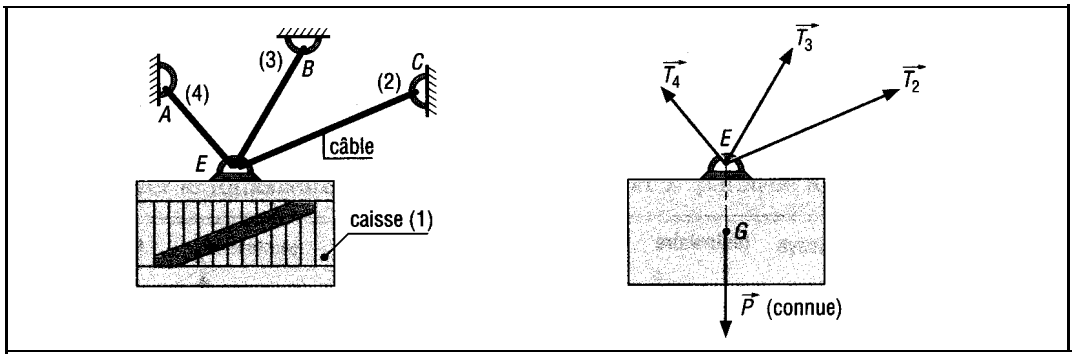


Fig. 36

Remarque : en résistance des matériaux (traction, torsion et flexion), plusieurs exemples de problèmes hyperstatiques sont abordés et résolus à partir d'équations supplémentaires liées aux déformations.

EXERCICES RÉSOLUS

❑ Une échelle de pompier (3), partiellement représentée, est articulée en A (pivot d'axe A, z) sur une tourelle (2). La tourelle peut pivoter (rotation d'axe D, y) par rapport au châssis du camion (1). Le levage est réalisé par un vérin hydraulique 4 + 5 (4 = tige, 5 = corps) articulé en B sur l'échelle et en C sur la tourelle, les liaisons en B et C sont des liaisons rotules de centres B et C (ou des articulations de centre B et C).
L'étude est réalisée dans le plan de symétrie du dispositif, l'ensemble est en équilibre, la tourelle est à l'arrêt et le vérin est bloqué en position. $\vec{P}_3$ (5 000 daN) schématise le poids de l'échelle, le poids du vérin est négligé.
Déterminer les actions exercées sur les liaisons en A, B et C.

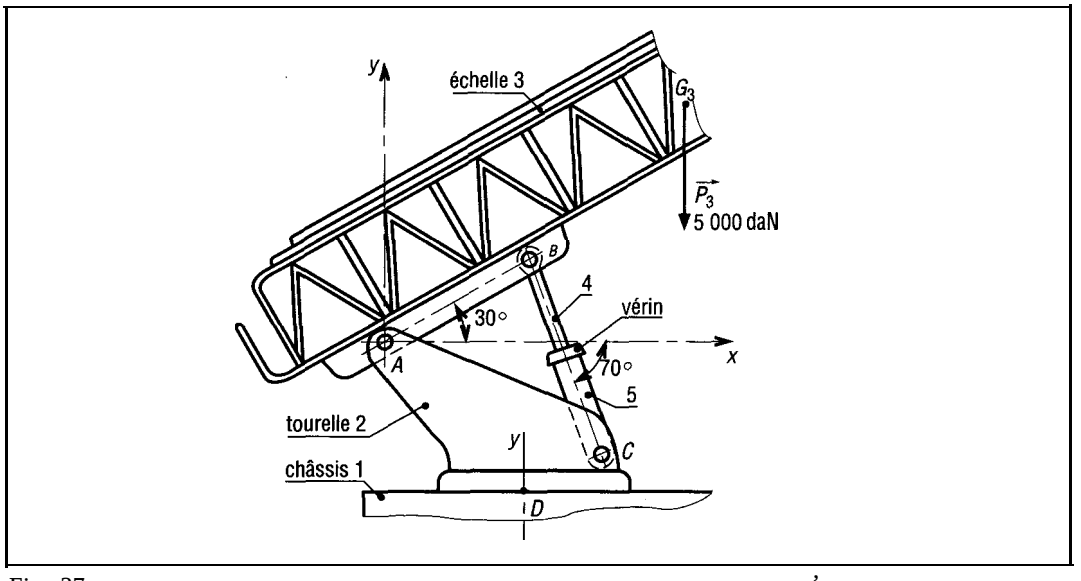


Fig. 37

Résolution : les actions en A, B et C sont schématisées par des vecteurs-forces passant par ces mêmes points.

a) Équilibre du vérin (4 + 5)

Le poids du vérin étant négligé, celui-ci est soumis à l'action de deux forces $\overrightarrow{B_{3/4}}$ et $\overrightarrow{C_{2/5}}$.

Pour que le vérin reste en équilibre, les deux forces doivent être égales et opposées :

$\overrightarrow{B_{3/4}} = -\overrightarrow{C_{2/5}}$, ligne d'action commune BC.

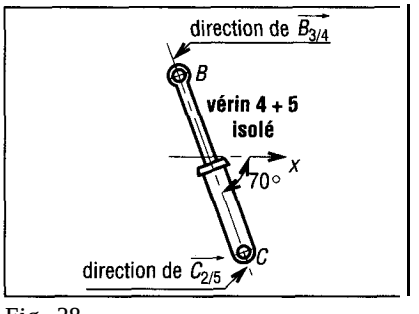


Fig. 38

Remarque : l'intensité des forces sera déterminée au paragraphe suivant.

b) Équilibre de l'échelle (3)

L'échelle est soumise à l'action de trois forces extérieures : $\overrightarrow{P_3}$, $\overrightarrow{A_{2/3}}$ et $\overrightarrow{B_{4/3}}$.

D'après le principe des actions mutuelles :

$\overrightarrow{B_{4/3}} = -\overrightarrow{B_{3/4}}$ ligne d'action BC.

$\overrightarrow{F_{ext}}$	PS	D	I (daN)
$\overrightarrow{P_3}$	G_3	90° / x	5 000
$\overrightarrow{B_{4/3}}$	B	BC	?
$\overrightarrow{A_{2/3}}$	A	?	?

Bilan : trois forces concourantes, trois inconnues, la résolution (graphique ou calculée) est possible.

a) Solution graphique : les trois forces sont concourantes en I.

Ordre des constructions :

- point de concours I de $\overrightarrow{P_3}$ et de BC,
- direction Al de $\overrightarrow{A_{2/3}}$,
- triangle des forces avec $\overrightarrow{P_3}$ verticale, $\overrightarrow{B_{4/3}}$ parallèle à BC et $\overrightarrow{A_{2/3}}$ parallèle à AZ (voir paragraphes VI 2 et VIII-l).

Remarque : le vérin 4 + 5 travaille en compression. La précision des résultats dépend de la qualité des constructions.

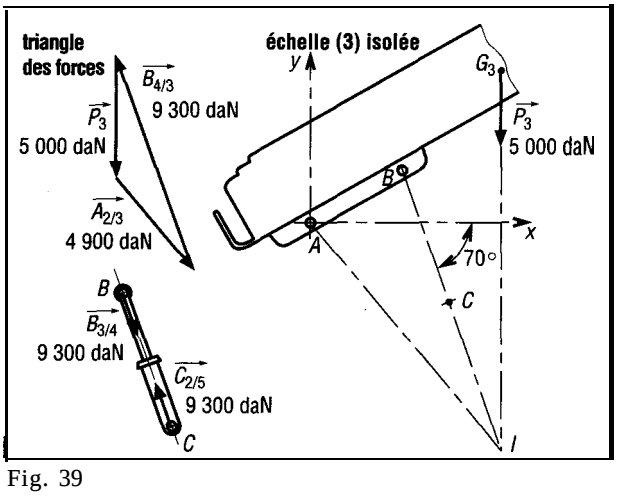


Fig. 39

b) Solution calculée.

$\overrightarrow{A_{2/3}} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$ et $\overrightarrow{B_{4/3}} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j}$

A_x, B_x, A_y, B_y sont supposés positifs au départ.

Somme des forces égale à zéro :

$\overrightarrow{A_{2/3}} + \overrightarrow{B_{4/3}} + \overrightarrow{P_3} = \vec{0}$; en projection sur les axes (x, y), on obtient les équations scalaires :

suivant x : $A_x + B_x + 0 = 0$

ou $A_x = -B_x$ (1)

suivant y : $A_y + B_y - P_3 = 0$

ou $A_y + B_y = P_3 = 5000$ daN (2)

Moment résultant en A des trois forces, égal à zéro : $M_A(\overrightarrow{A_{2/3}}) + M_A(\overrightarrow{B_{4/3}}) + M_A(\overrightarrow{P_3}) = 0$

$0 + (B_y \times 2{,}85 - B_x \times 1{,}65) - P_3 \times 6 = 0$ (3)

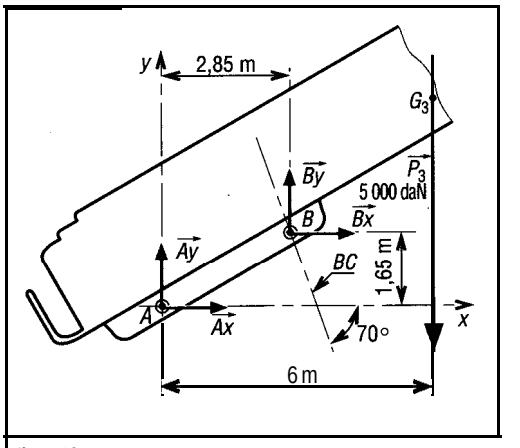


Fig. 40

Remarque : $\overrightarrow{B_{4/3}}$ a pour direction BC, autrement dit : $\frac{B_y}{B_x} = \tan 110° = -\tan 70°$.

L'équation (3) peut s'écrire : $B_x\left(\frac{B_y}{B_x} \times 2{,}85 - 1{,}65\right) = 6 \times P_3$

$B_x = -\frac{6 \times 5000}{2{,}85 \tan 70° + 1{,}65} = -3\,164{,}5$ daN ; $B_y = (-3\,164{,}5) \times (-\tan 70°) = 8\,694$ daN

$A_x = -B_x = 3\,164{,}5$ daN ; $A_y = P_3 - B_y = 5\,000 - 8\,694 = -3\,694$ daN

$A = \sqrt{3\,694^2 + 3\,164^2} = 4\,864$ daN ; $\alpha_A = \arctan\left(-\frac{3\,694}{3\,164}\right) = -49{,}4°$

$B_{4/3} = \sqrt{3\,164^2 + 8\,694^2} = 9\,250$ daN

❑ Le vérin hydraulique double-effet proposé en coupe longitudinale travaille aussi bien en poussant qu'en tirant. Il se compose essentiellement d'un corps (1), rodé et glacé, et d'une tige de piston (3) solidaire d'un piston (2). La liaison entre 1 et (2 + 3) est une liaison pivot glissant d'axe, l'axe du vérin.

Les frottements et les poids des pièces sont négligés. La pression de l'huile alimentant le vérin est de 150 bars. Déterminer la capacité du vérin en poussant et en tirant si la pression dans la chambre opposée est nulle.

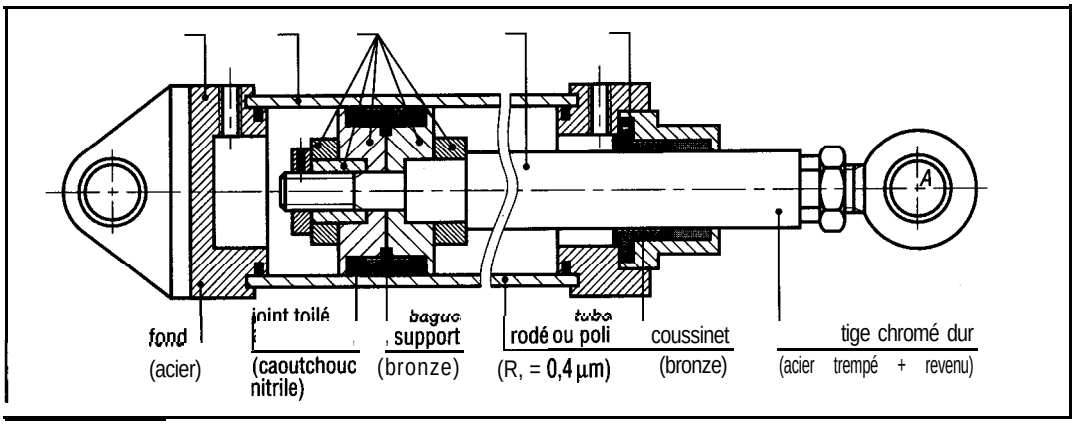


Fig. 41

Résolution

a) Capacité du vérin en poussant

Isolons l'ensemble piston (2) + tige (3) + petites quantités d'huile à gauche et à droite du piston de façon à obtenir des surfaces circulaires planes de chaque côté.

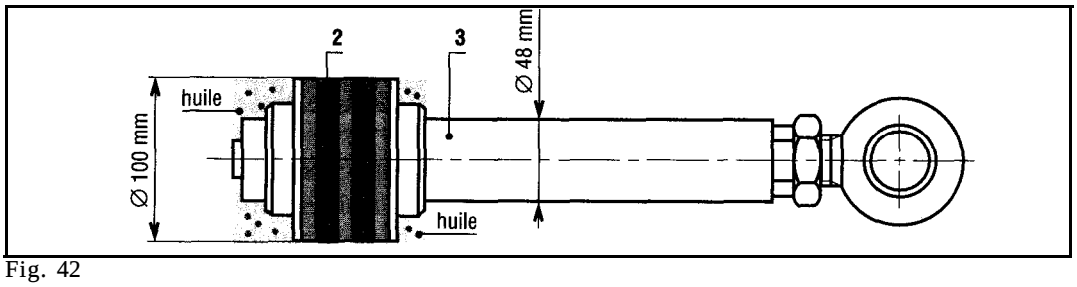


Fig. 42

L'ensemble est en équilibre sous l'action des forces de pression agissant à gauche du piston et sous l'action de la résultante F_P exercée sur la rotule A par le dispositif à pousser. La pression étant uniforme, la résultante $\vec{R}$ des forces de pression est portée par l'axe du vérin et a pour module $R = pS$. Le poids étant négligé, l'étude revient au cas d'un ensemble soumis à l'action de deux forces égales et opposées ($\vec{F_p} = -\vec{R}$) dont la ligne d'action est l'axe du vérin (tige comprimée).

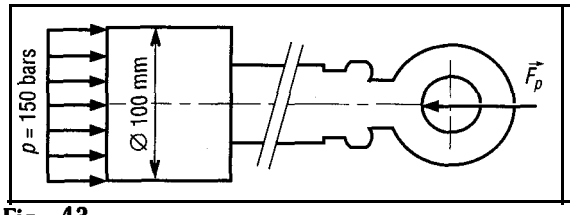


Fig. 43

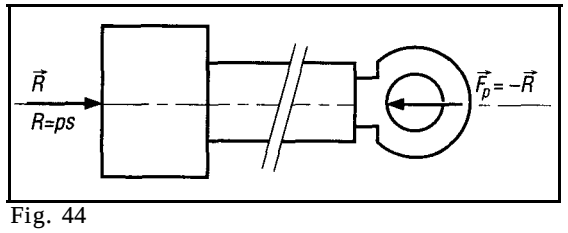


Fig. 44

$$\|\vec{F_p}\| = \|\vec{R}\| = p\,.\,S = 150 \times \left(\frac{\pi \times 10^2}{4}\right) = 11\,781\,\text{daN} \quad (P \text{ en bars}, S \text{ en cm}^2)$$

Remarque : 1 bar = 10^5 Pa = 0,1 MPa ; si on exprime p en Pa, ii faut mettre S en m^2 pour obtenir F_p en N.

$$\|\vec{F_p}\| = p\,.\,S = \left(150 \times 10^5\,\text{Pa}\right) \times \left(\frac{\pi \times 0{,}1^2}{4}\right) = 117\,810\,\text{N}$$

b) Capacité du vérin en tirant

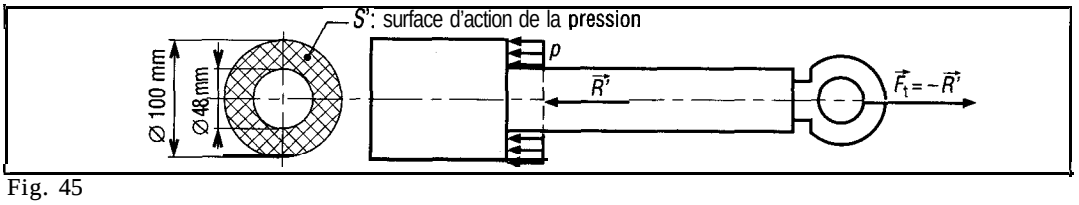


Fig. 45

L'étude est analogue au cas précédent, la pression agit à droite du piston sur la surface annulaire S'(S' = S – section tige). L'effort en tirant $\vec{F_t}$ est obtenu par :

$F_t = R' = p\,.\,S' = 150 \times \frac{\pi}{4}\left(10^2 - 4{,}8^2\right) = 9\,067\,\text{daN}$

Remarque : dans ce cas, $\vec{F_t}$ est inférieur de 23 % à $\vec{F_p}$ et la tige est tendue.

3 Un avion militaire est en phase ascentionnelle à vitesse constante suivant un angle de 15" sous la poussée $\vec{F}$ (12 000 daN) des réacteurs. $\vec{R}$ schématise l'action de la résistance de l'air sur l'ensemble de la structure, $\vec{S}$ est la résultante des actions de sustentation sur les ailes et $\vec{A}$ schématise la résultante des actions stabilisatrices de l'air sur l'aileron arrière. $\vec{P}$ (30 000 daN) est le poids de l'appareil.

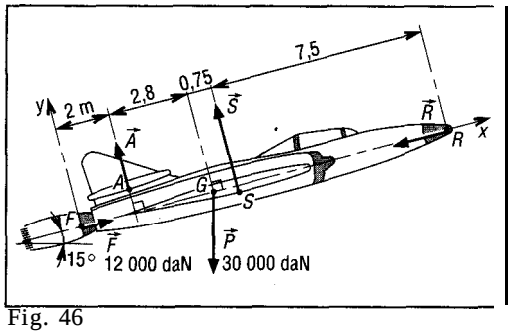
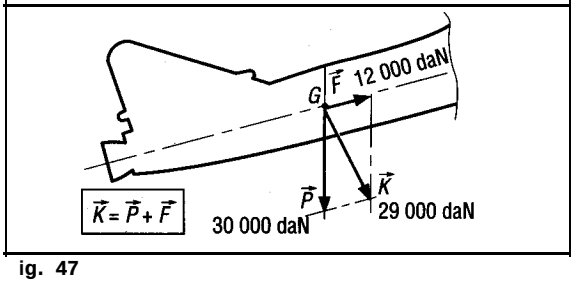


Fig. 46

Déterminer $\vec{A}$, $\vec{S}$ et $\vec{R}$ si toutes les actions sont supposées contenues dans le plan de symétrie de l'appareil.

$\vec{F}_{ext}$	PS	D	I (daN)
$\vec{P}$	G	┼	30 000 daN
$\vec{F}$	F	15"	12 000 daN
$\vec{A}$	A	105"	?
$\vec{S}$	S	105"	?
$\vec{R}$	R	15"	?



ig. 47

Résolution graphique

L'avion est soumis à l'action de cinq forces extérieures. Ramenons le problème à quatre forces en déterminant la résultante $\vec{K}$ de $\vec{P}$ et $\vec{F}$, toutes deux connues ; puis appliquons la méthode de Culman (voir paragraphe VIII-2b).

Méthode

- Remplaçons $\vec{F}$ et $\vec{P}$ par leur résultante $\vec{K}$
- Groupons $\vec{A}$ avec $\vec{R}$ et $\vec{S}$ avec $\vec{K}$:

$$\vec{S} + \vec{K} + \vec{A} + \vec{R} = (\vec{S} + \vec{K}) + (\vec{A} + \vec{R}) = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$$

$\vec{T}_1 = -\vec{T}_2$, les deux résultantes sont égales et opposées et ont MN pour ligne d'action. M est le point d'intersection de A et $\vec{R}$ et N le point d'intersection de S et K.

- Tracé du polygone des forces : force $\vec{K}$; MN ; direction de $\vec{S}$; module de $\vec{S}$; direction de $\vec{A}$ et $\vec{R}$; modules de $\vec{A}$ et $\vec{R}$.

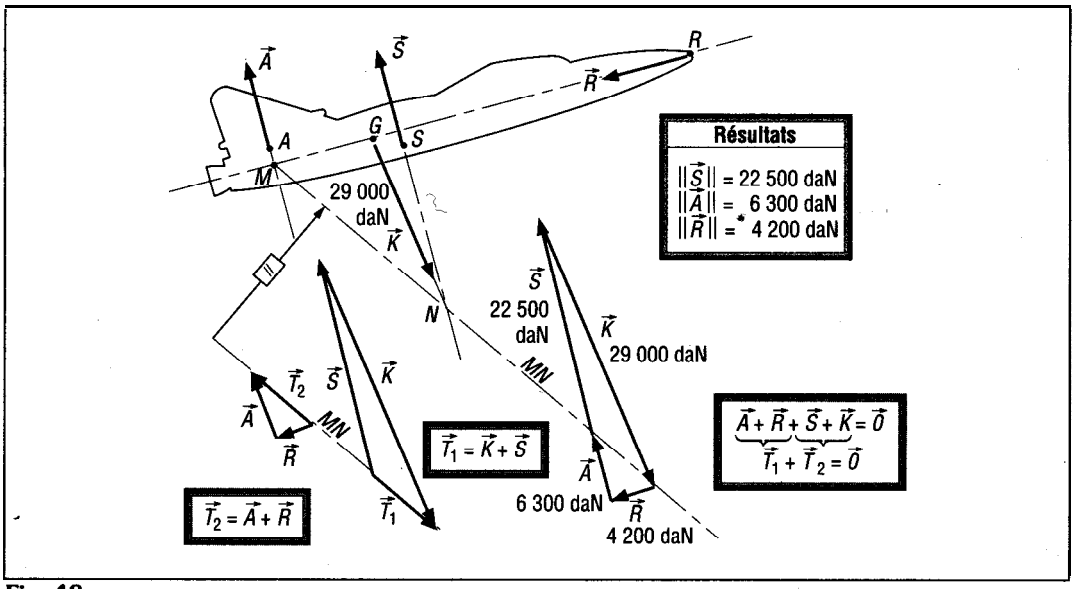


Fig. 48

Résolution par le calcul+

a) L'équation d'équilibre $\vec{F} + \vec{A} + \vec{P} + \vec{S} + \vec{R} = \vec{0}$ donne en projection sur les axes x, y :

Projection sur x : $F + 0 - P \cos 75" + 0 - R = 0$ (1)

Projection sur y : $0 + A - P \sin 75" + S + 0 = 0$ (2)

b) Équation de moment en F : $M_F(\vec{F}) + M_F(\vec{A}) + M_F(\vec{P}) + M_F(\vec{S}) + M_F(\vec{R}) = 0$

d'où : $0 + 2A - 4{,}8\,P \sin 75" + 5{,}55\,S + 0 = 0$ (3)

c) Résultats : avec l'équation (1) on a : $R = F - P \cos 75" = 4\,235$ daN

L'équation (2) donne : $S = P \sin 75" - A$

et en remplaçant S dans l'équation (3) on obtient :

$2A - 4{,}8\,P \sin 75" + 5{,}55\,(P \sin 75" - A) = 0{,}75\,P \sin 75" - 3{,}55\,A = 0$

d'où : A = 6 122 daN et S = 22 856 daN

EXERCICES À RÉSOUDRE

4 Un tuyau (1) de poids $\vec{P}$(600 daN) est soulevé par l'intermédiaire de crochets (3 et 6), d'élingues (2 et 5) et d'un anneau (4) dont les poids sont négligés. Déterminer les actions exercées en A, B, C, D et E si celles-ci sont schématisées par des vecteurs-forces passant par ces points et les tensions $\vec{T}_5$ et $\vec{T}_2$ des élingues. AH = DH ; a = 24"

Réponse

$A_{6/5} = B_{5/4} = T_5 = 738$ daN ;
$D_{3/2} = C_{2/4} = T_2 = 738$ daN;
$E_{0/4} = P$.

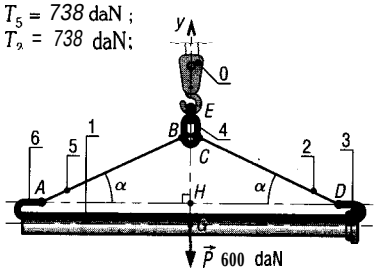


Fig. 49

5 Reprendre l'exercice 4 avec une caisse de poids $\vec{P}$(736 N) soulevée par un dispositif avec poulie et câbles. Déterminer les tensions des câbles et l'effort T que doit exercer l'opérateur pour maintenir l'ensemble en équilibre.

Réponse

$T_{AB} = 539$ N ; $T = T_{AC} = 660$ N ; $T_{AI} = T_{AJ} = 425$ N.

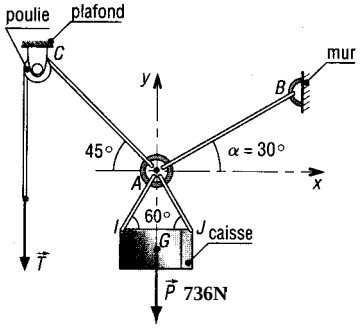


Fig. 50

6 Pour chacun des cinq exemples proposés, le solide ou l'ensemble isolé est indiqué sous forme incomplète. Pour chaque cas, faire le bilan des actions extérieures. Déterminer la direction de ces actions et éventuellement leur intensité dans les cas simples (deux forces égales et opposées). Les poids, autres que ceux indiqués, sont négligés.

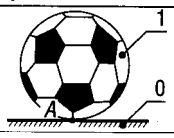
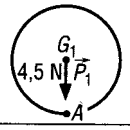
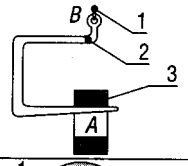
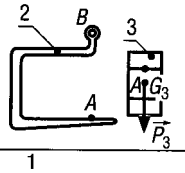
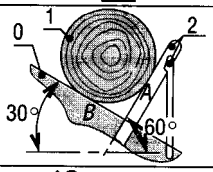
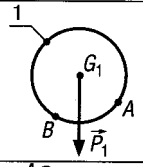
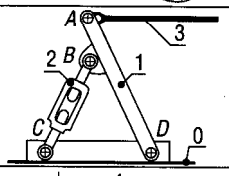
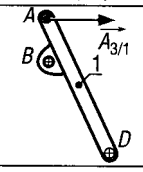
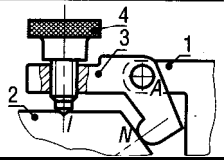
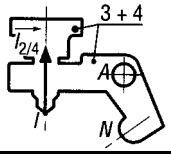
Cas	Système étudié	Solide (ou ensemble) isolé	Description
1			Le ballon est au repos sur le sol 0. $\vec{P}_1$(4,5 N) schématise le poids du ballon La liaison en A, entre 0 et 1, est assimilée à un contact ponctuel.
2			La fourche 2 est utilisée pour la manutention de pièces creuses 3 (poids P_3). Le levage est réalisé en B par une chaîne 1. La liaison entre 2 et 3 est une liaison linéaire rectiligne.
3			Le tronc d'arbre 1 (poids $\vec{P}_1$) est calé dans une pente (inclinaison de 30" par rapport à l'horizontale) à l'aide de deux poutres 2, perpendiculaires à la pente. Les liaisons en A et B sont assimilees à des liaisons linéaires rectilignes,
4			Le câble 3 est tendu par l'ensemble bras 1 et tendeur 2 (une vis à droite + une vis à gauche). Les liaisons A, B, Cet D sont des liaisons pivots, $\vec{A}_{3/1}$ schématise l'action exercée par le câble sur le bras 1.
5			La pièce à usiner 2 est bloquée sur le bâti. La liaison en N est linéaire rectiligne. $\vec{T}_{2/4}$ schématise l'action exercée en I par la pièce sur la vis.

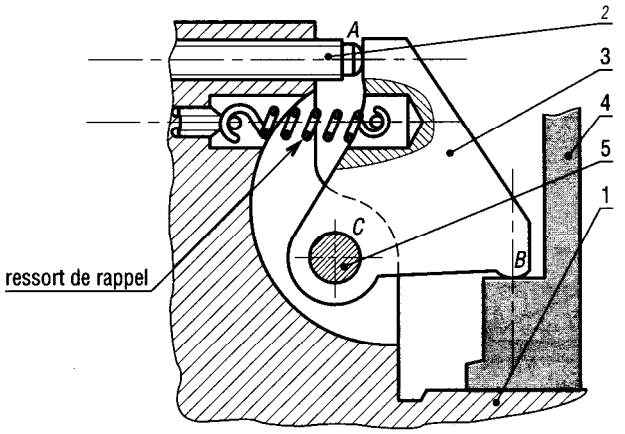
Fig. 51

❑ Le dispositif propose fait partie d'un montage d'usinage. La pièce à usiner (4) est bridée en B par un renvoi (3) articulé (liaison pivot) en C sur le bâti (1) du montage. Le serrage de la pièce est réalise par une vii pression (2) agissant en A (contact ponctuel). Les poids des pièces sont négligés, A,,, (300 daN) schématise l'action de la vis sur le renvoi, l'action du ressort est négligée.

Déterminer les actions exercées en B et C si celles-ci sont schématisées par des vecteurs-forces.

Réponse

$C_{5/3}x$ = − 300 daN ; $C_{5/3}y$ = − 347 daN ; $B_{4/3}x = 0$; $B_{4/3}y = 347$ daN.



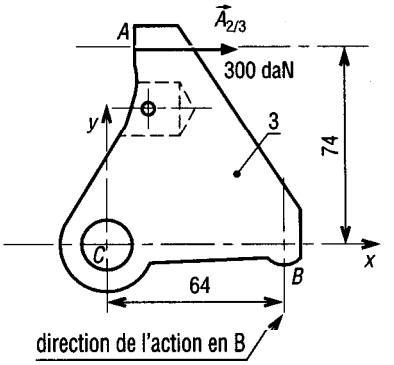


Fig. 52

❑ Une potence utilisée en manutention se compose d'une flèche (3) articulée en A sur une colonne pivotante (1) et d'un tirant BD ou (2) articulé en D sur (1) et en B sur (3). L'ensemble est en liaison pivot (axe vertical EF) sur des supports (4) et (5) encastrés dans le mur (0). Les poids des solides sont négligés, $\vec{P}$ (2 000 daN) schématise le poids de la charge à lever. Déterminer, pour la position de la figure, les actions exercées en A, B, D, F et E (supposée horizontale) si celles-ci sont schématisées par des vecteurs-forces passant par ces points.

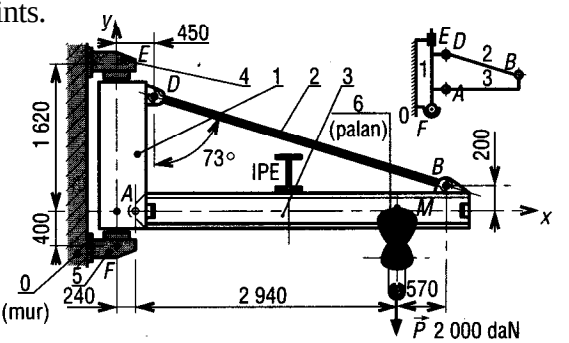


Fig. 53

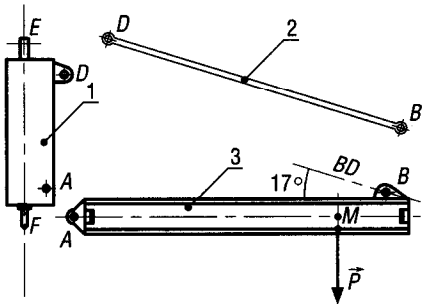


Fig. 54

9 Un bouteur se compose d'un châssis (1), d'une lame (2) articulée en B sur deux bras de poussée (3) eux-mêmes articulés en A sur (1). La hauteur de la lame est réglée par deux vérins (6 + 7) et son inclinaison par deux vérins (4 + 5). Les liaisons en A, B, C, *D*, E et *F* sont des liaisons pivots dont les centres portent le même nom. Les poids des pièces sont négligés ; $\overrightarrow{H_{0/2}}$ (22 000 daN) schématise l'action du sol sur la lame (inclinée de 5° par rapport à l'horizontale). L'étude est réalisée dans le plan de symétrie de l'appareil. Déterminer complètement les actions exercées en A, B, C, *D*, E et *F* si celles-ci sont schématisées par des vecteurs-forces.

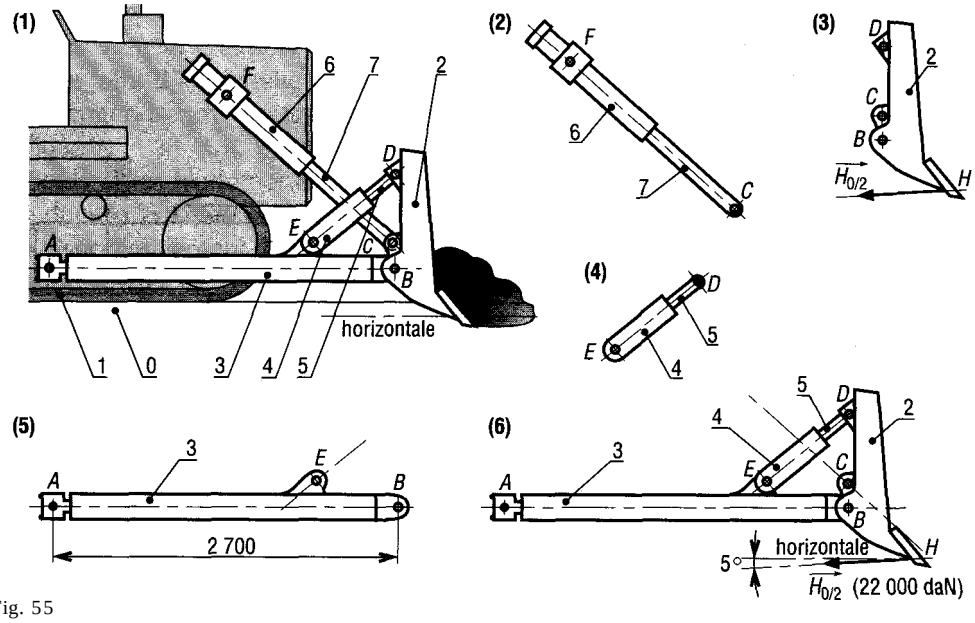


Fig. 55

❑ Le dispositif proposé est un triangle de levage de benne de camion permettant des angles de bennage plus importants qu'un système classique. Il se compose d'un bras (2) articulé en A sur le châssis (0), d'une biellette (3) articulée en *B* sur (2) et en C sur la benne (1). L'effort de levage est fourni par le vérin hydraulique 4 + 5 (4 = corps, 5 = tige) articulé en Ç sur (1) et en *D* sur (2). Les liaisons en *A*, *B*, *C*, *D* et E sont des liaisons pivots dont les centres portent le même nom. $\vec{P}$ (15 000 daN) schématise le poids de la benne, les autres poids sont négligés. L'étude est effectuée dans le plan de symétrie de l'appareil. Déterminer les actions exercées en *A*, *B*, C, *D* et *E* si celles-ci sont schématisées par des vecteurs-forces passant par ces mêmes points.

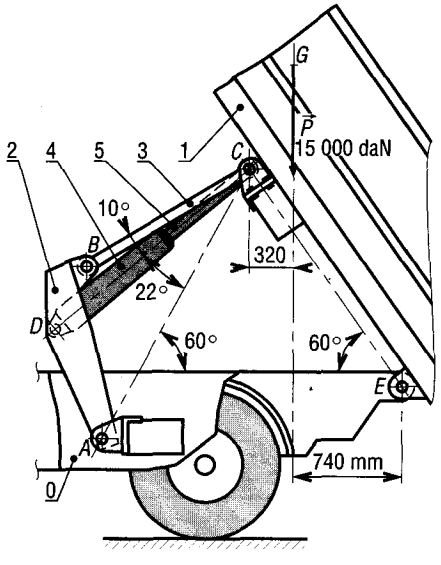


Fig. 56

11 Le vérin télescopique proposé sous forme schématique se compose d'un corps (0) et d'une tige télescopique composée des cylindres 1 (diamètre 215 mm), 2 (diamètre 150) et 3 (diamètre 90). La pression d'alimentation en huile est de 100 bars. Les frottements et les poids sont négligés.

Déterminer la capacité de levage du vérin ($\vec{F}$ maximum) lorsque :

a) le cylindre (3) agit seul ;

b) les cylindres (2) et (3) agissent en même temps ;

c) les trois cylindres agissent ensemble.

Réponse

6 362 daN ; 17 671 daN ; 36 305 daN.

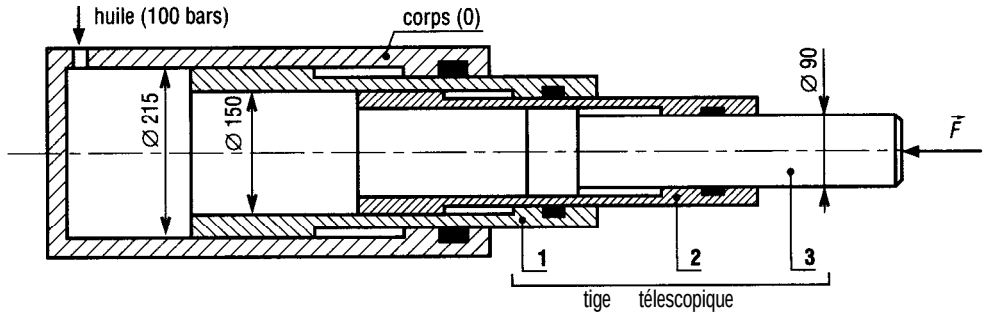


Fig. 57

12 Un clapet de non retour pour grosse canalisation se compose de deux corps (1) et (6) en fonte, recouvert intérieurement d'une couche de résine (2 + 5). Le clapet de fermeture, de forme sphérique, réalisé en acier chromé a un poids $\vec{P}$ de 22 daN.

Isoler le clapet, faire le bilan des actions exercées. À partir de quelle différence de pression ($P_A - P_B$) entre le haut (B) et le bas (A) y-a-t-il remontée du clapet ?

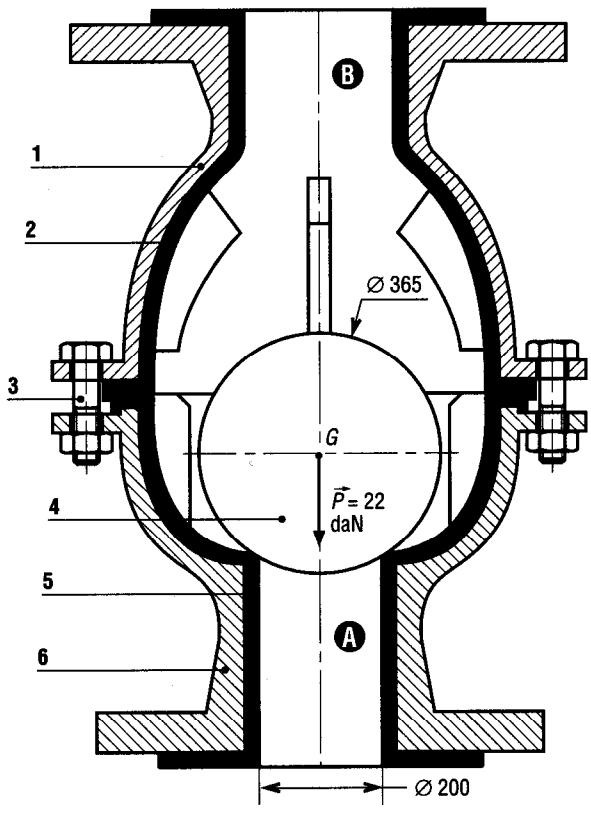


Fig. 58

❑ Le vérin multiplicateur (amplificateur) proposé se compose d'un corps (1), de deux pistons (2) et (3) et d'un piston compensateur (4). Il est utilisé pour réaliser des opérations de rivetage, poinçonnage, pressage, marquage, cambrage, etc. ⏲ la mise en route, l'air comprimé entre dans la chambre A (C est à l'échappement) et pousse le piston (2), à grande vitesse, jusqu'à ce qu'il vienne en contact avec la pièce à travailler. Dans le même temps, le piston (3) est en arrière, les chambres d'huile E et K sont en communication et le piston compensateur (4) fait passer de l'huile de la chambre E *à* la chambre K.

Aussitôt que le piston entre en contact avec la pièce à travailler, l'air passe de la chambre A à la chambre B et pousse le piston plongeur (3). Celui-ci, après avoir passé le joint d'étanchéité (5), fait monter la pression de l'huile dans la chambre (1), ce qui engendre une poussée supplémentaire sur le piston (2). L'action du ressort est négligée.

Le poids et les frottements sont négligés ; l'air est à 6 bars ; l'ensemble est en équilibre dans la position de la figure 59.

Isoler successivement les pistons (2) et (3), en déduire la pression d'huile dans la chambre (K) et la valeur de l'effort $\vec{F}$ transmissible pour la course d'approche (sans amplification) et pour la course travail (avec amplification). Comnarer.

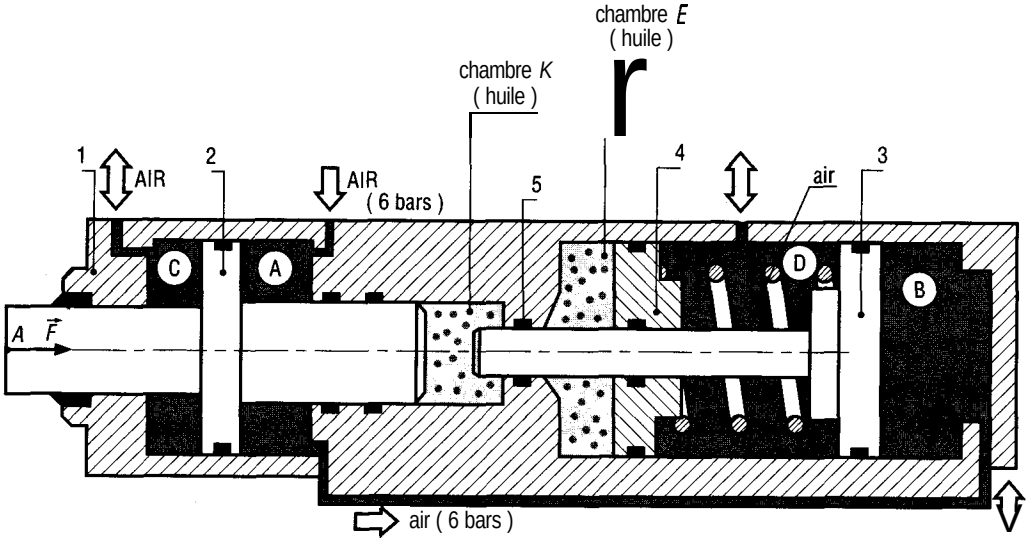


Fig. 59

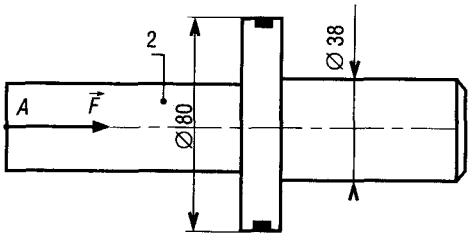


Fig. 60

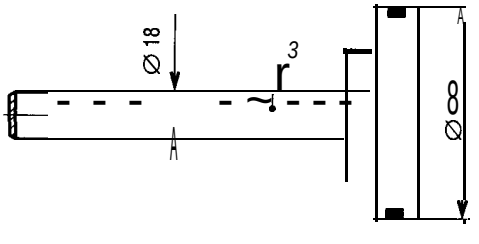


Fig. 61

❑ Pour l'ensemble proposé au repos, déterminer les actions exercées en A, B et D sur les roues et en C sur le crochet d'attelage.+ route est horizontale et toutes les actions route-roues sont supposées verticales. P_1 (1500 daN) schématise le poids de la voiture et $\vec{P_2}$ (800 daN) le poids de la remorque et du bateau.

Réponse

A, = 473,4 daN ; B_y = 1139,1 daN ; D_y = 687,5 ; $C_{1/2y}$ = 112,5.

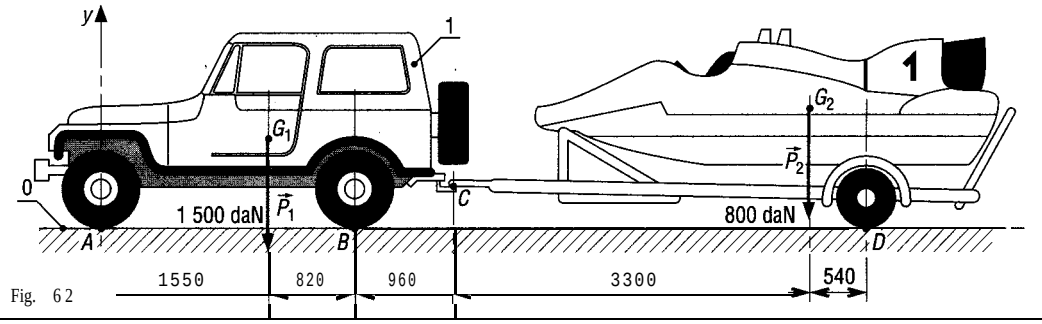


Fig. 62

❑ L'ensemble routier proposé se compose d'un tracteur (1) et d'une citerne (2). l'aide d'une bascule de pesage, on détermine les charges par essieux : E = 6 000 daN, $F = D$ = A = B = 9 000 daN (directions verticales).

Déterminer le poids total de l'ensemble en charge et le poids de la citerne 2 (P_2), sachant que le poids du tracteur est P_1 = 11 000 daN.

Calculer l'action en C (rotule d'attelage) et les distances X_1 et X,.

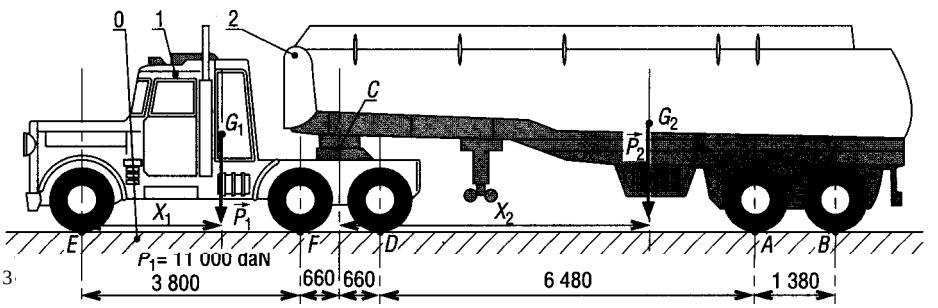


Fig. 63

❑ Pour le convoi exceptionnel au repos, déterminer les actions exercées en A, B, C, D, E sur les roues et en F sur le crochet d'attelage. Toutes les actions route-roues sont supposées verticales. L'action B est supposée identique à l'action C et l'action D identique à l'action E. $\vec{P_1}$ (14 000 daN) schématise le poids du tracteur. $\vec{P_2}$ (3 000 daN) le poids de la tête de la fusée. $\vec{P_3}$ (8 000 daN) le poids de la remorque et $\vec{P_4}$ (12 000 daN) le poids des deux premiers étages de la fusée. La norme européenne autorise les charges suivantes par essieu : essieu simple 10 tonnes ; essieu simple moteur 11 tonnes ; essieux tandem écartés de moins de 2 m, 18 tonnes. Les charges par essieu du convoi proposé obéissent-elles aux règles énoncées précédemment ?

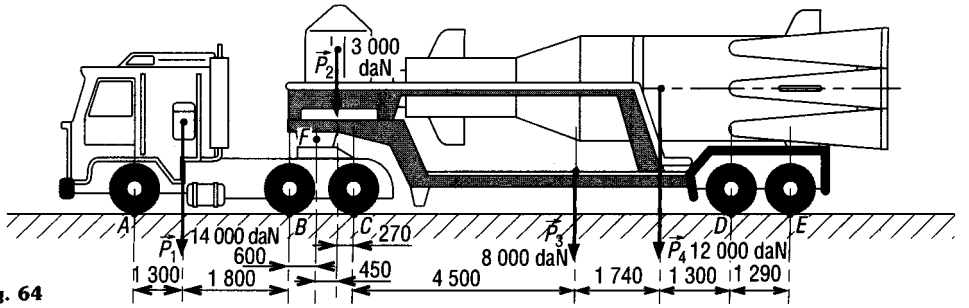


Fig. 64

❑ Un wagonnet (skip de levage), utilisé pour le levage des matières premières, est guidé sur des rails parallèles 1 (forme en U) par l'intermédiaire de roues 4 et 5 (contacts en A et B avec le rail). Le levage est réalisé en C par une chaîne de manutention (2) parallèle aux rails et entraînée par un motoréducteur non représenté.

Étude : le wagonnet est en équilibre ; l'étude est effectuée dans le plan de symétrie de l'appareil ; on note par un seul repère les groupes de deux pièces identiques, $\overrightarrow{P}$ (500 daN) schématise le poids du wagonnet et des matériaux.

Isoler l'ensemble 3 + 4 + 5 ; faire le bilan des actions mécaniques ; déterminer ces actions. En déduire l'effort de tension de la chaîne (T).

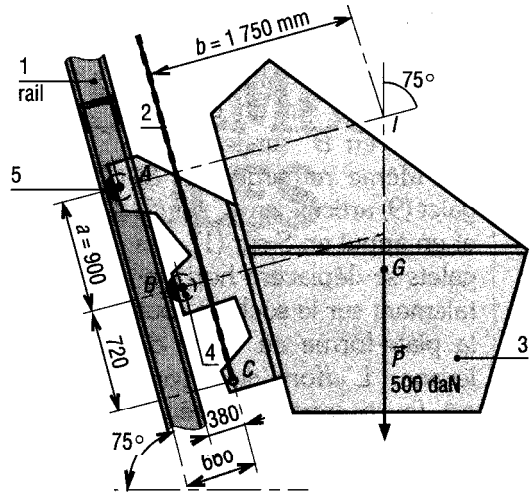


Fig. 65

Réponse

A = 810 daN ; B = 939 daN ; $C = T$ = 483 daN.

❑ Reprendre l'exercice 17 avec $\overrightarrow{P}$ = 800 daN, a = 1 000 et b = 1732 mm.

❑ La pelle hydraulique proposée figure 67 est utilisée pour du terrassement. La force $\overrightarrow{T_{S/3}}$ schématise l'action exercée en T par le sol sur le godet 3 ; $\overrightarrow{P_1}$ schématise le poids de la flèche 1, $\overrightarrow{P_2}$ le poids du godet 3 et de la contre-flèche 2. La manœuvre est assurée par quatre vérins hydrauliques dont deux identiques 4 + 5 et 4' + 5' (4 = tige, 5 = corps). Les liaisons en A, B, C, D, E, F, H, K, M et N sont des liaisons pivots dont les centres portent le même nom.. Isoler l'ensemble de la partie pelle en équilibre dans la position de la figure 68. Faire le bilan des actions mécaniques. Déterminer complètement ces actions.

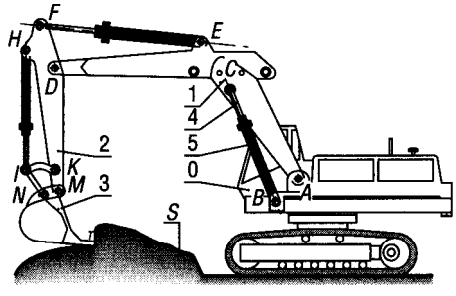


Fig. 66

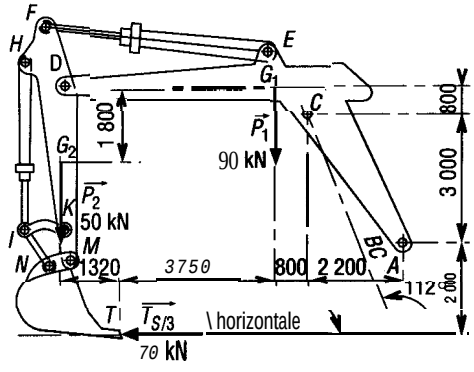


Fig. 67

Une table élévatrice à deux ciseaux, utilisée pour lever des charges, se compose d'un socle (1), d'une plate-forme (6) et de deux doubles paires de ciseaux (2 et 3) et (4 et 5). Le ciseau (4) est articulé en A sur (6), en C sur (5) et en E sur (3). Le ciseau (3) est articulé en R sur le socle (1), fie sur le sol (0), et en F sur le ciseau (2). Les ciseaux (2) et (5) sont articulés entre eux en D.

La plate-forme (6) est en appui en B sur un galet 8 articulé en B' sur le ciseau (5). Même remarque en S, galet (9) articulé en S' sur (2) et en appui en S sur (1). Les galets se déplacent horizontalement sur le socle et sous la plate-forme au cours du levage. L'effort de levage est fourni par deux vérins hydrauliques 10 + 11 (10 = corps, 11 = tige) articulés en M sur (4) et en N sur (3). Les liaisons en A, B', C, D, E, F, M, N, R et S' sont des liaisons pivots dont les centres portent le même nom.

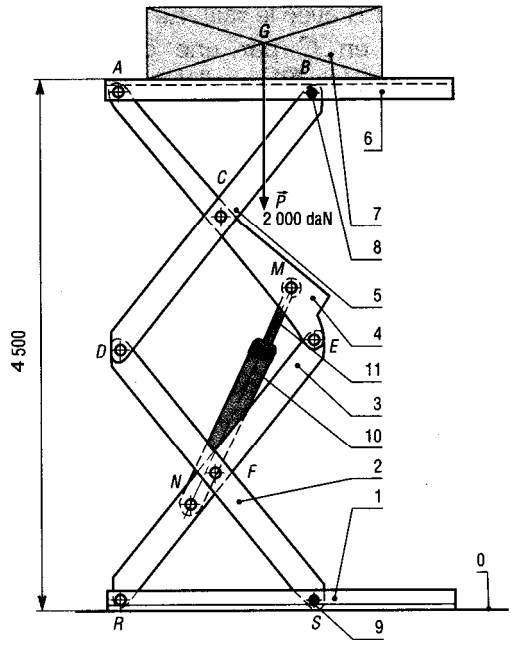


Fig. 68

Étude : la table est en équilibre, l'étude est réalisée dans le plan de symétrie de l'appareil, on note par un seul repère les groupes de deux pièces identiques. $\vec{P}$ (2 000 daN) schématise le poids de la charge à soulever, les autres poids sont négligés. Isoler les solides et ensembles proposés figures 69 à 72. Faire le bilan des actions mécaniques dans chaque cas. Déterminer complètement les actions en A, B, B', C, D, E, F, M, N, R, Set S'.

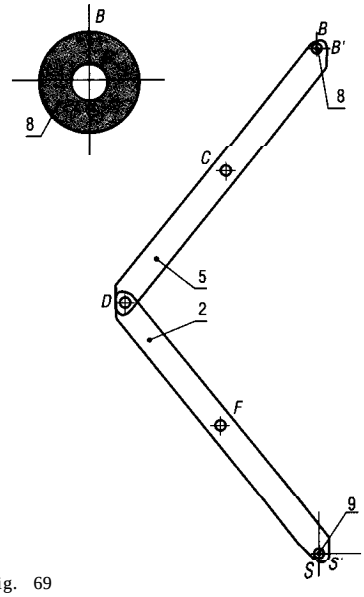


Fig. 69

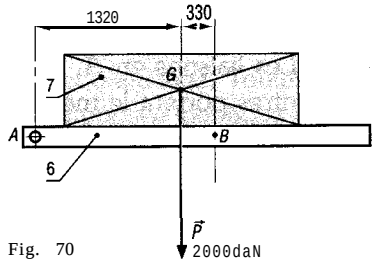


Fig. 70

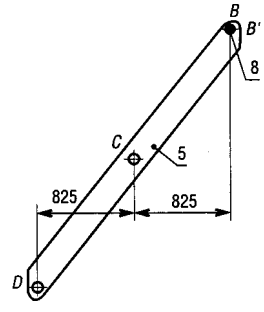


Fig. 71

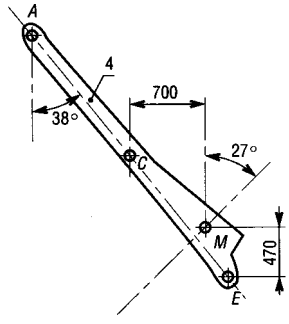


Fig. 72

6 TREILLIS OU SYSTÈMES TRIANGULÉS

OBJECTIFS

- Définir les notions de treillis, nœuds et barres.
- Donner la relation entre nœuds et barres.
- Indiquer plusieurs méthodes classiques de calcul des structures en treillis : méthode des nœuds, méthode de crémona et méthode des sections.
- Préciser les cas particuliers et les simplifications usuelles.

Ce chapitre peut être considéré comme une application de la statique plane à l'étude des structures en treillis (ou systèmes triangulés). Nous nous limiterons à l'étude des treillis plans.

I - Définitions - Hypothèses - Relation entre noeuds et barres

1. Définitions

On appelle treillis ou système triangulés des assemblages de barres rectilignes dont la figure de base- est un triangle.

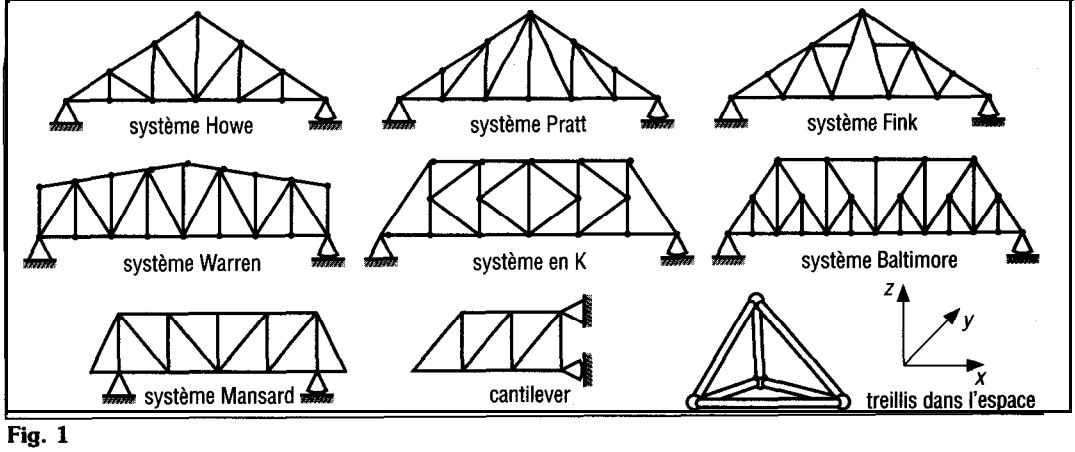


Fig. 1

On appelle nœud le point de rencontre de plusieurs barres,

2. Hypothèses

- Les assemblages sont supposés géométriquement invariables.
- Toutes les forces sont supposées contenues dans le plan de la structure.
- Le poids des barres est négligé. Les forces agissent sur les nœuds.
- Les nœuds sont supposés équivalents à des liaisons pivots.

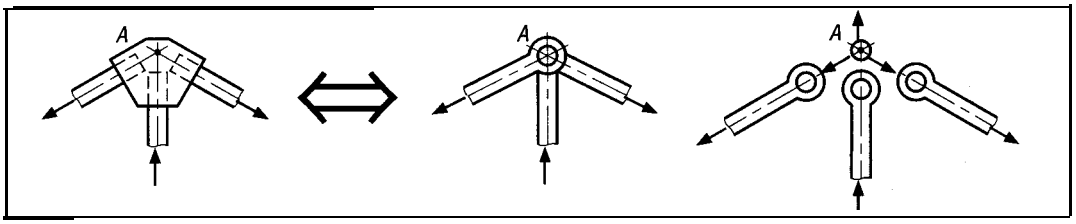


Fig. 2

Remarque : compte tenu des hypothèses précédentes, les barres sont soumises soit à la traction, soit à la compression.

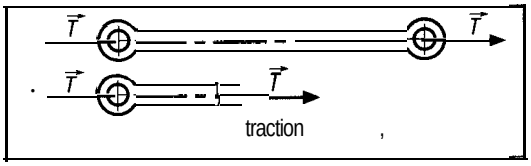


Fig. 3

3. Relation entre nœuds et barres

a) Cas d'appuis mobiles

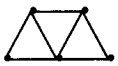
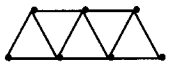
Exemple					
Nombre de barres	b	3	5	7	11
Nombre de nœuds	n	3	4	5	7

Fig. 4

Relations entre n et b : $\boxed{b = 2n - 3}$

Si $b = 2n - 3$, la résolution est **possible** avec le principe fondamental de la statique (système isostatique).
Si $b < 2n - 3$, la structure n'est pas rigide, il y a **mobilité.**
Si $b > 2n - 3$, le système est **hyperstatique,** il y a des contraintes internes.

b) Cas où la structure repose sur deux appuis A et *B* fixes

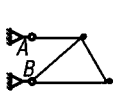
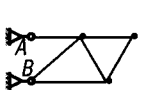
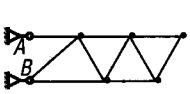
Exemple					
Nombre de barres	b	2	4	6	10
Nombre de nœuds	n	3	4	5	8

Fig. 5

Dans ce cas, la relation entre n et b s'écrit $\boxed{b = 2(n - 2) = 2n - 4}$

Si $b = 2(n - 2)$, la résolution est **possible** avec le principe fondamental de la statique.
Si $b < 2(n - 2)$, la structure n'est pas rigide, il y a **mobilité.**
Si $b > 2(n - 2)$, le système est **hyperstatique.** Le principe fondamental ne permet pas, à lui seul, de déterminer les efforts dans les barres.

c) Exemples

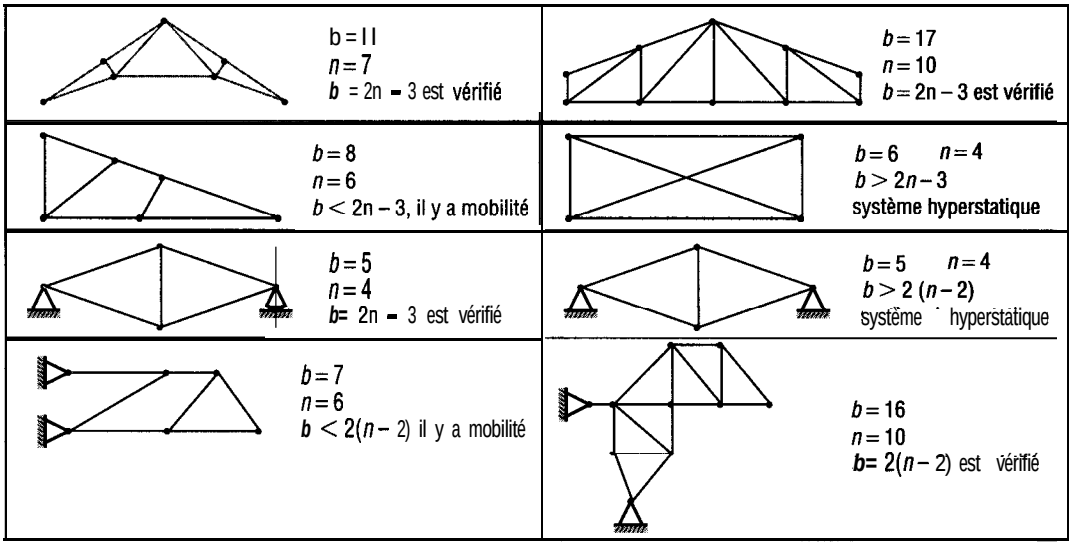


Fig. 6

II - Méthode des nœuds

Cette méthode, dont l'objectif est la détermination des actions dans-toutes les barres d'une même structure, consiste à étudier l'équilibre des nœuds successifs en appliquant le principe fondamental de la statique.

Exemple : déterminons les efforts exercés dans toutes les barres de la structure proposée.

L'équilibre des nœuds successifs A, B, C et D permet d'obtenir les efforts exercés dans toutes les barres de la structure.

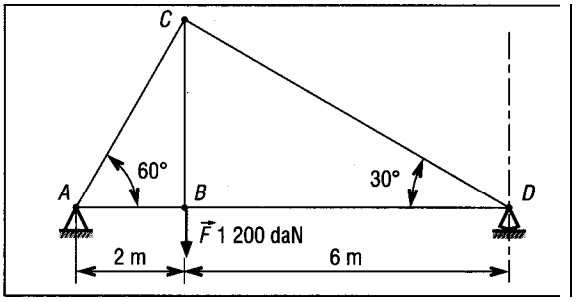
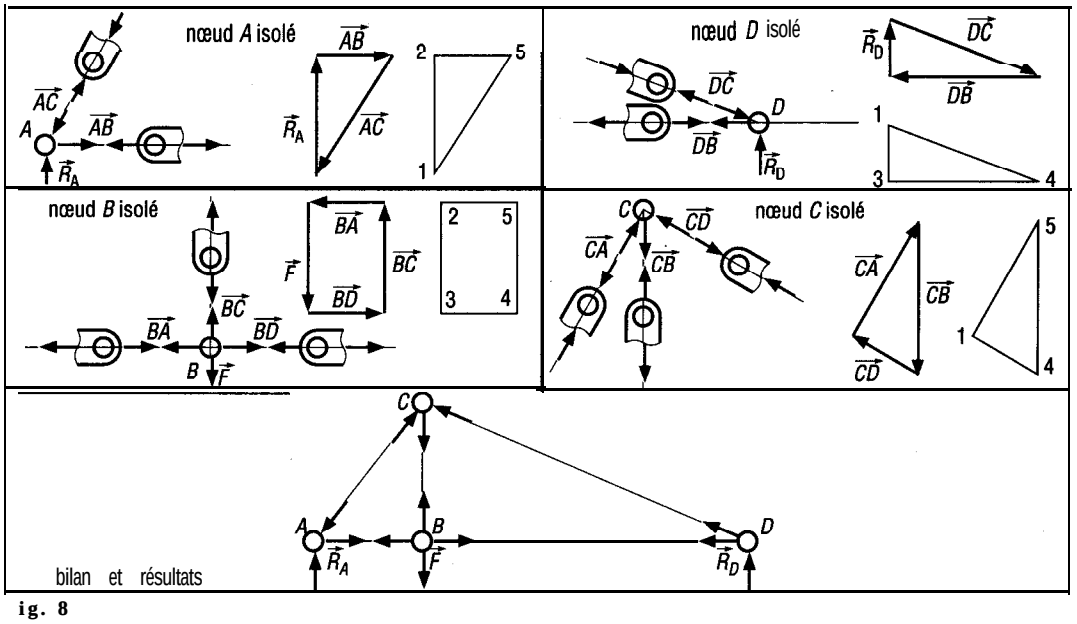


Fig. 7



ig. 8

II- Méthode de crémona

La méthode consiste à construire et à rassembler sur une même figure (appelée crémona), tous les triangles ou polygones de forces obtenus par l'étude des équilibres des nœuds successifs de la structure.

Remarque : pour un même nœud, il ne doit pas y avoir plus de deux actions (modules) inconnues pour aboutir à un résultat. Dans le cas contraire, isoler d'autres nœuds, au besoin utiliser la méthode des sections pour débloquer une étude.

Tracé d'un crémona (reprenons l'exemple du paragraphe précédent).

La structure est divisée en régions. Les forces extérieures à la structure et les barres sont les frontières entre les différentes régions. Le tracé du crémona est effectué au fur et à mesure de l'étude graphique de l'équilibre des nœuds successifs. Il est indispensable de choisir une échelle des forces pour réaliser les constructions :

La région 1 est limitée par $\vec{R_A}$, $\vec{R_D}$, AC, CD.
La région 2 est limitée par $\vec{R_A}$, $\vec{F}$, AB.
La région 3 est limitée par $\vec{F}$, $\vec{R_D}$, BD.
La région 4 est limitée par BD, BC, DC.
La région 5 est limitée par AC, BC, AB.

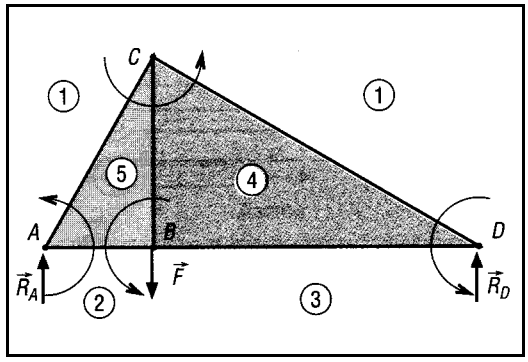


Fig. 9

Lorsque l'on tourne autour du nœud A dans le sens trigonométrique, l'on rencontre successivement les régions 1-2-5-1. À ces régions correspondent les actions 1-2 (R_A), 2-5 (barre AB), 5-l (barre AC). L'équilibre du nœud permet le tracé des segments l-2, 2-5, 5-l du graphe. Le point 5 est déduit par construction. Au nœud B correspond les régions 2-3-4-5-2. Les actions correspondantes sont : 2-3 (F), 3-4 (barre BD), 4-5 (barre BC), 5-2 (barre AB). L'équilibre du nœud permet le tracé des segments 2-3, 3-4, 4-5, 5-2 du graphe. Le point 4 est déduit par construction Même procédé pour les nœuds D (3-l-4) et C (l-5-4). Le tracé définitif est obtenu lorsque tous les nœuds ont été étudiés et dessinés.

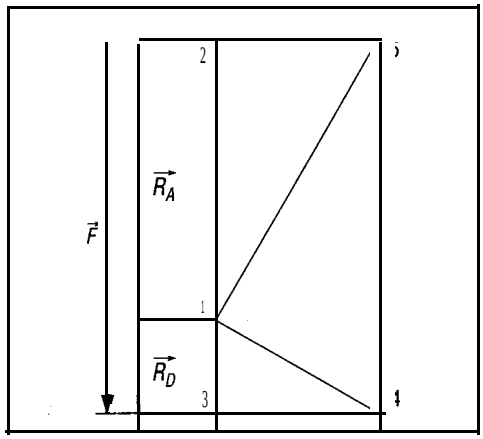


Fig. 10

Action	Désignation sur le graphe	Sens de l'action sur le nœud	Sollicitation dans la barre	Module daN
R_A	1-2			900
R_D	3-1			300
F	2-3			1200
Barre AB sur nœud A	2-5	2 vers 5	traction	520
Barre AB sur nœud B	52	$5 \rightarrow 2$	traction	520
Barre BD sur nœud B	3-4	$3 \rightarrow 4$	traction	520
Barre BD sur nœud D	4-3	$4 \rightarrow 3$	traction	520
Barre DC sur nœud C	4-l	$4 \rightarrow 1$	compression	600
Barre DC sur nœud B	1-4	$1 \rightarrow 4$	compression	600
Barre AC sur nœud A	5-1	$5 \rightarrow 1$	compression	1040
Barre AC sur nœud C	1-5	$1 \rightarrow 5$	compression	1040
Barre BC sur B	4-5	$4 \rightarrow 5$	traction	1200
Barre BC sur C	5-4	$5 \rightarrow 4$	traction	1200

Remarque : la méthode des nœuds peut être utilisée sans faire de crémona. Cependant, au-delà de 7 à 8 noeuds, la construction d'un crémona simplifie le travail et diminue le temps d'étude. Si les barres sont très nombreuses préférer les logiciels.

IV • Simplifications • Cas particuliers

1. Cas d'un nœud non chargé, à trois barres, dont deux colinéaires

Les trois barres sont concourantes au nœud J qui ne supporte aucune charge extérieure. Le principe fondamental appliqué au nœud donne :

$\vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{T_3} = \vec{0}$.

Projection sur la direction $\vec{v}$:

$\Sigma F_v = 0 + 0 + T_3 \cos\theta = 0$

d'où : $T_3 = 0$

Projection sur la direction $\vec{u}$:

$\Sigma F_u = T_1 - T_2 + T_3 \sin\theta = T_1 - T_2 + 0 = 0$

d'où : $T_1 = T_2$

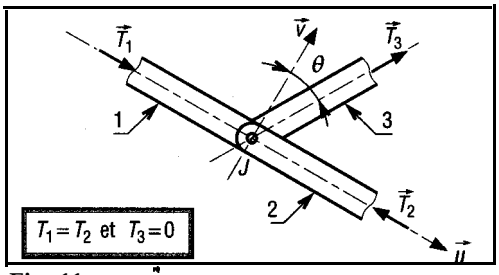


Fig. 11

Conclusion : lorsqu'il n'y a pas de charge extérieure sur le nœud, les actions dans les barres colinéaires sont égales et opposées ($\vec{T_1} = \vec{T_2}$) et l'effort dans la troisième barre est nul ($\vec{T_3} = \vec{0}$).

2. Cas d'un nœud non chargé avec quatre barres colinéaires deux à deux

L'équilibre du nœud K se traduit par :

$\vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{T_3} + \vec{T_4} = \vec{0}$

Projection sur la direction $\vec{v}$:

$0 + 0 + T_3 \cos\theta + T_4 \cos\theta = 0$

d'où : $T_3 = T_4$

Projection sur la direction $\vec{u}$:

$T_1 - T_2 - T_3 \sin\theta + T_4 \sin\theta = 0$

donne : $T_1 = T_2$

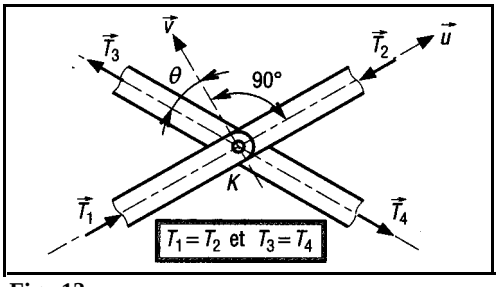


Fig. 12

Conclusion : pour un nœud non chargé à quatre barres colinéaires deux à deux, les actions dans les barres colinéaires sont égales et opposées.

3. Cas d'un nœud non chargé avec deux barres non colinéaires

L'équilibre du nœud M se traduit par :

$\vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$

Projection sur la direction $\vec{u}$:

$-T_1 \cos\theta + 0 = 0$ d'où : $T_1 = 0$

Projection sur 3 :

$-T_1 \sin\theta - T_2 = 0$ donne : $T_2 = 0$

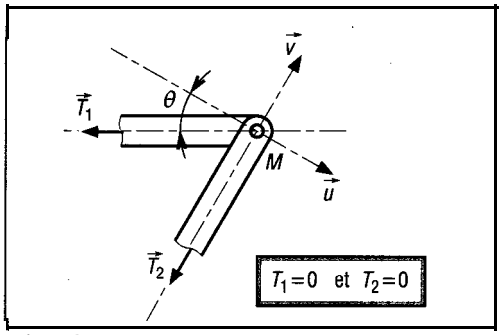


Fig. 13

Conclusion : s'il n'y a pas de charge sur le nœud M, les actions dans les deux barres sont nulles.

4. Barre de substitution

Dans certains cas, le tracé des crémonas n'est pas directement possible. Afin de rendre possible les tracés, on peut utiliser une barre de substitution à la place de deux ou plusieurs barres de la structure initiale. Seule condition : la structure doit conserver sa rigidité.

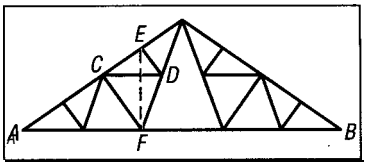


Fig. 14

Exemple : pour la structure de la figure 14, la barre de substitution EF remplace, le temps des calculs, les barres CD et ED.

V-Méthodedessections

La méthode des sections est utilisée pour déterminer une action, éventuellement deux ou trois, exercées dans l'une des barres d'une structure donnée.

Exemple : pour la structure proposée figure 15, déterminons l'action exercée dans la barre FD. L'étude de l'équilibre de l'ensemble de la structure donne :
R_A = 6 000 daN et R_B = 3 000 daN (verticales).
Effectuons une coupure fictive dans la structure (coupure sur trois barres non sécantes au plus) et étudions l'équilibre des deux systèmes obtenus.

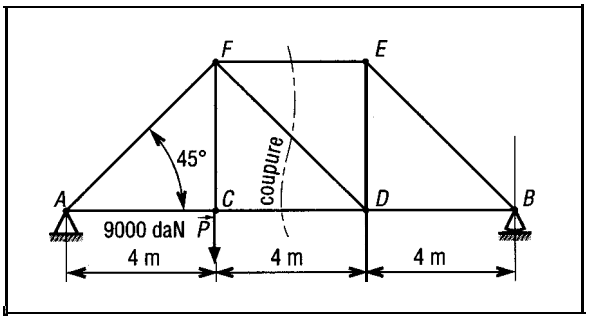


Fig. 15

Le système 1 est soumis à l'action de 5 forces extérieures. $\vec{R_A}$ et $\vec{P}$ sont connues. Les directions de $\vec{FD}$, $\vec{FE}$ et $\vec{CD}$ sont connues. Nous avons trois modules inconnus. Le système 2 est soumis à l'action de 4 forces extérieures. $\vec{R_B}$ est connue. Les directions de $\vec{EF}$, $\vec{DF}$ et $\vec{DC}$ sont connues. Nous avons trois modules inconnus. La résolution est possible dans les deux cas. Si une résolution graphique est envisagée, la méthode de Culman doit être utilisée (voir statique plane VIII-2b).

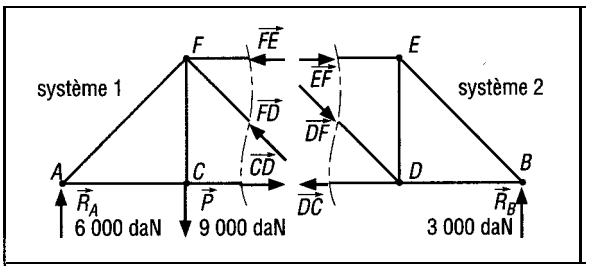


Fig. 16

Résolution : des deux systèmes, le système 2 est le plus simple à résoudre (moins de forces extérieures). Ordre des constructions (méthode de Culman) :
– Sur la structure : J ($\vec{R_B} + \vec{EF} = \vec{R}$) ;
I ($\vec{DF} + \vec{DC} = -\vec{R}$) confondu avec D ;
IJ (direction de $\vec{R}$ et $-\vec{R}$).
– Polygone des forces : $\vec{R_B}$; $\vec{EF}$; IJ ; $\vec{DF}$; $\vec{DC}$. Mesure des modules.

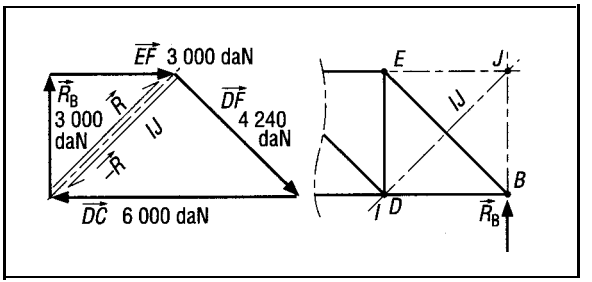


Fig. 17

La barre FD est soumise à unk sollicitation en compression de 4 240 daN.

EXERCICES À RÉSOUDRE

1 Si $AE = EF = FD = DE = DC = AC = 4$ m, déterminer les efforts dans toutes les barres de la structure en cantilever.

Réponse

$T_{FD} = T_{DC} = 3\,464$ daN $= T_{DE}$;
$T_{FE} = -1\,732$; $T_{EC} = 5\,774$;
$T_{EA} = 6\,351$; $T_{AC} = -1\,155$;
$T_{BC} = 8\,000$; $A_y = 6\,930$;
$A_x = 1\,000$ daN.

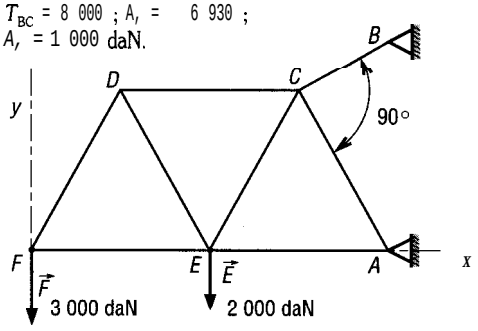


Fig. 18

❑ Un pont est réalisé à partir d'une plate-forme soutenue par deux structures identiques en treillis. $AE = EB = DC = 5$ m ; $AD = DE = EC = CB$; $\vec{F}$ (8 000 daN) appliquée en E schématise l'action exercée par la plate-forme chargée. a) Déterminer les actions exercées sur les appuis en A et B. b) Déterminer les actions dans toutes les barres de la structure.

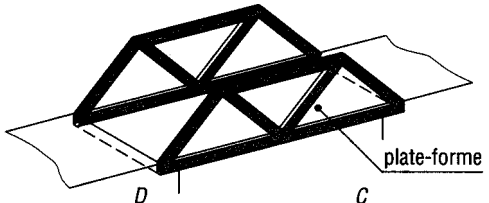


Fig. 19

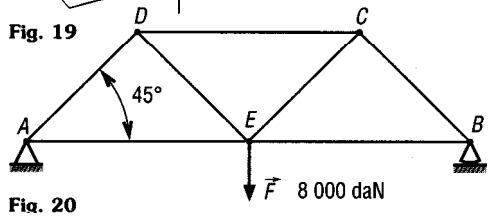


Fig. 20

3 Pour la ferme Pratt proposée, si $\vec{P} = 1\,000$ daN et $DG = 4$ m, déterminer les efforts dans toutes les barres de la structure ($\vec{P}$ schématise le poids de la toiture).

Réponse

$T_{AC} = T_{EF} = -3\,350$; $T_{AH} = T_{BF} = 3\,000$;
$T_{FD} = T_{DE} = -3\,350$; $T_{HG} = T_{GF} = 2\,000$;
$T_{CH} = T_{EF} = -1\,000$; $T_{DH} = T_{DF} = 1\,410$; $T_{DG} = 0$ daN.

❑ Reprendre l'exercice 3 avec la ferme de type Howe proposée.

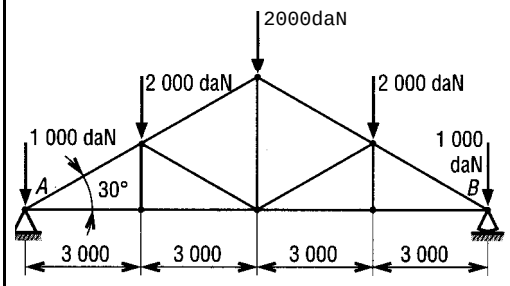


Fig. 22

5 Reprendre l'exercice 3 avec la ferme Polonceau proposée, à deux contrefiches.

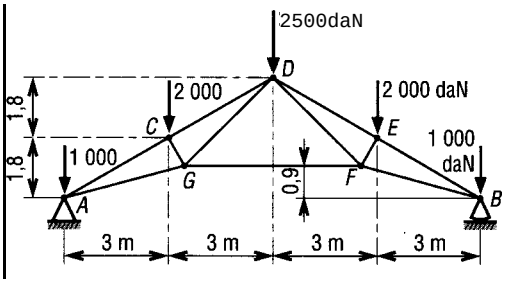


Fig. 23

❑ Reprendre l'exercice 3 avec la ferme Fink proposée. Les forces de 500 daN et de 1000 daN, en A, G, C, perpendiculaires aux barres, schématisent les actions exercées par le vent (dépression).

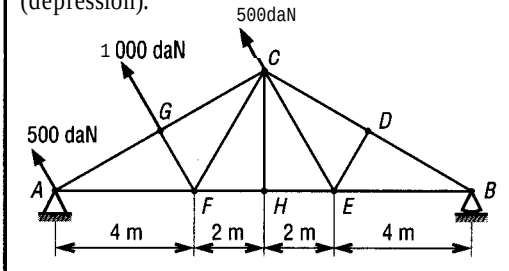


Fig. 24

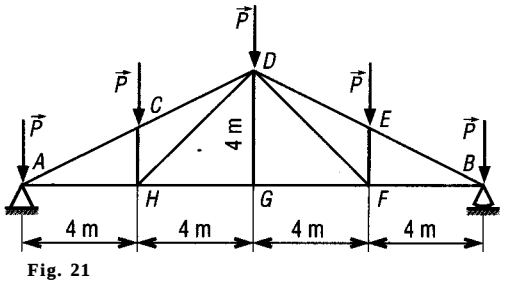


Fig. 21

7 Pour les exercices 7, 8 et 9 : classer les structures proposées en mobile (ou non rigide), isostatique, hyperstatique (totalement ou partiellement).

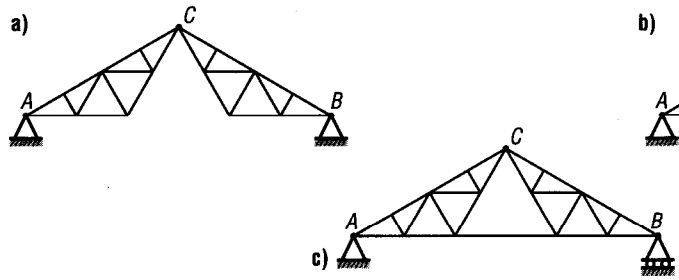


Fig. 25

8

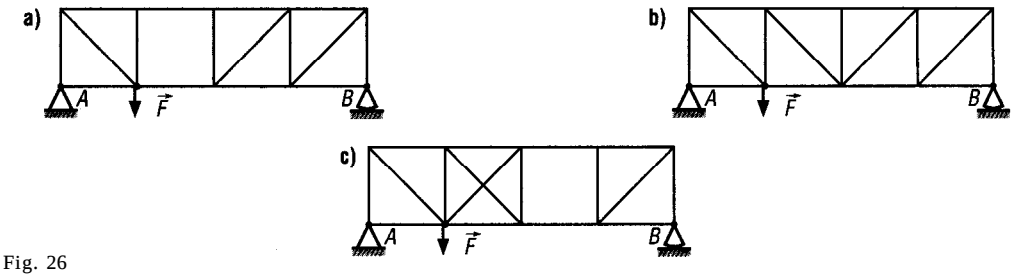


Fig. 26

9

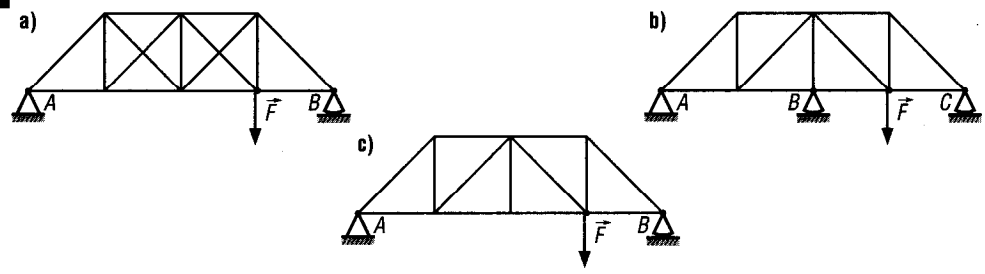


Fig. 27

❑ Pour la ferme Polonceau proposée, déterminer les efforts exercés dans les barres CD, DE et *EF*.

Réponse

$T_{CD} = -9\,550$ daN,
$T_{DE} = 6\,910$ daN,
$T_{EF} = 2\,920$ daN.

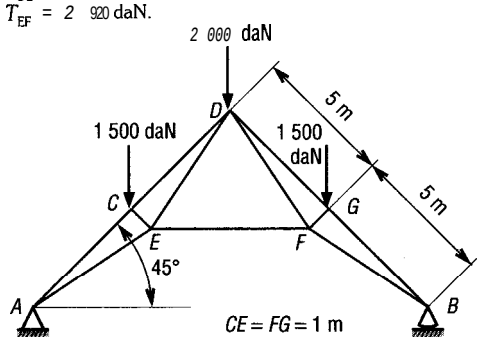


Fig. 28

❑ Pour la structure proposée, tous les angles sont de 30" ou de 60". Les charges exercées sont de 30 kN en C et de 50 kN en *E*. Déterminer les actions exercées dans les barres *DE*, *DH* et *GH*.

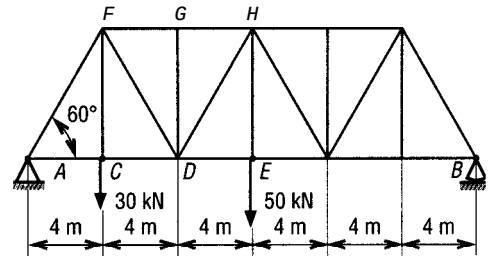


Fig. 29

12 Pour la structure de pont de type Howe proposée, déterminer les efforts dans les barres CD, DE et DE

Réponse

$T_{CD} = -3\,500$ daN,
$T_{DE} = -2\,120$ daN,
$T_{DF} = 0$.

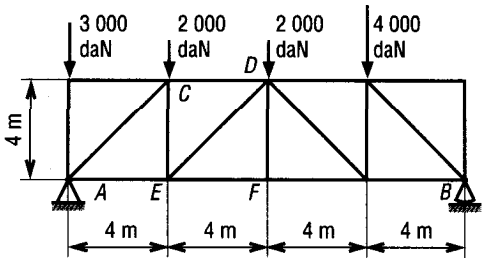


Fig. 30

❑ La structure proposée supporte un panneau d'affichage accroché en G, F et C. La pression du vent sur le panneau est de 1 000 $N.m^{-1}$ par mètre de structure. Déterminer les actions exercées dans toutes les barres.

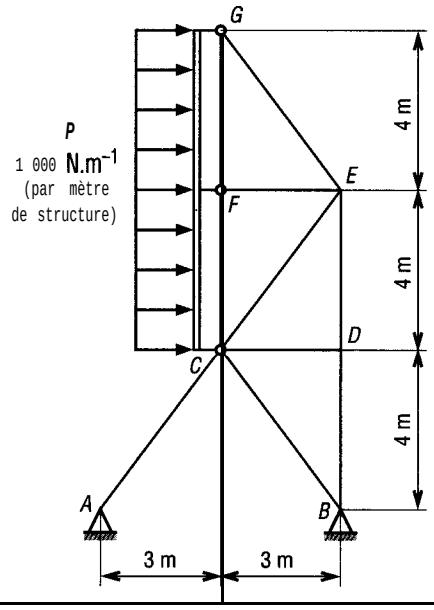


Fig. 31

❑ Pour la structure de pont en k proposée :

a) Déterminer les actions sur les appuis en A et B.

b) Déterminer les actions dans les barres CD, ED, EG et FG.

Réponse

$A_x = -1800$ daN ; $A_y = 1\,650$ daN ; $B_y = 2\,550$;
$T_{ED} = 542$; $T_{CD} = -T_{FG} = -3\,330$; $T_{EG} = -542$ daN.

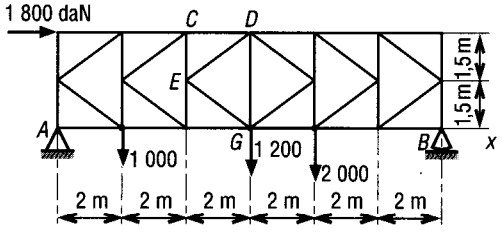


Fig. 32

15 Reprendre l'exercice 14 avec la ferme Fink proposée. Déterminer les actions exercées dans les barres CD, CE, DH et HF.

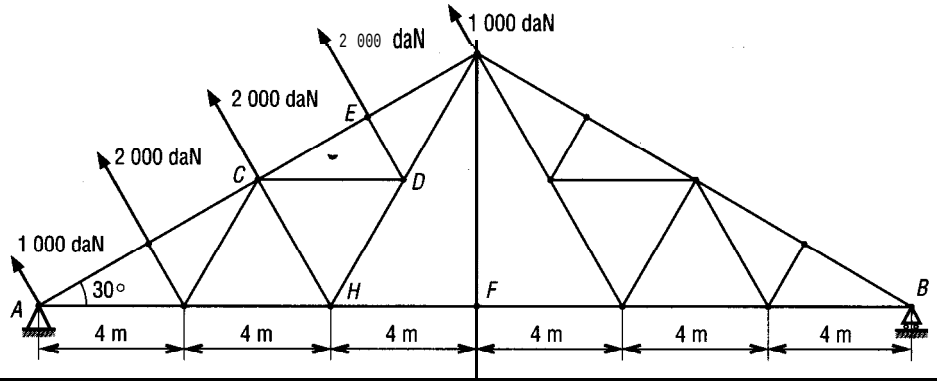


Fig. 33

❑ Pour le pylône proposé, l'action des câbles électriques est schématisée par les forces de 400 daN en M.

a) Déterminer les actions exercées par les appuis en A et B.

b) Déterminer les efforts exercés dans toutes les barres de la structure.

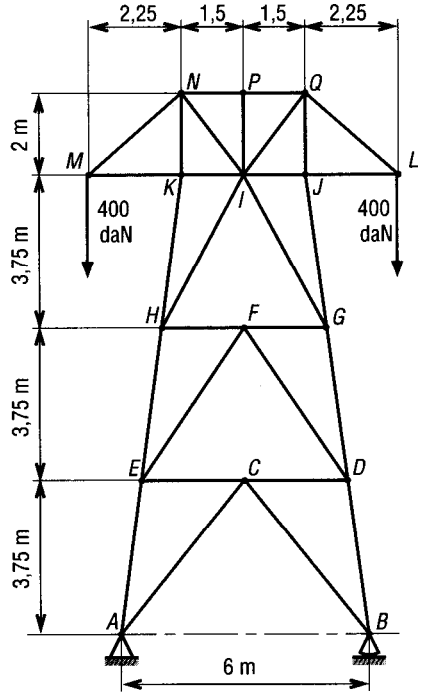


Fig. 34

❑ Reprendre l'exercice 16 avec le support- de réservoir proposé. Les forces P (3 000 daN), verticales, en J et K, schématisent le poids du réservoir et les forces $\vec{F}$ (1 000 daN), horizontales, en J et G, l'action du vent.

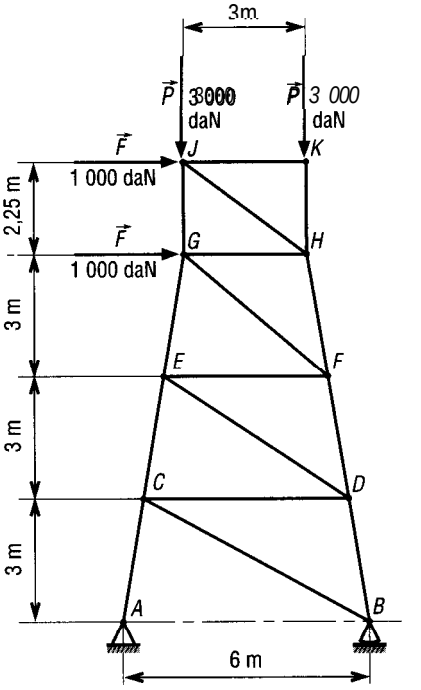


Fig. 35

❑ Une structure se compose de deux arcs symétriques en treillis AC et BC articulés en A, B et C. $\vec{F_1}$ (horizontale, 30 kN) et $\vec{F_2}$ (40 kN, verticale) schématisent les efforts supportés. a) Déterminer les actions exercées par les appuis en A, B et C. b) Déterminer les efforts exercés dans toutes les barres de la structure.

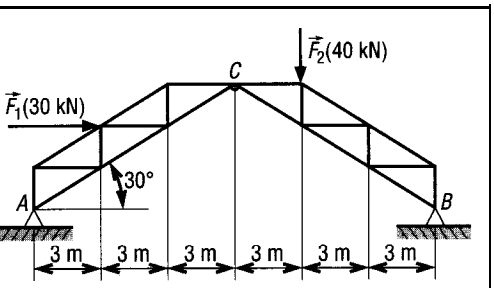


Fig. 36

❑ La structure de stade proposée supporte les charges de 15 kN en E et K, et de 30 kN en H et F (poids de la toiture). Déterminer les actions exercées dans les barres EC, DC et FG.

Réponse

F_{EC} = 225 kN (T)
F_{DC} = 180 kN (C)
F_{FG} = 45 kN (C)

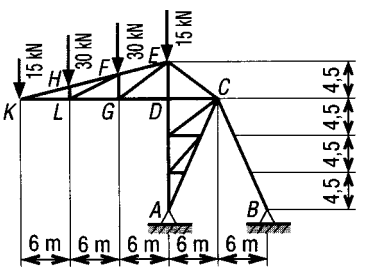


Fig. 37

7 FROTTEMENT

OBJECTIFS

- Définir les notions d'adhérence, de frottement et les paramètres utilisés pour l'étude du frottement.
- Énoncer les lois du frottement.
- Décrire les notions de résistance au roulement et d'arc-boutement.
- Développer les principales applications du frottement : coins et cônes, palier lisse, système vis-écrou, liens flexibles, roues libres.

Dans les chapitres précédents, les actions mécaniques de contact ont été schématisées par des vecteurs-forces perpendiculaires (ou normales) aux surfaces en contact, les frottements étaient négligés. Cette schématisation amène des erreurs systématiques relativement faibles dans la plupart des problèmes. Cependant, dans un certain nombre de cas, la prise en compte du frottement est nécessaire, soit pour en diminuer les effets (pertes d'énergie, amélioration du rendement, etc.), soit pour l'utiliser avec bénéfice (freins, embrayages, courroies, arc-boutement, équilibre ou stabilité de certains mécanismes, etc.).

1 • Adhérence, frottement et grandeurs liées à l'étude du frottement

Si deux surfaces en contact se déplacent ou glissent l'une par rapport à l'autre, on dit qu'il y a frottement.
Lorsque ces deux surfaces tendent à glisser, mais ne se déplacent pas, on dit qu'il y a adhérence.

1. Exemple 1

Soit un colis (1) de poids $\vec{P}$ et de centre de gravité G, en équilibre sur un plan horizontal (0). Analysons le comportement du colis et l'évolution des actions de contact (plan/colis) lorsqu'on exerce une poussée latérale $\vec{F}$ graduellement croissante.

a) Cas du repos

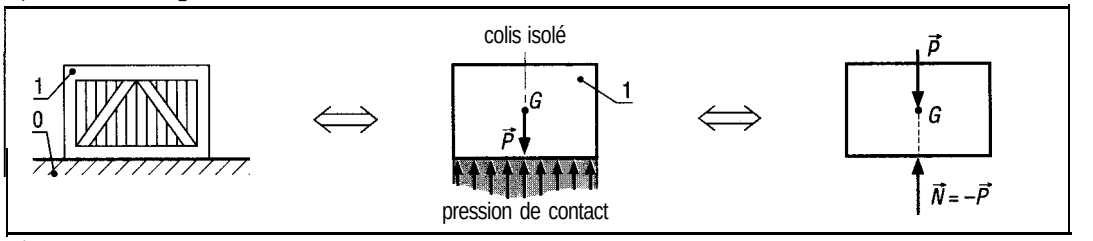


Fig. 1

$\vec{N}$ schématise la résultante des actions de contact exercées par le sol sur le colis. Celui-ci est en équilibre sous l'action des deux forces $\vec{N}$ et $\vec{P}$ qui doivent être égales et opposées (ligne d'action : la verticale passant par G).

Si on exerce sur le colis (1) une poussée latérale $\vec{F}$ passant par le centre de gravité G, deux cas de figure sont possibles : adhérence ou frottement.

b) Cas de l'adhérence

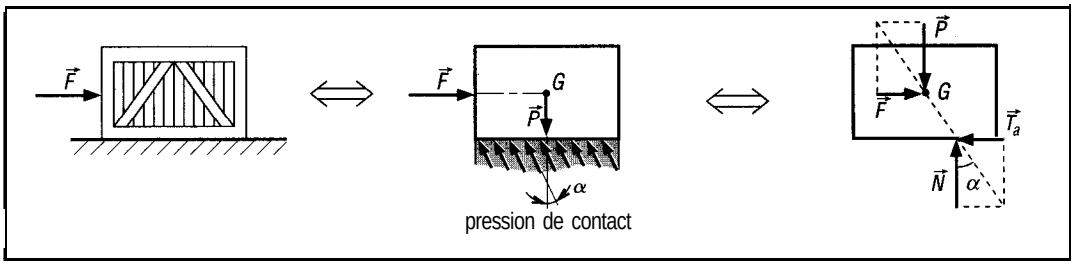


Fig. 2

Il n'y a pas de mouvement, le colis est en équilibre et l'application du principe fondamental met en évidence une force d'adhérence $\vec{T}_a$ égale à $\vec{F}$ et de sens oppose.

$\vec{T}_a$ s'oppose au déplacement éventuel de l'objet vers la droite.

$\vec{N}$ a la même valeur qu'au a) : $N = P$.

Si $\vec{F}$ devient assez grande ($\vec{F} > \vec{F}_{limite}$), l'objet se met à glisser dans le même sens que $\vec{F}$ et on passe en phase frottement.

La valeur limite permet de définir le rapport de frottement statique μ_s (ou f_s), encore appelé coefficient de frottement d'adhérence tel que :

$$\mu_S = f_S = \frac{F_{limite}}{N} = \frac{T_{a\,limite}}{N} =$$ rapport de frottement statique (ou *coefficient de frottement d'adhérence*) ; μ (lire *mu*)

Remarque : de la même manière, on définit un angle de frottement statique (φ_s) ou angle de frottement d'adhérence tel que : $\mu_s = f_s = \tan \varphi_s = \tan (\alpha_{limite})$

c) Cas du frottement

Si pour le cas précédent, $F > F_{limite} = \mu_s . N$, le colis se met à glisser dans le plan horizontal. Il y a frottement entre le sol et le colis. Le glissement continuera à vitesse uniforme si $F = \mu . N$ (la valeur de μ IV étant légèrement inférieure à $\mu_s . N$). Le mouvement sera accéléré si F est supérieure à cette nouvelle valeur limite.

$N = P$	$\mu = f$ = facteur de frottement (ou coefficient de frottement)
$T = F = \mu . N$	
$f = \mu = \tan \varphi = \frac{T}{N}$	φ = angle de frottement

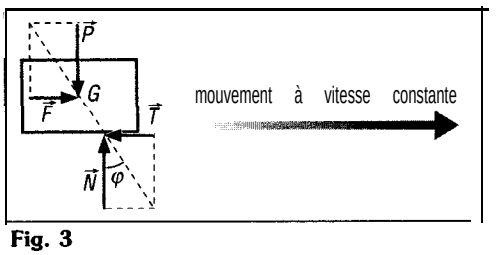


Fig. 3

Remarques

La force de frottement $T = \mu N = f N$ s'oppose au mouvement du colis et est à l'origine des pertes d'énergie par frottement. Si l'objet est arrêté il faudra, pour le remettre en mouvement, fournir un effort $F \geqslant \mu_s N$. Les phases observées sont résumées par le graphique figure 4.

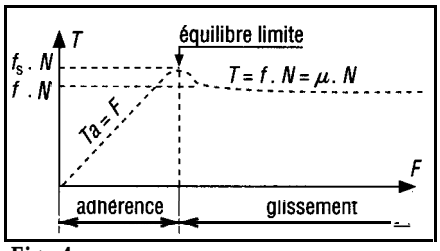


Fig. 4

2. Exemple 2

Posons le colis de l'exemple 1 sur un plan incliné (0) dont l'angle d'inclinaison (α) est variable. $\vec{A}$ schématise la résultante des actions de contact exercées par le plan sur le colis.

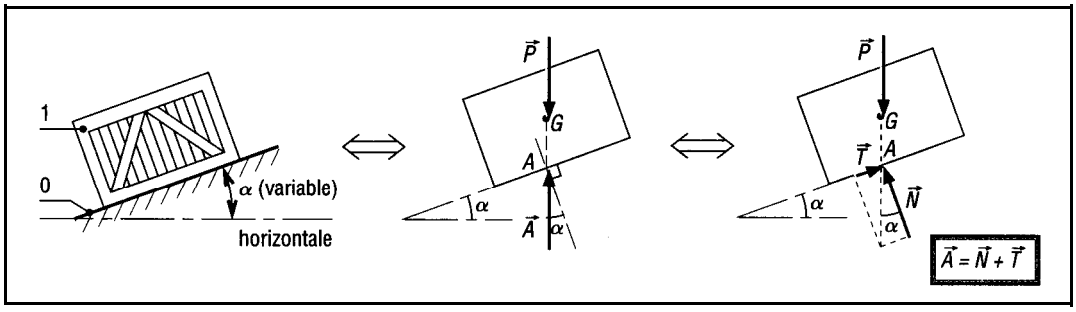


Fig. 5

Les phases et les propriétés précédentes sont retrouvées :

- Si $\alpha < \varphi_s$, la caisse en équilibre reste en équilibre ($\vec{A} = -\vec{P}$).
- Si $\alpha = \varphi$, la caisse en mouvement continue sa descente à vitesse constante.

Pour ce cas $T = f N = \mu N$ avec $N = P \cos a$.

- Si $\alpha > \varphi$, la caisse en mouvement continue sa descente à vitesse accélérée, T reste égale à μN et $N = P \cos a$.

3. Facteur ou coefficient de frottement

μ ou f, μ_s ou f_s, φ_s et φ ne dépendent ni de l'intensité des efforts exercés, ni de l'étendue des surfaces en contact. Ils dépendent essentiellement de la nature des matériaux en contact et dans une moindre mesure de la qualité (rugosité) des surfaces en contact, μ et φ varient aussi avec la vitesse relative de déplacement des surfaces en contact.

Valeurs indicatives de μ_s et μ	Adhérence $\mu_s = f_s = \tan \varphi_s$		Frottement (glissement) $\mu = f = \tan \varphi$	
nature des matériaux en contact	à sec	lubrifié	à sec	lubrifié
acier sur acier	0,18	0,12	0,15	0,09
acier sur fonte	0,19	0,1	0,16	0,08 à 0,04
acier sur bronze	0,11	0,1	0,1	0,09
téflon sur acier	0,04		0,04	
fonte sur bronze		0,1	0,2	0,08 à 0,04
nylon sur acier			0,35	0,12
bois sur bois	0,65	0,2	0,4 à 0,2	0,16 à 0,04
métaux sur bois	0,6 à 0,5	0,1	0,5 à 0,2	0,08 à 0,02
métal sur glace			0,02	
pneu voiture sur route	0,8		0,6	0,3 à 0,1 sur sol mouillé

4. Cône de frottement

Utilisé avec les résolutions graphiques, le cône de frottement permet de donner une "image" au frottement et simplifier les études.

Caractéristiques

- (A) est le point de contact entre les solides (1) et (2).
- (t) est le plan tangent en **A** au contact entre (1) et (2).
- $(\vec{n})$, appelée normale au contact, est perpendiculaire en **A à** (t).
- le cône de frottement est le cône de sommet A, d'axe $\vec{n}$, et de demi-angle au sommet φ (cône de frottement) ou φ_s (cône d'adhérence).

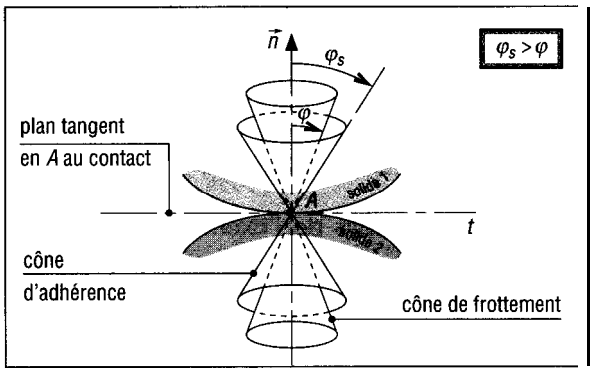


Fig. 6

Remarque : dans la plupart des exercices et dans un but de simplification, on confond adhérence et frottement ($\varphi_s = \varphi$ et $\mu_s = \mu = \tan \varphi$). Ce qui est vrai dans un plan l'est également dans toutes les directions de l'espace autour de l'axe $\vec{n}$.

II - Lois du frottement (lois de Coulomb)

Les lois sont exprimées pour deux solides (0) et (1) en contact en un point **A.** $\overrightarrow{A_{0/1}}$ schématise l'action exercée par 0 sur 1. Un cône de frottement est utilisé pour aider à la compréhension et simplifier les interprétations.

a) Cas de l'adhérence

- Il n'y a pas de mouvement.
- La force d'adhérence $\overrightarrow{T_a}$ s'oppose au mouvement éventuel de (1) par rapport à (0).
- $\overrightarrow{A_{0/1}}$ est contenue dans le cône de frottement d'adhérence. Autrement dit :

$\alpha \leqslant \varphi_s$	$T_a \leqslant \mu_s.N$

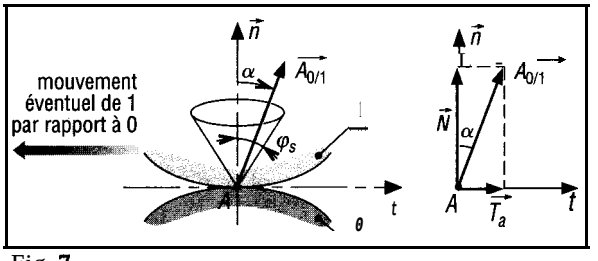


Fig. **7**

b) Cas de l'équilibre limite ou de l'équilibre strict

Il y a adhérence, on est dans le cas particulier où $\alpha = \varphi_s$ et $T_a = \mu_s.N = f_s.N$.
$\overrightarrow{A_{0/1}}$ est située sur le cône de frottement d'adhérence.

c) Cas du frottement avec glissement

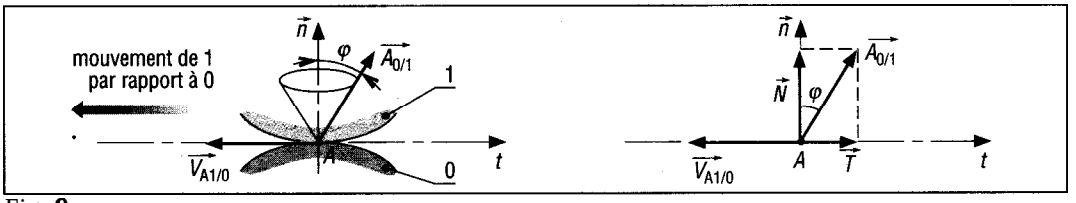


Fig. **8**

$V_{A1/0}$ caractérise la vitesse de glissement du point A appartenant au solide (1) par rapport au solide (0).

La force de frottement T'est opposée à $\overrightarrow{V_{A1/0}}$ (s'oppose au mouvement), $\overrightarrow{A_{0/1}}$ est située sur le cône de frottement. Autrement dit :

$$\alpha = \varphi \text{ et } T = \mu N = f.N \text{ avec } f = \tan \varphi$$

d) Exemple

La voiture proposée est en équilibre dans la position indiquée, les roues avant sont décollées du sol (pas de contact en A) et sont en contact en B avec un trottoir de hauteur h. Les frottements en B et D sont caractérisés par $f_B = f_D = 0{,}8$. $\overrightarrow{P}$(1 800 daN) schématise le poids du véhicule. Les roues arrière sont motrices et les roues avant porteuses. La voiture peut-elle monter sur le trottoir sans élan ?

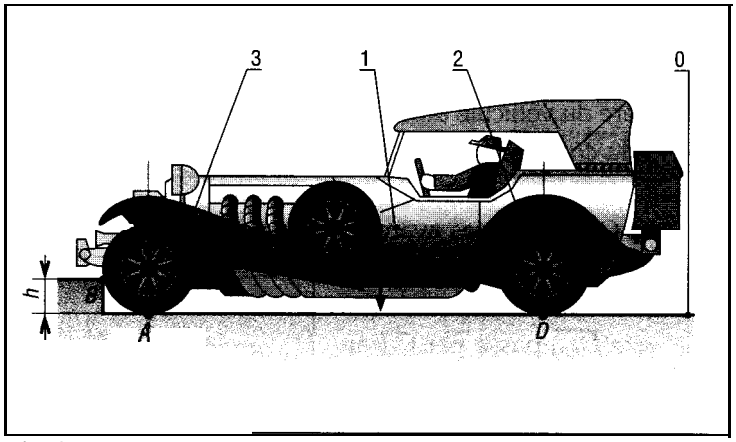


Fig. 9

Résolution

a) Isolons les roues avant (3).

Les roues (porteuses) sont soumises à l'action de deux forces égales et opposées dont la ligne d'action est AB :

$\overrightarrow{B_{0/3}} = -\overrightarrow{A_{1/3}}$

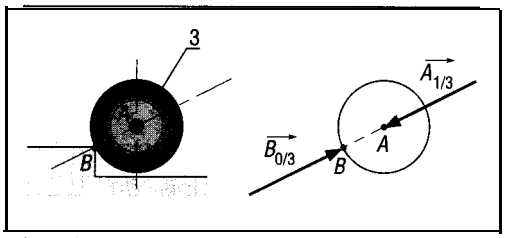


Fig. 10

b) Isolons l'ensemble du véhicule (1 + 2 + 3). Le véhicule est soumis à l'action de trois forces concourantes au point I (I est situé à l'intersection de $\overrightarrow{P}$ avec $\overrightarrow{B_{0/3}}$).

Bilan des forces extérieures			
$\overrightarrow{F_{ext}}$	***PS***	***D***	***I* (daN)**
$\overrightarrow{B_{0/3}}$	*B*	*AB*	?
$\overrightarrow{P}$	*G*	Verticale	1 800 daN
$\overrightarrow{D_{0/2}}$	*D*	?	?

Pour la configuration donnée, l'équilibre du véhicule impose que $\overrightarrow{D_{0/2}}$ passe par I, ce qui n'est possible que si $\alpha > \varphi$ ($\overrightarrow{D_{0/2}}$ en dehors du cône de frottement). On est en contradiction avec les lois du frottement, autrement dit, les roues arrière patinent en D sur le sol, la voiture ne peut pas monter sur le trottoir.

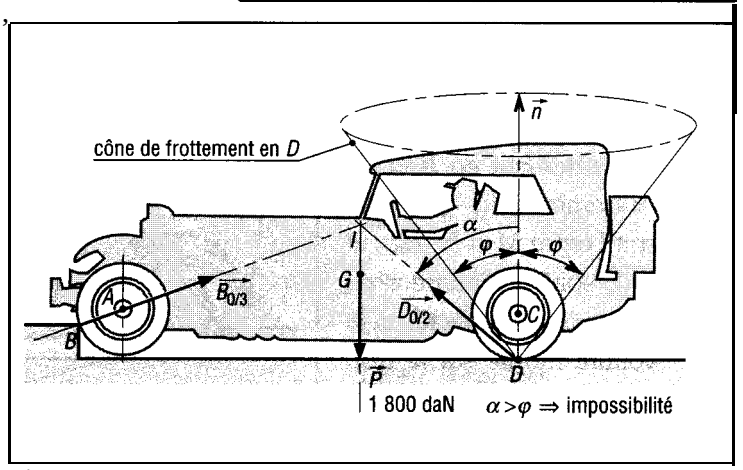


Fig. 11

Remarque 1 : la hauteur maximale (h_{limite}) que le véhicule peut grimper est obtenue lorsque les roues arrière sont à la limite de l'adhérence et du glissement ($\overrightarrow{D_{0/2}}$ est située sur le cône de frottement en D).

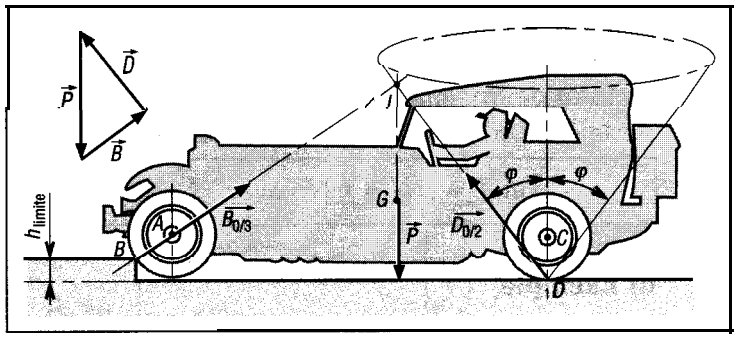


Fig. 12

Remarque 2 : les performances peuvent être améliorées en chargeant davantage l'arrière du véhicule afin de déplacer le centre de gravité G vers la droite et rapprocher ainsi I du cône de frottement en D.

c) Cas des roues avant motrices

Les roues arrière sont porteuses, il en résulte que $\overrightarrow{D_{0/2}}$ passe par C (raisonnement analogue à celui du paragraphe **a)** et est parallèle à $\overrightarrow{P}$. L'équilibre n'est possible que si $\overrightarrow{B_{0/3}}$ est Parallèle aux deux autres forces, ce qui implique que $\alpha_B > \varphi$. On est encore en contradiction avec les lois du frottement et les roues avant patinent en B.

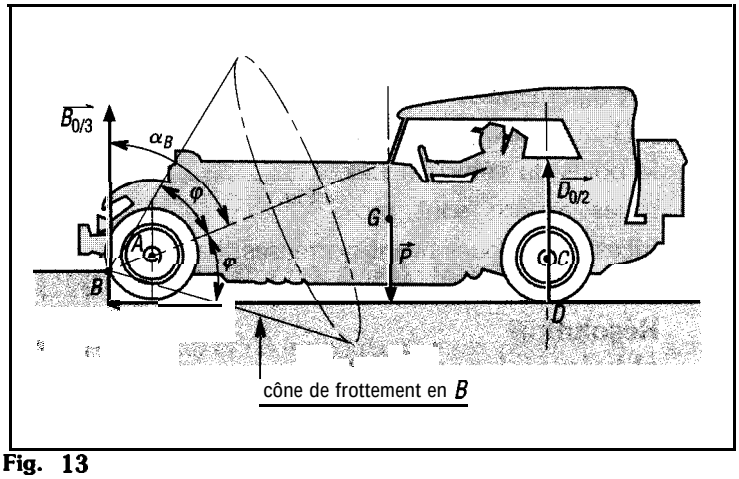


Fig. 13

d) Cas de quatre roues motrices

11 existe une infinité de solutions possibles. Seule condition : le point d'intersection I des trois forces concourantes doit être situé sur 'la direction de $\overrightarrow{P}$, entre les points limites M et N des cônes de frottement en B et D. Autrement dit, quel que soit I entre M et N, $\overrightarrow{B_{0/3}}$ et $\overrightarrow{D_{0/2}}$ sont à l'intérieur de leurs cônes respectifs et la voiture monte sur le trottoir. Une résolution est possible en supposant :

a,= a,.

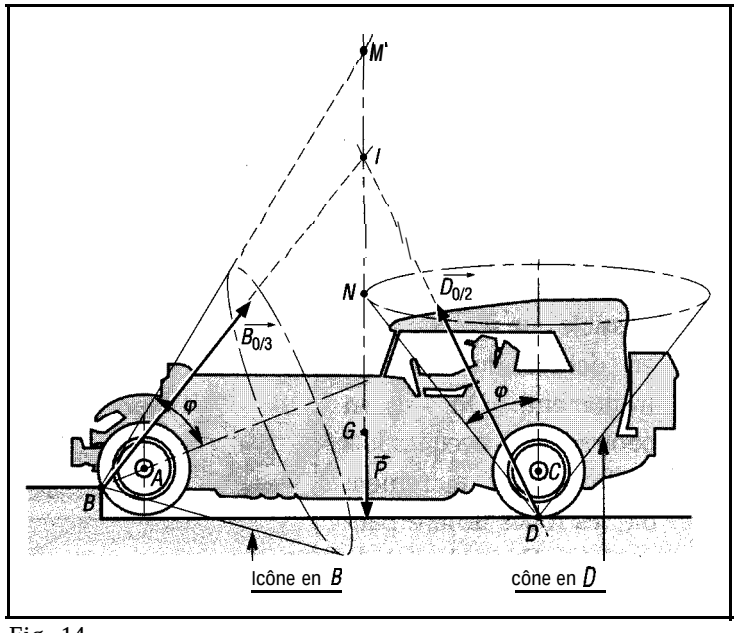


Fig. 14

III - Applications usuelles du frottement

1. Coins et cônes

a) Principe

Un coin est un organe simple permettant de transformer une charge appliquée en une autre, beaucoup plus grande, dans une direction approximativement perpendiculaire.

Exemple : cale de réglage à pente

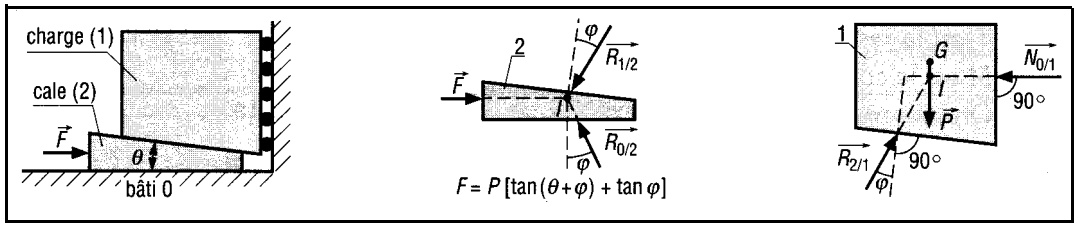


Fig. 15

La cale à pente (2) permet de soulever la charge (1) de poids $\vec{P}$. En général, les équilibres de solides se ramènent à trois forces concourantes et des hypothèses supplémentaires sont indispensables pour placer les diverses résultantes.

b) Formules utiles

Au serrage

$$F_s = P[\tan(\theta_1 + \varphi_1) + \tan(\theta_2 + \varphi_2)]$$

En déverrouillage

$$F_d = P[\tan(\theta_1 - \varphi_1) + \tan(\theta_2 - \varphi_2)]$$

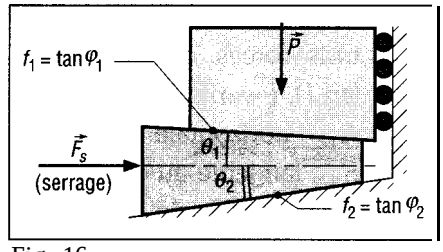


Fig. 16

c) Assemblage par cônes

Les assemblages par cônes sont de la même famille.

Si p est la pression de contact entre les deux cônes, celle-ci doit être inférieure à la pression de matage.

Il y a coincement entre les cônes lorsque a $< \varphi$.

La conicité C est égale à : $C = \dfrac{D-d}{L}$

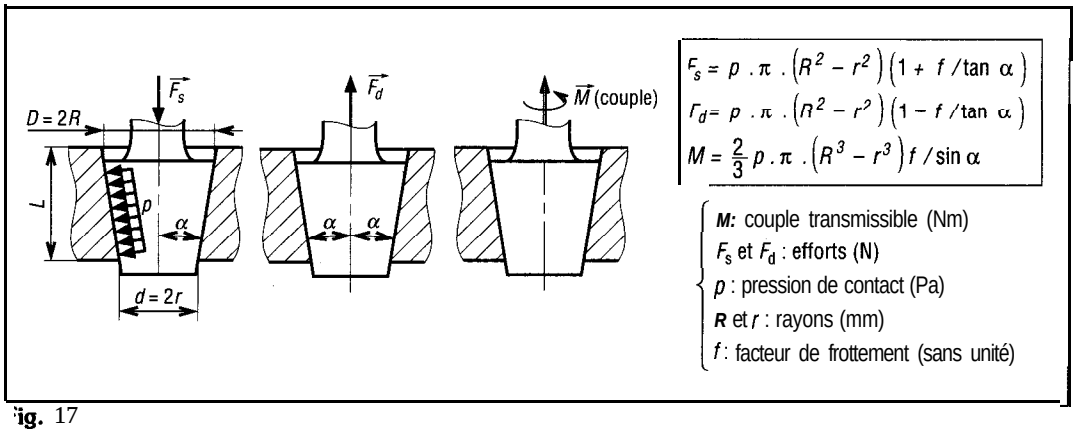


Fig. 17

2. Palier lisse, coussinet et articulations cylindriques

On se place dans le cas d'un fonctionnement à sec ou légèrement lubrifié (pas de fonctionnement hydrodynamique).

$\overrightarrow{F}$ schématise la charge sur l'arbre ou sur le palier.
f = tan φ caractérise le frottement entre arbre et logement.
$\overrightarrow{A_{0/1}} = \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T}$, en A, est la résultante des actions exercées par le logement sur l'arbre. A,/; est tangente au cercle de centre 0 et de rayon $r = R$ sin φ.
Test la résultante des forces de frottement.
M est le couple nécessaire pour vaincre le frottement.
On montre :

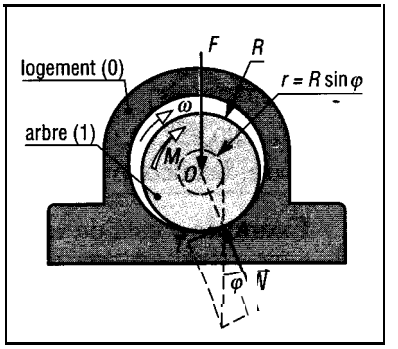


Fig. 18

$$M = F \cdot r = F R \sin \varphi = F \cdot f \cdot R = \mu \cdot F \cdot R \qquad (\varphi \text{ faible})$$

Exemple : prenons le cas d'un levier articulé transmettant un effort A à une barre (1) articulée en A. $\overrightarrow{F}$ (150 N) schématise l'action de l'opérateur, $\mu = f$ = tan φ = 0,32. Déterminons les actions exercées par la tige $(\overrightarrow{A})$ et celles entre 3 et 2 $(\overrightarrow{R_{3/2}})$ à l'équilibre.

Résolution : le levier 2 est soumis à l'action de trois forces concourantes (en I), $\overrightarrow{F}$ verticale (150 N) ; $\overrightarrow{A_{1/2}}$ horizontale en A ; $\overrightarrow{R_{3/2}}$ tangente au cercle R sin φ = 65 sin φ = 19,8 s'oppose au mouvement éventuel de 2 par rapport à 3.

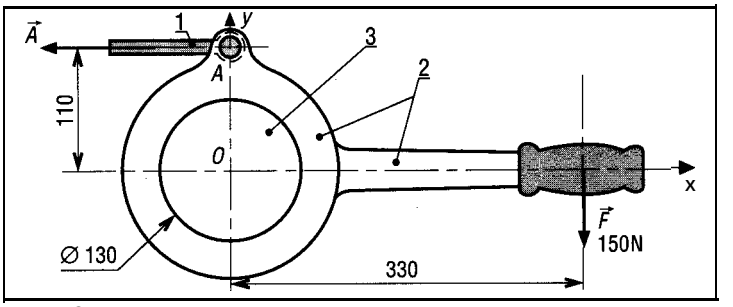


Fig. 19

Résultats

$A_{1/2} \simeq 370$ N
$R_{3/2} \simeq 400$ N

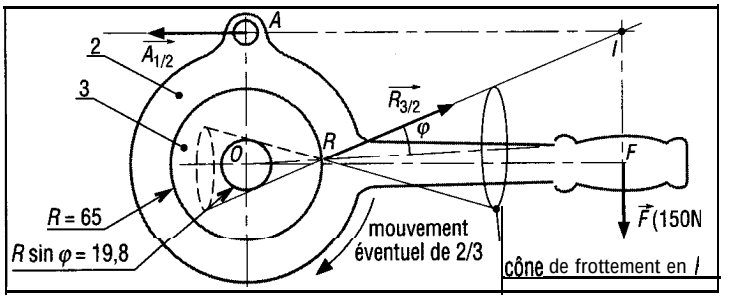


Fig. 20

3. Paliers à butée, disques de friction

Les paliers à butée sont utilisés pour épauler ou arrêter les arbres et les axes de transmission. Les disques de friction, analogues dans le principe, sont employés dans les freins et embrayages.

Formules utiles : $f = \mu$ caractérise le frottement entre les surfaces frottantes, F est l'effort presseur et M le couple transmissible entre (1) et (2).

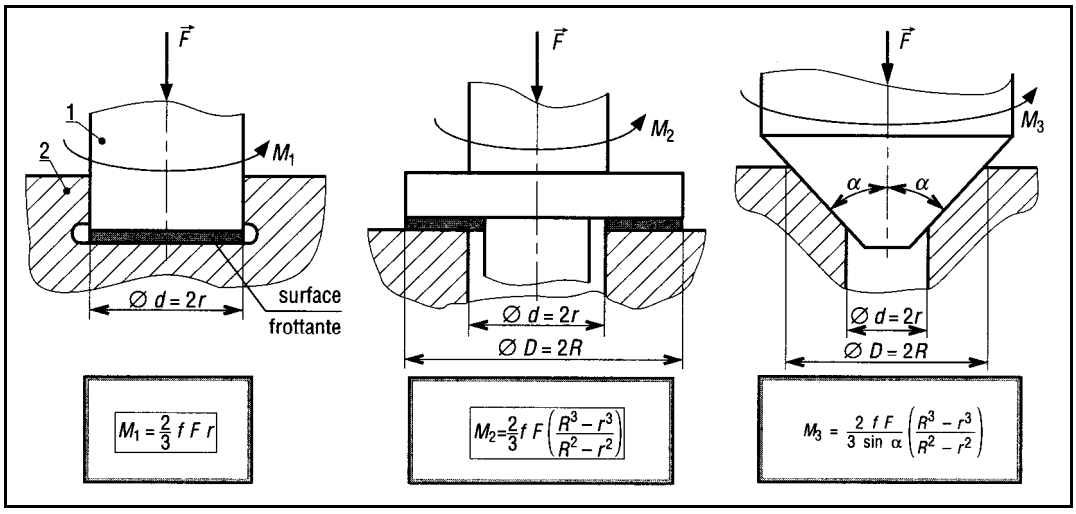


Fig. 21

4. Système vis-écrou

Afin de simplifier l'étude, prenons le cas d'un filet carré (non normalisé) : a est l'angle d'hélice ; p le pas ; r le rayon moyen ; F la charge axiale sur la vis ; C_m le couple nécessaire à la montée de la vis ; C_d le couple nécessaire à la descente de la vis.
$f = \mu = \tan \varphi$ est le frottement entre vis et écrou.
L'étude est dérivée de celle du mécanisme à coin (paragraphe 1). Le filet peut être comparé à un coin enroulé autour d'un cylindre (angle coin = angle hélice).

$$C_m = F \cdot r \tan(\alpha + \varphi)$$

$$C_d = F \cdot r \tan(\varphi - \alpha)$$
cas $\alpha < \varphi$ de l'irréversibilité

$$C'_d = F \cdot r \tan(\alpha - \varphi)$$

C', est le couple nécessaire au maintien pendant la descente dans le cas de la réversibilité a $> \varphi$.

Remarque : C'_d a même sens que C_m alors que C_d est de sens opposé.

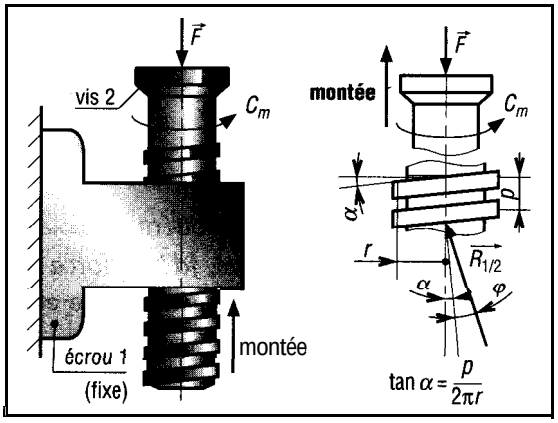


Fig. 22

h-réversibilité : l'irréversibilité est la propriété qui permet à un écrou de ne pas se desserrer après avoir été bloqué. Elle est obtenue si a $< \varphi$.
Dans le cas de l'irréversibilité, la vis soumise à la charge F reste en place sans couple supplémentaire.
Si le système est réversible (a $> \varphi$), un couple supplémentaire C', sera nécessaire pour maintenir la vis en place. Dans le cas contraire, la vis descend seule sous l'action de $\vec{F}$.

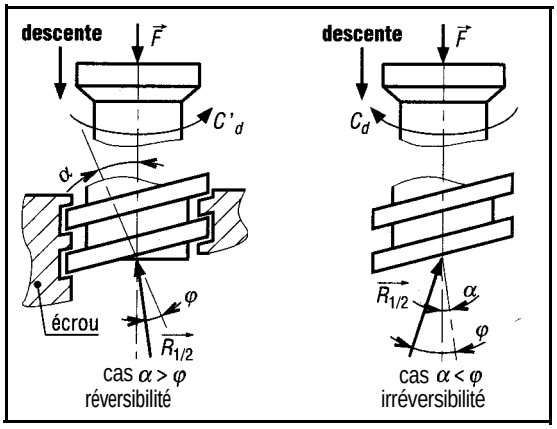


Fig. 23

Rendements (filet carré)

À la montée : $\eta = \dfrac{\tan \alpha}{\tan (\alpha + \varphi)}$

À la descente ($\alpha > \varphi$) : $\eta = \dfrac{\tan \alpha}{\tan (\alpha - \varphi)}$

Cas d'un filet triangulaire ISO ($\theta = 60°$, α = angle d'hélice)

$$C_m = F \cdot r \, \frac{\tan \alpha + f\left(1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \alpha\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - f \cdot \tan \alpha \left(1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \alpha\right)^{\frac{1}{2}}}$$

5. liens flexibles (courroies, câbles, etc.)

Les liens flexibles peuvent être des câbles, cordages, bandes de freins, courroies.. . $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$ schématisent la tension du lien ($\overrightarrow{T_2} > \overrightarrow{T_1}$) et β l'angle d'enroulement sur la poulie ou le tambour.

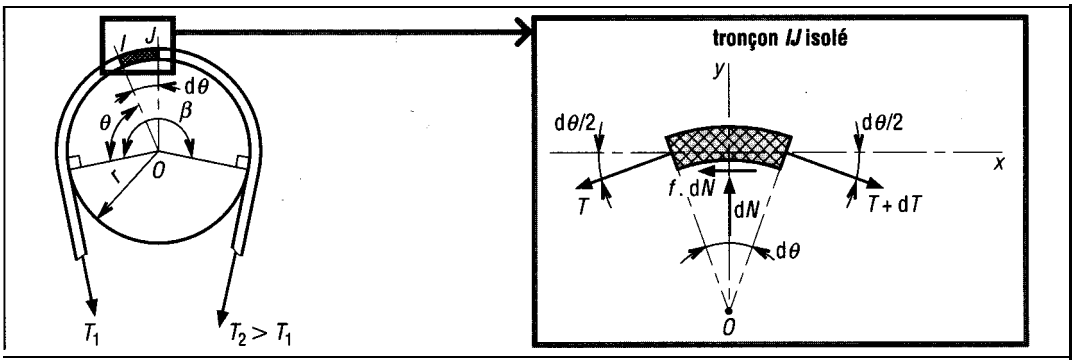


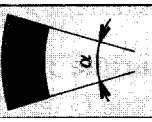
Fig. 24

La relation de base s'obtient en isolant un tronçon élémentaire IJ ($d\theta$ très petit, dN schématise l'effort normal, $f dN$ la force de frottement avec le tambour et dT l'accroissement de tension du lien). On montre (e exponentielle) :

$$T_2 = T_1 \cdot e^{f\beta}$$

$$T_2 = T_1 e^{\left(\frac{2 f \beta}{\sin \alpha}\right)}$$

(courroie trapézoïdale)



Exemple : déterminons le rapport des tensions d'une corde enroulée sur un tambour dans le cas d'un enroulement d'un demi-tour et dans le cas d'un tour et demi ($\mu = f = 0{,}25$).

a) Dans le cas d'un 1/2 tour : $\beta = \pi$ et $T_2 = T_1 \, e^{(0{,}25 \times \pi)} = 2{,}2 \, T_1$.

b) Dans le cas d'un tour et demi :

$\beta = 3\pi$ et

$T_2 = T_1 \, e^{(0{,}25 \times 3 \times \pi)} = 10{,}6 \, T_1$

Remarque : T_2 est multipliée par 5 environ en faisant un tour supplémentaire.

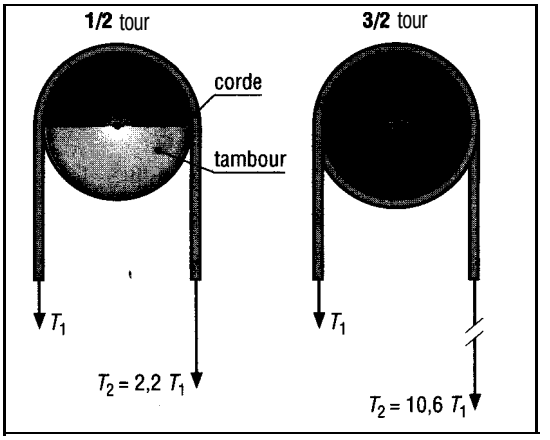


Fig. 25

IV • Résistance au roulement

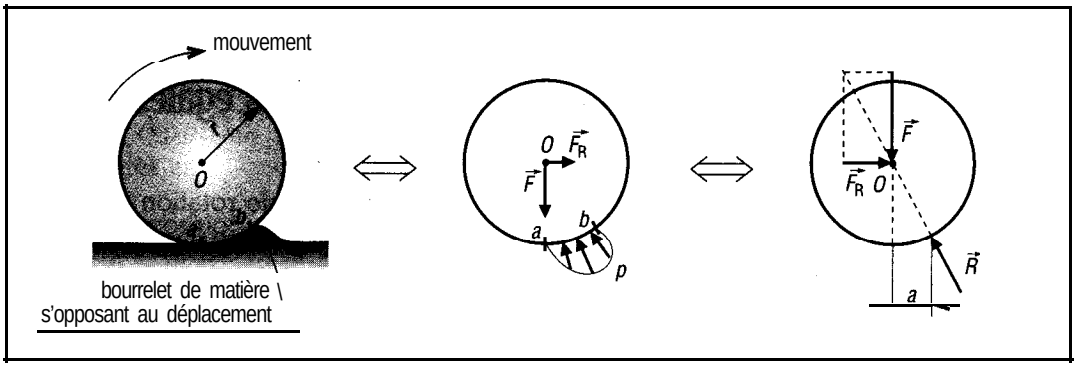


Fig. 26

Au cours du roulement sous la charge $\vec{F}$, un bourrelet de matière se forme devant l'élément roulant et s'oppose au mouvement, c'est la résistance au roulement.
$\vec{R}$ schématise la résultante des pressions de contact exercées par le bourrelet sur l'élément roulant entre a et b.
$\vec{F_R}$ représente la force qu'il faut exercer pour assurer ou maintenir le roulement de l'élément roulant.

L'application du principe fondamental de la statique donne :

$F_R = \frac{a}{r} F$ facteur a

rayon de

a coefficient de résistance au roulement

$f_R = \frac{a}{r}$ · f t de frottement de roulement

r l'élément roulant

Remarque : a dépend de nombreux paramètres : élasticité des matériaux, rayon de la roue, vitesse de déplacement, rugosité des surfaces, etc.

Matériaux en contact	a (mm)
acier sur acier	0,4
fonte sur acier	0,5
élastomère sur bitume	3 à 15
pneu sur bitume	20 à 30
roue métallique sur béton	10 à 15
roue wagon sur rail	0,5 à 1

Dispositifs	f_R
roulements à billes	0,0015
roulements à rouleaux	0,002
roulements à aiguilles	0,004

V • Arc-boutement

Régulièrement utilisé, l'arc-boutement est une conséquence du frottement et de l'adhérence. De nombreux dispositifs fonctionnent sur ce principe : serre-joint, échelle, roue libre, serrage par excentrique.. .
Dans certains cas (coulisseaux, etc.), l'arc-boutement engendre des blocages intempestifs et est à proscrire.

Définition : pour un solide soumis à l'action de n forces extérieures, on dit qu'il y a arc-boutement chaque fois que le phénomène de frottement provoque une impossibilité de mouvement (ou l'équilibre), quelle que soit l'intensité des forces mises en jeu.

1. Arc-boutement sous l'action de deux forces égales et opposées

Exemple : roue libre

Très utilisées, les roues libres transmettent le mouvement de rotation reçu uniquement dans un seul sens (embrayage ou blocage dans un sens, débrayage dans l'autre). Elles peuvent, selon les montages, assurer des dépassements, des indexages, des antidévirages ou des antiretours.

Principe

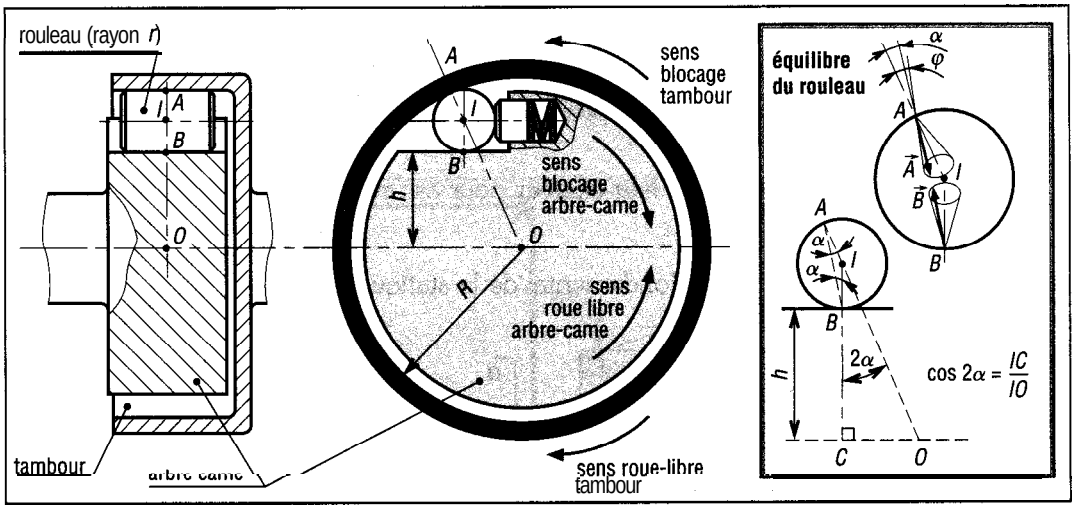


Fig. 27

Le poids du rouleau et l'action du ressort sont négligeables devant les résultantes $\vec{A}$ et $\vec{B}$. Le rouleau est soumis à l'action de deux forces $\vec{A}$ et $\vec{B}$ qui en cas d'équilibre doivent être égales et opposées ($\vec{A} = -\vec{B}$, ligne d'action AB). D'après les lois du frottement, l'équilibre n'est possible que si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont contenues dans leurs cônes de frottement respectifs en A et B. Il en résulte que l'angle d'inclinaison (or) de la direction AB par rapport à la droite OA doit être inférieur à l'angle de frottement (φ) : $\alpha < \varphi$. De même, les paramètres R, r, h, a de la roue libre sont liés par la relation :

$$\cos 2\alpha = \frac{h + r}{R - r}$$

2. Arc-boutement sous l'action de trois forces et plus

Le dispositif expérimental proposé figure 28 se comporte comme de nombreux mécanismes usuels basés sur l'arc-boutement (serre-joint, etc.).

L'appareil se compose d'un coulisseau (1 + 2 + 3), (2) et (3) sont des piges ou des axes encastrés dans la plaque (1). Un crochet réglable (4 + 6), qui peut être déplacé dans une rainure oblongue entre M et N supporte la charge $\vec{P}$.

Remarques : on peut considérer $\vec{P}$ comme une sorte de résultante d'actions diverses qui seraient exercées sur le coulisseau. Pour certaines positions de $\vec{P}$ entre M et N ($X > X_0$), le coulisseau reste en équilibre en s'arc-boutant en A et B. Pour d'autres positions ($X < X_0$) il y a glissement vers le bas de celui-ci.

Équilibre de 1 + 2 + 3

– Il y a frottement ou adhérence en A et B et les actions $\overrightarrow{A_{5/3}}$ et $\overrightarrow{B_{5/2}}$ s'opposent au glissement vers le bas du coulisseau. À l'équilibre, $\overrightarrow{A_{5/3}}$, $\overrightarrow{B_{5/2}}$ et $\overrightarrow{P}$ sont concourantes en I.

– Pour la position particulière X = X_0, $\overrightarrow{A_{5/3}}$ et $\overrightarrow{B_{5/2}}$ sont situées sur leur cône de frottement et les trois forces sont concourantes en I_0.

– Si X < X_0, l'équilibre n'est possible que si $\overrightarrow{A_{5/3}}$ ou $\overrightarrow{B_{5/2}}$ est en dehors de son cône de frottement, ce qui est en contradiction avec les lois du frottement. Pour ces cas, il y a toujours glissement.

– Si $\varphi_A = \varphi_B = \varphi$ on montre que :

$$X_0 = \frac{h}{2\tan\varphi} - \frac{a}{2}$$

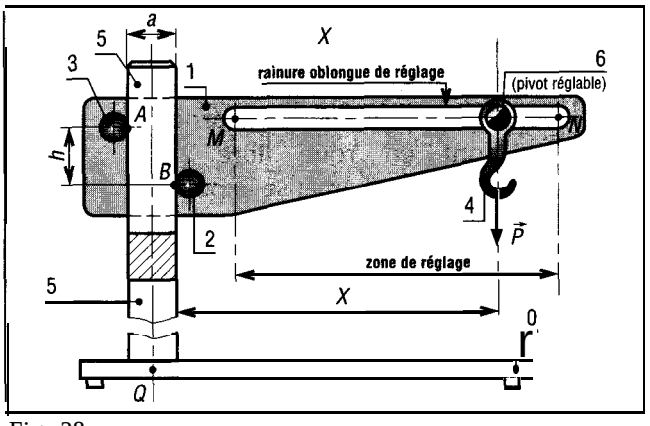


Fig. 28

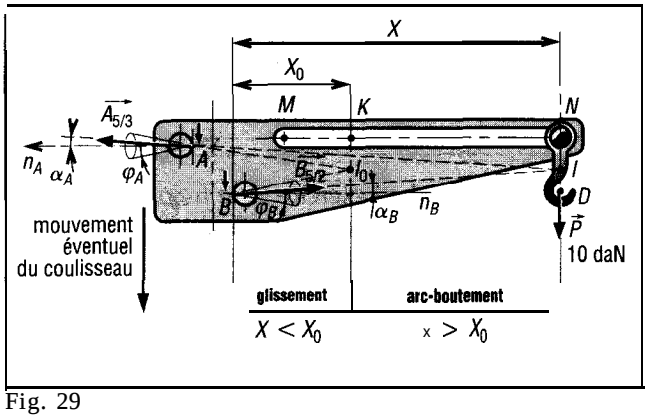


Fig. 29

EXERCICES À RÉSOUDRE

❑ La clé à excentrique proposée permet de serrer des écrous ou des vis (3) de dimensions différentes. Le profil en came du manche (1) est réalisé de façon que la droite AD conserve une direction fixe (30" par rapport au manche), quel que soit l'écrou. $\overrightarrow{F}$(10 daN), perpendiculaire au manche, schématise l'action de l'opérateur ; les poids sont négligés ; le frottement en A est $\mu_A = f_A = 0{,}15$.

a) Isoler le manche (1), en déduire les actions exercées en A et B.

b) Déterminer le couple de serrage sur l'écrou.

Réponse

Rép. : A, = – B_x = 62,5 daN ; B_y = 59,8 ; *A*, = 49,8 ; *C* = 13,4 Nm.

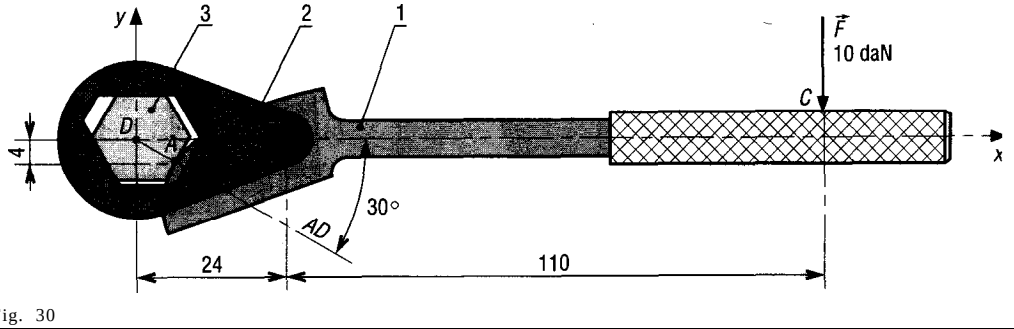


Fig. 30

2 Une voiture est à l'arrêt dans une pente de 20 % ; le frein à main actionné agit sur les roues avant, les roues arrière sont en roue libre. $\vec{P}$ (1 335 daN) schématise le poids du véhicule, les actions exercées sur les roues en A et B sont schématisées par des vecteurs-forces passant par ces mêmes points. Le frottement en A est caractérisé par $\mu_A = f_A = 0{,}6$.
a) Isoler l'ensemble de la voiture (1). L'équilibre de la voiture est-il possible ? Si oui, déterminer les actions en A et B.
b) À partir de quelle pente y a-t-il glissement du véhicule ?

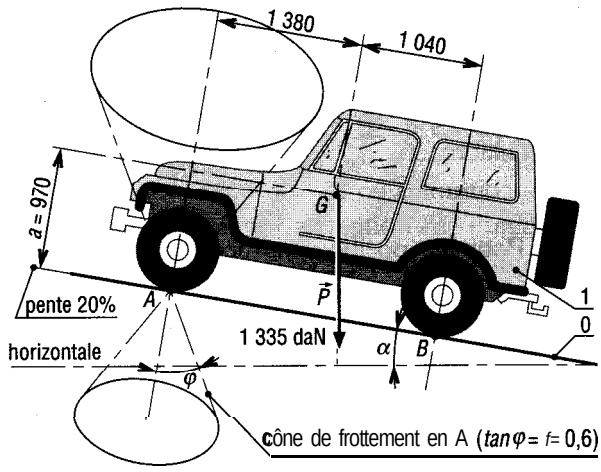


Fig. 31

3 Reprendre l'exercice 2, le frein à main agit sur les roues arrière et les roues avant sont en roue libre, $\mu_B = f_B = 0{,}6$.

Réponse

pas de glissement ; A = 458 daN ; B = 891 daN.

❑ Reprendre l'exercice 2, le frein à main est relâché et le frein à pied, actionné, agit en A et B ; $f_A = f_B = 0{,}6$.

Réponse

trois forces parallèles ; pas de glissement ; A = 467 daN ; *B = 868* daN.

5 La position de la pièce (2), supportant une charge verticale $\vec{P}$ (2 000 daN), est ajustée en hauteur par une cale en pente (1), angle de 5,71°. Les frottements entre (0 et 1) (1 et 2) sont caractérisés par $\mu = f = 0{,}15$. Le frottement entre 0 et 2 est négligé. a) À partir de quelle valeur de $\vec{F}$ le levage de (2) est-il possible ? b) Quelle force faut-il exercer pour abaisser la charge ?

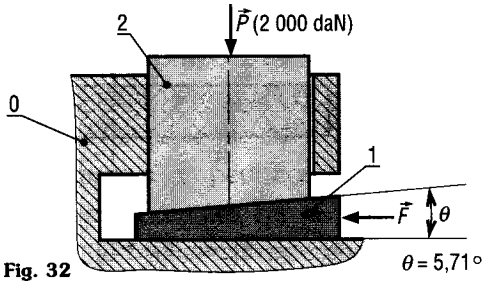


Fig. 32

❑ Reprendre l'exercice 5, avec $f = 0{,}35$, le frottement entre 0 et 2 n'est pas négligé, $\theta = 8°$.

Réponse

$F = 2\,120$ daN ; $F' = -1\,030$ daN.

7 Une presse à vis se compose d'une vis à filet carré 2 (pas 8 mm) manoeuvrée par un volant 3, un bâti fie 1 et une plaque de serrage 4 ? Les frottements entre les filets de la vis et ceux de l'écrou sont caractérisés par $\mu = f = 0{,}2$.
a) Déterminer le couple nécessaire à exercer sur le volant pour engendrer un effort presseur de 400 daN.
b) Quel couple faut-il fournir pour desserrer la pièce 5 ?

Réponse

$C_m = 13{,}8$ Nm ; $C_d = 4{,}32$ Nm.

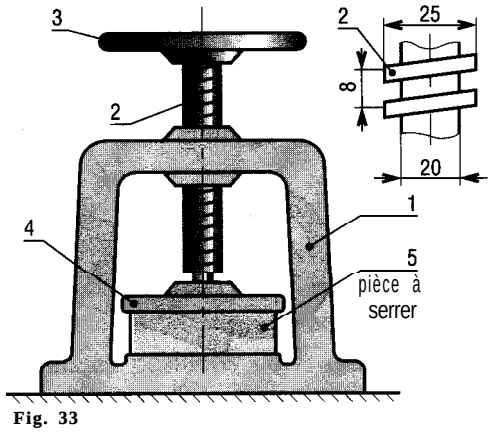


Fig. 33

❑ Un tendeur de câble se compose d'un écrou (1) et de deux vis (2) et (3) de diamètre moyen 36 mm et de pas 4 mm. a) Un couple de 240 Nm est nécessaire pour tendre le câble à la valeur souhaitée. Déterminer $\vec{F}$ si f = y = 0,2 entre les filets supposés carrés.
b) Déterminer le couple de desserrage.

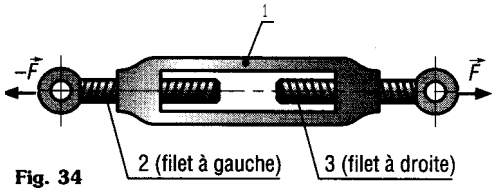


Fig. 34

❑ Une poche (2), utilisée pour le transport de l'acier en fusion, est soulevée par deux crochets (1) symétriques. Le basculement est réalisé par une barre (3) articulée en B sur la poche. Les liaisons en A et B sont des liaisons pivots de centres de même nom, $\vec{P}$ (1 000 daN) schématise le poids de la poche. Le frottement en A est :
$\mu_A = f_A = 0,4$ et $\mu_B = f_B =$ ☐
À partir de quelle valeur de $\vec{B}$ obtient-on le basculement de la poche ? Indiauer la position de la génératrice de contact entre 1 et 2.

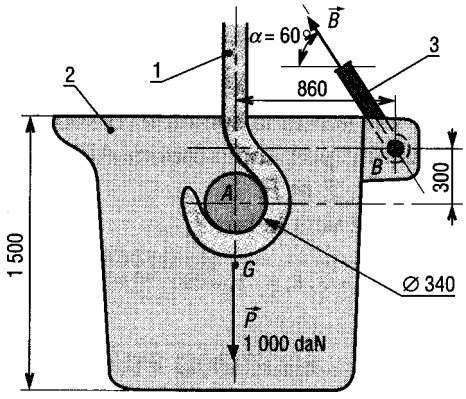


Fig. 35

❑ Une clé pour serrer des filtres à huile d'automobile se compose d'une bande en acier, articulée en A et B (pivots) sur un levier, et enroulée autour du filtre comme l'indique la figure. $\vec{F}$ schématise l'effort de serrage exercé par l'opérateur. Si R = 50 ; f = y = 0,3 (entre bande et filtre) ; OA = AB = 50 mm ; L = 150. Y a-t-il compatibilité entre les dimensions du levier et les capacités de la bande ?

Réponse

oui ; capacité bande = $T_B = 4,81\,T_A$;
capacité levier = $T_B = 4\,T_A$

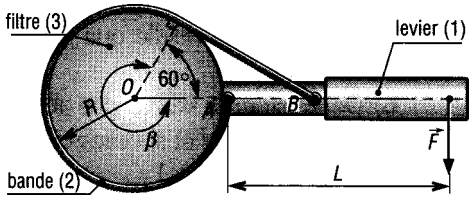


Fig. 36

❑ Pour le frein à bande proposé, $\vec{F}$ schématise l'effort de freinage, T_1 et T_2 les tensions de la bande ($\vec{T_1} > \vec{T_2}$) et β l'angle d'enroulement sur le tambour. L'articulation A est commune à la bande et au levier. La bande est manœuvrée en B (pivot) par le levier.
a) Déterminer la valeur de T_2 en fonction de F. b) En déduire le couple (C) de freinage en fonction de T_2.

Réponse

$T_2 = \frac{F \cdot a}{b}$ $\quad C = \&(e^{\alpha}-1)R$

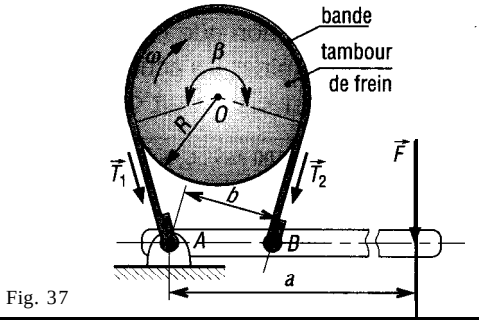


Fig. 37

❑ Reprendre l'exercice 11 avec le frein à bande différentiel proposé. La bande est articulée en B et C sur le levier. A est une liaison pivot fixe.

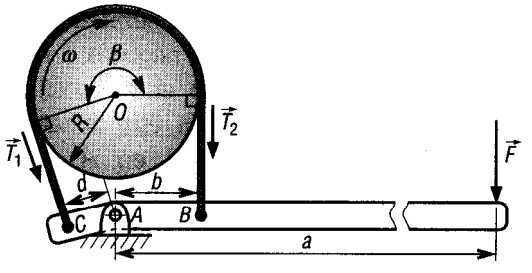


Fig. 38

• HI Un barbecue pour cheminée d'intérieur se compose d'un socle (2) avec tige verticale parallélépipédique et d'une grille de cuisson (3) solidaire de deux axes cylindriques (5) et (6). L'ensemble (3 + 4 + 5 + 6) est réglable en hauteur. P (6 daN) est le poids de l'ensemble, les actions en A et B entre 2, 5 et 6 sont schématisées par des vecteurs-forces passant par ces points, $\mu = f_A = f_B$ avec $f_B = 0{,}08$.

a) Montrer que l'ensemble (3 + 4 + 5 + 6) reste en équilibre et qu'il y a arc-boutement en A et B quelle que soit la valeur de P.

b) Déterminer la valeur des actions en A et B si **P** = 6 daN et si celles-ci ont même inclinaison $(\alpha_A = \alpha_B)$.

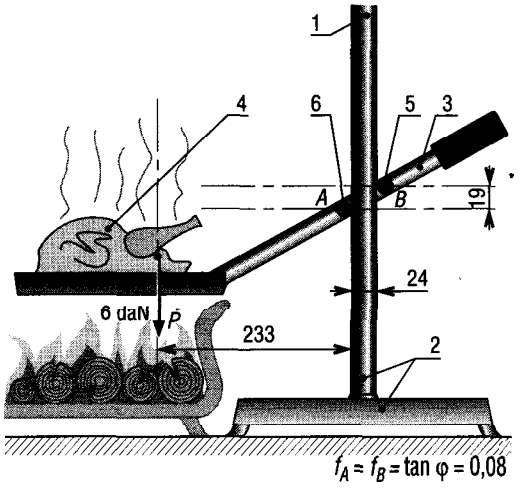


Fig. 39

❑ Une pince pantographe utilisée en manutention est accrochée en A à un palan (1). Elle se compose de deux barres (2) et (3), articulées en A sur (1) et en C et B à deux leviers (4) et (5). Les leviers sont articulés entre eux en D et en E et F à deux patins (6) et (7) qui « pincent » la charge à soulever (8). Les liaisons en A, B, C, D, E et F sont des liaisons-pivots dont les centres portent le même nom, les actions en ces points seront schématisées par des vecteurs-forces. $\vec{P}$ (100 daN) schématise le poids de la charge (8) ; les autres poids sont négligés ; l'ensemble est symétrique et les frottements entre 6, 7 et 8 sont $\mu = f = 0{,}8$. Du fait de la symétrie, on admettra sans démonstration que $\vec{D}_{4/5}$ **ou** $\vec{D}_{5/4}$ est horizontale (ou perpendiculaire à AD).

a) Déterminer les actions exercées en A, B, C, D, E et F.

b) Pour quelle valeur de f la charge (8) glisse-t-elle vers le bas ?

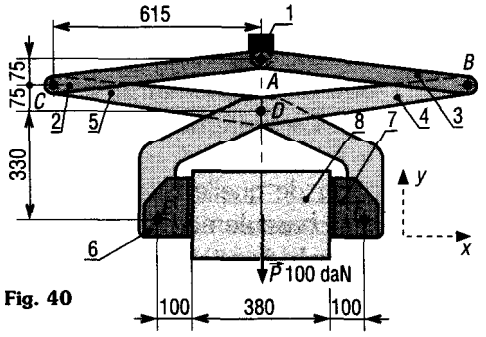


Fig. 40

Réponse

$A_x = 0$; $A_y = 100$ daN ; $C_x = 410 = -B_x$; $C_y = B_y = 50$; $D_x = 640$; $D_y = 0$; $E_x = -F_x = 230$; $E_y = F_y = 50$; $f < 0{,}217$.

❑ La pince proposée est utilisée en traitement thermique pour la manipulation de petites pièces. F et $-F$ schématisent les actions de l'opérateur. Les poids des pièces sont négligés ; l'ensemble est symétrique et en position horizontale. Quelle doit être la valeur minimale du frottement en A et B ($f_A = f_B = f$) pour que le cylindre (1) (0 = 150 mm) reste en équilibre ?

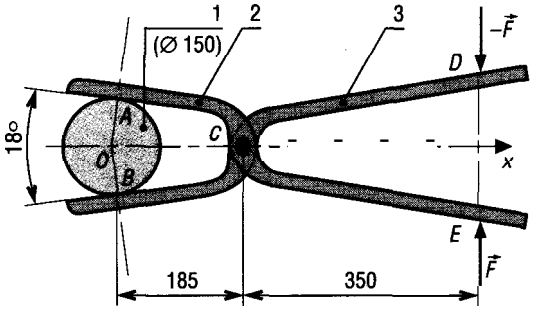


Fig. 41

8 STATIQUE DANS L'ESPACE

OBJECTIFS

- Rappeler quelques notions indispensables aux études dans l'espace : vecteurs positions, coordonnées d'une force et vecteurs-moments.
- Énoncer le principe fondamental de la statique pour un système d'actions dans l'espace.
- Indiquer les principaux cas particuliers d'application.

En statique dans l'espace, les actions, les vecteurs-forces et les vecteurs-positions sont définis dans les trois dimensions (x, y, z). La notion de moment algébrique ou scalaire utilisée en statique plane ne suffit pas. Il est nécessaire d'utiliser la notion de vecteur-moment (voir chapitre « moments et couples ») pour appliquer le principe fondamental et résoudre les exercices. Sauf cas particuliers de symétries, les résolutions graphiques ne sont plus utilisables. Pour ce chapitre, l'utilisation des vecteurs-forces est suffisante pour schématiser les actions mécaniques. S'il est nécessaire de détailler les actions exercées sur les liaisons (voir chapitre suivant « torseurs d'actions mécaniques »). Le passage du plan (x,y) à l'espace amène une dimension supplémentaire (z) et multiplie par deux le nombre des équations et les difficultés de calculs.

1 • Rappels

1. Vecteurs positions

Ils permettent de définir la position des différents points :

$$\overrightarrow{OA} = X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} + Z_A \vec{k}$$
$$\overrightarrow{OB} = X_B \vec{i} + Y_B \vec{j} + Z_B \vec{k}$$

À partir de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, on peut déterminer $\overrightarrow{AB}$ tel que :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{AB} = (X_B - X_A)\vec{i} + (Y_B - Y_A)\vec{j} + (Z_B - Z_A)\vec{k}$$

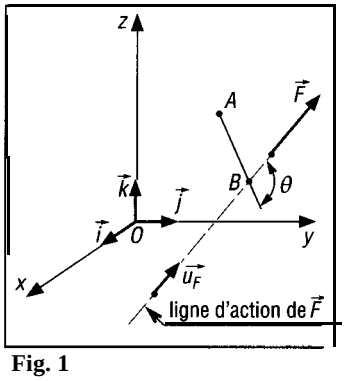


Fig. 1

2. Coordonnées de la force $\vec{F}$

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$$

Remarque : $\vec{F} = F \cdot \vec{u_F} = F \cos\theta_x \vec{i} + F \cos\theta_y \vec{j} + F \cos\theta_z \vec{k}$
avec : $\vec{u_F} = \cos\theta_x \vec{i} + \cos\theta_y \vec{j} + \cos\theta_z \vec{k}$
$\|\vec{u_F}\| = \cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$

3. Moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point A

Si B est un point quelconque appartenant à la ligne d'action de $\vec{F}$, le moment au point A de $\vec{F}$ est défini par le produit vectoriel :

$$\vec{M_A(F)} = \vec{AB} \wedge \vec{F}$$

Remarque : le module du vecteur est $\|\vec{M_A(F)}\| = AB \cdot F \cdot \sin\theta$
θ étant l'angle entre $\vec{AB}$ et $\vec{F}$.

II - Principe fondamental de la statique

Le principe fondamental a été énoncé une première fois dans le chapitre statique plane. L'énoncé qui suit n'en diffère que par l'équation du moment résultant, écrite sous forme vectorielle en utilisant des vecteurs-moments.
Le principe des actions mutuelles, le principe de transmissibilité des forces, l'isolement d'un solide, la méthode générale de résolution d'un problème de statique et l'application aux ensembles de solides sont inchangés (voir statique plane).

1. Énoncé

Un solide en équilibre sous l'action de n forces extérieures $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \ldots, \vec{F_n}$ reste en équilibre si :

a) la somme vectorielle des n forces est nulle

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \ldots + \vec{F_n} = \vec{0} \qquad (1)$$

b) le moment résultant des n forces en n'importe quel point A de l'espace est nul

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M_A(F_i)} = \vec{M_A(F_1)} + \vec{M_A(F_2)} + \vec{M_A(F_3)} + \ldots \vec{M_A(F_n)} = \vec{0} \qquad (2)$$

Les équations vectorielles (1) et (2) donnent chacune trois équations scalaires de projection sur les axes x, y et z.

Dans le cas le plus général, on disposera de six équations scalaires qui permettront de déterminer, au plus, six inconnues. Les inconnues sont les coordonnées F_ix, F_iy et F_iz des forces $\vec{F_i}$ (on peut également utiliser le module de la force et deux angles).

2. Forme générale des équations de projection

$$\vec{F_i} = F_i x \cdot \vec{i} + F_i y \cdot \vec{j} + F_i z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{F_1}\begin{Bmatrix} F_1x \\ F_1y \\ F_1z \end{Bmatrix} \quad \vec{F_2}\begin{Bmatrix} F_2x \\ F_2y \\ F_2z \end{Bmatrix} \quad \vec{F_3}\begin{Bmatrix} F_3x \\ F_3y \\ F_3z \end{Bmatrix} \quad \dots \quad \vec{F_n}\begin{Bmatrix} F_nx \\ F_ny \\ F_nz \end{Bmatrix}$$

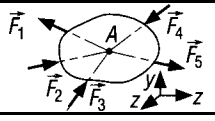
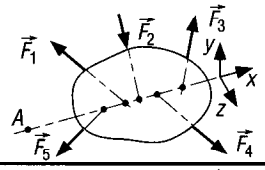
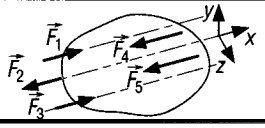
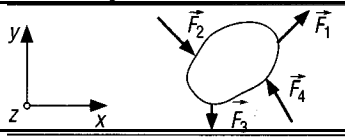
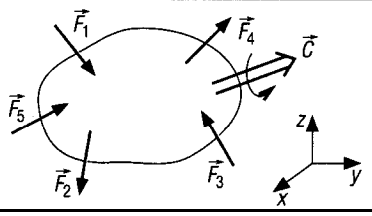
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \vec{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \sum F_i x = F_1x + F_2x + F_3x + \dots + F_nx = 0 & (1) \\ \sum F_i y = F_1y + F_2y + F_3y + \dots + F_ny = 0 & (2) \\ \sum F_i z = F_1z + \mathrm{Fg} + F_3z + \dots + F_nz = 0 & (3) \end{array} \right\}$$

$$\overrightarrow{M_A(F_i)} = M_A x(F_i) \cdot \vec{i} + M_A y(F_i) \cdot \vec{j} + M_A z(F_i) \cdot \vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_A(F_1)}\begin{Bmatrix} M_A x(F_1) \\ M_A y(F_1) \\ M_A z(F_1) \end{Bmatrix} \quad \overrightarrow{M_A(F_2)}\begin{Bmatrix} M_A x(F_2) \\ M_A y(F_2) \\ M_A z(F_2) \end{Bmatrix} \quad \overrightarrow{M_A(F_3)}\begin{Bmatrix} M_A x(F_3) \\ M_A y(F_3) \\ M_A z(F_3) \end{Bmatrix} \dots \overrightarrow{M_A(F_n)} \begin{matrix} M_A x(F_n) \\ M_A Y(F_n) \\ M_A z(F_n) \end{matrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_A(F_i)} = \vec{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \sum M_A x\left(\vec{F_i}\right) = M_A x\left(\vec{F_1}\right) + M_A x\left(\vec{F_2}\right) + M_A x\left(\vec{F_3}\right) + \dots + M_A x\left(\vec{F_n}\right) = 0 & & (4) \\ \sum M_A y\left(\vec{F_i}\right) = M_A y\left(\vec{F_1}\right) + M_A y\left(\vec{F_2}\right) + M_A y\left(\vec{F_3}\right) + \dots + M_A y\left(\vec{F_n}\right) = 0 & & (5) \\ \sum M_A z\left(\vec{F_i}\right) = M_A z\left(\vec{F_1}\right) + M_A z\left(\vec{F_2}\right) + M_A z\left(\vec{F_3}\right) + \dots + M_A z\left(\vec{F_n}\right) = 0 & & (6) \end{array} \right\}$$

Remarque : si M_1 est un point quelconque de la direction de $\vec{F_1}$, M_2 un point quelconque de $\vec{F_2}$, M_3 un point de $\vec{F_3}$, etc.
$\overrightarrow{M_A(F_1)} = \overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{F_1}$; $\overrightarrow{M_A(F_2)} = \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{F_2}$; $\overrightarrow{M_A(F_3)} = \overrightarrow{AM_3} \wedge \vec{F_3}$; etc.

Cas particuliers	Solide isolé	Equation de projection	**Nombre** maximal d'inconnues
Cas où toutes les forces sont concourantes au même point		$\begin{cases} \Sigma F_i x = 0 \\ \Sigma F_i y = 0 \\ \Sigma F_i z = 0 \end{cases}$	3
Cas où toutes les forces sont concourantes sur la même droite		$\begin{cases} \Sigma F_i x = 0 \\ \Sigma F_i y = 0 \\ \Sigma F_i z = 0 \\ \Sigma M_A y(F_i) = 0 \\ \Sigma M_A z(F_i) = 0 \end{cases}$	5
Cas de forces parallèles		$\begin{cases} \Sigma F_i x = 0 \\ \Sigma M_A y(F_i) = 0 \\ \Sigma M_A z(F_i) = 0 \end{cases}$	3
Cas où toutes les forces sont contenues dans un même plan (x, y) (statique plane)		$\begin{cases} \Sigma F_i x = 0 \\ \Sigma F_i y = 0 \\ \Sigma M_A z(F_i) = 0 \end{cases}$	3
Cas général		$\begin{cases} \Sigma F_i x = 0 \\ \Sigma F_i y = 0 \\ \Sigma F_i z = 0 \\ \Sigma M_A x(F_i) = 0 \\ \Sigma M_A y(F_i) = 0 \\ \Sigma M_A z(F_i) = 0 \end{cases}$	6

ig. 2

EXERCICES RÉSOLUS

1 Une porte coulissante se compose d'un panneau (1) équipé de deux galets de roulement (2. et 3) et d'un rail de guidage (5) fixé horizontalement sur un mur (6). La stabilité latérale de la porte est assurée en A par un galet (4) dont l'axe de rotation est vertical (Z). Les galets (2) et (3), axes de rotation parallèles à X, sont en contact en B et C avec le rail.

La porte est en équilibre dans la position indiquée, les frottements et la résistance au roulement sont négligés. Le poids de l'ensemble (1 + 2 + 3) est schématisé par $\vec{P}$ (500 daN) en G. Les actions exercées en A, B et C sont schématisées par des vecteurs-forces passant par ces mêmes points.

Isoler l'ensemble (1 + 2 + 3) ; en déduire les actions exercées en A, B et C.

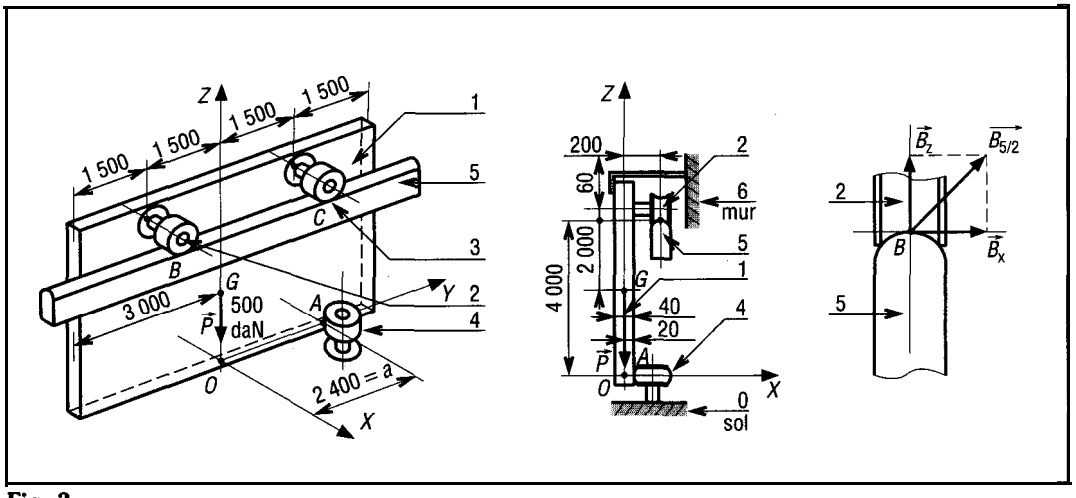


Fig. 3

Résolution

L'ensemble (1 + 2 + 3) est soumis à l'action de quatre forces extérieures : $\vec{P}$, $\vec{B}_{5/2}$, $\vec{C}_{5/3}$ et $\vec{A}_{4/1}$; appliquées en G, B, C et A, et de coordonnées cartésiennes :

$$\vec{P}\begin{Bmatrix}0\\0\\-mg=-500\,\text{daN}\end{Bmatrix}\quad \vec{A}_{4/1}\begin{Bmatrix}A_x\\0\\0\end{Bmatrix}\quad \vec{B}_{5/2}\begin{Bmatrix}B_x\\0\\B_z\end{Bmatrix}\quad \vec{C}_{5/3}\begin{Bmatrix}C_x\\0\\C_z\end{Bmatrix}$$

Les coordonnées inconnues A,, B_x, B_z, C_x et C_z sont toutes supposées positives (orientées positivement) au départ de l'exercice. Appliquons le principe fondamental de la statique :

a) La somme vectorielle des 4 forces est nulle :

$\vec{P} + \vec{A}_{4/1} + \vec{B}_{5/2} + \vec{C}_{5/3} = \vec{0}$

En projection sur les axes X, Y, Z, on obtient :

sur X : $\Sigma F_i X = 0 + A_x + B_x + C_x = 0$

sur Y : $\Sigma F_i Y = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

sur Z : $\Sigma F_i Z = -mg + 0 + B_z + C_z = 0$

Il en résulte 2 équations significatives :

$$A_x + B_x + C_x = 0 \qquad (1)$$
$$B_z + C_z = mg = 500\ \text{daN} \qquad (2)$$

b) Le moment résultant en n'importe quel point de l'espace des 4 forces est nul. Afin de simplifier les calculs, choisissons le point B. Notons que le point C est aussi intéressant.

$$\overrightarrow{M_B(P)} + \overrightarrow{M_B(C_{5/3})} + \overrightarrow{M_B(A_{4/1})} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{M_B(B_{5/2})} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{M_B(P)} = \overrightarrow{BG} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} -1500 & 0 \\ -2000 & -mg \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -200\ mg \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_B(C_{5/3})} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{C_{5/3}} = \begin{vmatrix} 0 & \\ 3000 & C_x \\ 0 & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3000.C_z \\ -3000.C_x \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_B(A_{4/1})} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{A_{4/1}} = \begin{vmatrix} -180 & \\ 3900 & A_x \\ -4000 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -4000.A_x \\ -3900.A_x \end{vmatrix}$$

En projection sur les axes X, Y, Z, l'équation du moment nous donne :

$$\text{sur } X : \sum M_B x(\vec{F_i}) = -1500.mg + 3000.C_z = 0 \quad (3) \quad \Rightarrow C_z = \frac{1500.mg}{3000} = 250\,\text{daN}$$

$$\text{sur } Y : \sum M_B y(\vec{F_i}) = -200.mg - 4000.A_x = 0 \quad (4) \quad \Rightarrow A_x = \frac{-200.mg}{4000} = -25\,\text{daN}$$

$$\text{sur } Z : \sum M_B z(\vec{F_i}) = -3000.C_x - 3900.A_x = 0 \quad (5) \quad \Rightarrow C_x = \frac{-3900.A_x}{3000} = 32{,}5\,\text{daN}$$

Remarquons que l'on dispose pour cinq équations de cinq inconnues, la résolution complète est donc possible. Reprenons les équations (1) et (2) pour terminer le calcul :

(2) $\rightarrow B_z = 500 - C_z = 500 - 250 = 250$ daN

(1) $\rightarrow B_x = -A_x - C_x = 25 - 32{,}5 = -7{,}5$ daN

Résultats

$$\overrightarrow{A_{4/1}}\begin{Bmatrix} -25\,\text{daN} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \overrightarrow{B_{5/2}}\begin{Bmatrix} -7{,}5\,\text{daN} \\ 0 \\ 250\,\text{daN} \end{Bmatrix} \quad \overrightarrow{C_{5/3}}\begin{Bmatrix} 32{,}5\,\text{daN} \\ 0 \\ 250\,\text{daN} \end{Bmatrix}$$

$$\left\|\overrightarrow{B_{5/2}}\right\| = \sqrt{7{,}5^2 + 250^2} = 250{,}1\,\text{daN}$$

$$\left\|\overrightarrow{C_{5/3}}\right\| = \sqrt{32{,}5^2 + 250^2} = 252{,}1\,\text{daN}$$

Remarques : lorsque l'on déplace la porte, a devient variable ;

$\overrightarrow{BA} = -180\ \vec{i} + (1\,500 + a)\vec{j} - 4\,000\ \vec{k}$; seule l'équation (5) est modifiée et donne :

$$C_x = -\frac{(1500+a)}{3000} \quad A_x = \frac{(1500+a)\times 25}{3000} \quad (5')$$

$B_z = 250$ daN ; $C_z = 250$ daN ; $A_x = -25$ daN ne changent pas. Seules B_x et C_x varient et vérifient les équations (5') (1)

a (mm)	0	500	1000	1500	2 000	2 500	3 000
C_x (daN)	12,5	16,7	20,8	25	29,2	33,3	37,5
B_x (daN)	12,5	8,3	4,2	0	-4,2	-8,3	-12,5

2 Le dispositif proposé représente, en coupe, une partie d'un réducteur à roue et vis sans fin. L'arbre de la vis (1) est monté sur deux roulements (3) et (4). Les actions exercées par les roulements sont schématisées par les vecteurs-forces $\overrightarrow{B_{3/1}}$ et $\overrightarrow{C_{4/1}}$ passant par les points B et C. L'action du moteur est schématisé par le couple $\overrightarrow{C} = -100\ \vec{j}$ (Nm) en D. L'action de la roue dentée (2) est schématisée par la force A,,, en A avec $\overrightarrow{A_{2/1}} = F_T\,\vec{i} + F_A\,\vec{j} + F_R\,\vec{k} = 250\ \vec{i} - 1\,179\ \vec{j} - 654\ \vec{k}$ (daN).
Connaissant A,,, et sachant que $B_y = \overrightarrow{B_{3/1}} \cdot \vec{y} = 0$ (compte tenu des épaulements du roulement (3)), isoler l'arbre (1) et déterminer les actions sur les roulements.

Résolution

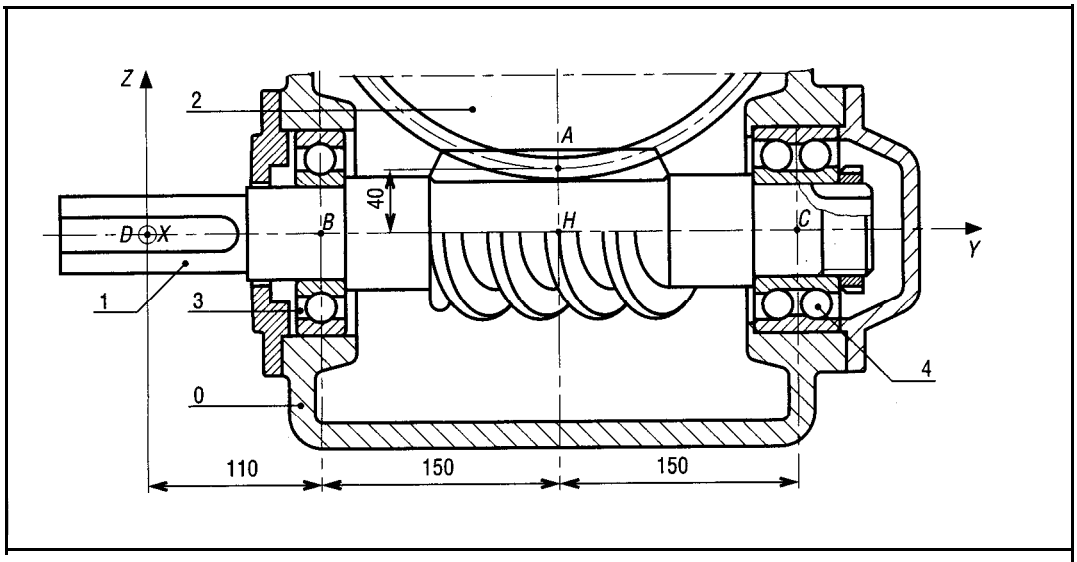


Fig. 4

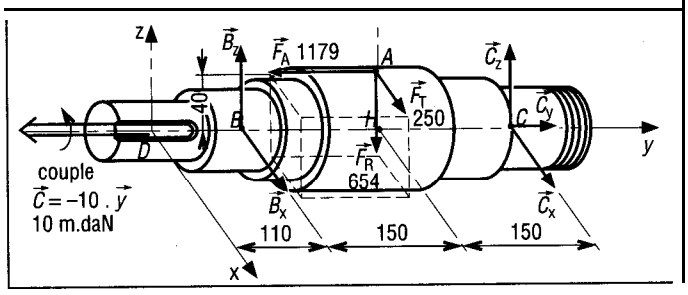


Fig. 5

L'arbre est soumis à l'action de trois forces et un couple de coordonnées :

$$\overrightarrow{A_{2/1}}\begin{Bmatrix} A_x = F_T = 250\,\text{daN} \\ A_y = -F_A = -1\,779\,\text{daN} \\ A_z = -F_R = -654\ \text{daN} \end{Bmatrix} \quad \overrightarrow{B_{3/1}}\begin{Bmatrix} B_x \\ 0 \\ B_z \end{Bmatrix} \quad \overrightarrow{C_{4/1}}\begin{Bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{Bmatrix} \quad \text{couple } \vec{C}\begin{Bmatrix} 0 \\ -10\,000\,\text{daNmm} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Principe fondamental : $\overrightarrow{A_{2/1}} + \overrightarrow{B_{3/1}} + \overrightarrow{C_{4/1}} = \vec{0}$

$$\begin{Bmatrix} \text{projection sur x : } C_x + B_x = -250 & (1) \\ \text{projection sur y : } C_y - 1779 = 0 & (2) \\ \text{projection sur z : } B_z + C_z = 654 & (3) \end{Bmatrix}$$

Moment résultant en B nul :

$$\overrightarrow{M_B(A_{2/1})} + \overrightarrow{M_B(B_{3/1})} + \overrightarrow{M_B(C_{4/1})} + \vec{C} = \vec{0}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{A_{2/1}} + \vec{0} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{C_{4/1}} + \vec{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \\ 40 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 250 \\ -1\,779 \\ -654 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 300 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -10\,000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Projection sur x : $-26\,940 + 300\,C_z = 0$ (4)
Projection sur y : $10\,000 - 10\,000 = 0$ (5)
Projection sur z : $-37\,500 - 300\,C_x = 0$ (6)
Les équations (4), (6) et (2) donnent : $C_x = -125$ daN ; $C_z = 89{,}8$; $C_y = 1\,779$ puis (1) et (2) donnent : $B_x = -125$ daN et $B_z = 564{,}2$ daN.

Remarque : l'équation (5) vérifie que le couple C est égal au moment de F_T par rapport à l'axe y.

EXERCICES À RÉSOUDRE

3 Une chandelle, utilisée pour soutenir une automobile, est réalisée à partir d'un trépied soudé (forme en tétraède *ABCD*) et d'un coulisseau réglable en hauteur par l'intermédiaire d'une goupille. $\vec{F}$ (1 000 daN) schématise la charge exercée par le véhicule (direction AH verticale). Déterminer les efforts de compression dans les barres *AB*, *AC* et *AD* si le plan *BCDH* est horizontal.
Données : AH = 400 mm ;
BC = *CD* = *BD* = 250 ; *AB* = *AC* = *AD* ;
BH = *CH* = *DH*.

Réponse

$T_{AB} = T_{AC} = T_{AD} = 354$ daN.

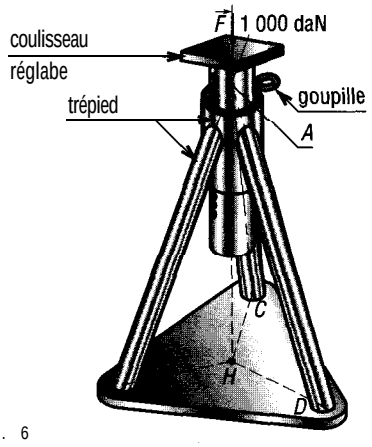


Fig. 6

4 L'antenne émettrice d'une station-radio se compose d'un pylône principal de 30 m, maintenu verticalement par des câbles tendus *AB*, *AC* et *AD*. L'action résultante exercée en *A* par les trois câbles a pour intensité 3 500 daN, pour direction la verticale Z.
Déterminer les tensions des trois câbles.

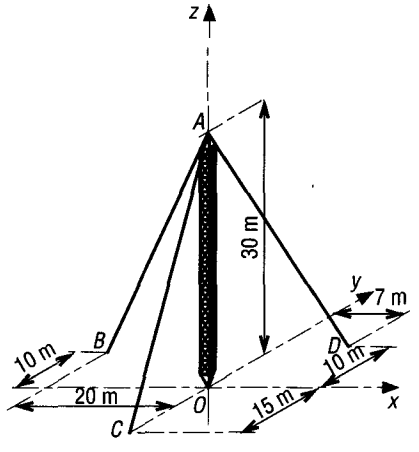


Fig. 7

❑ Une bobine cylindrique (tôle enroulée) est soulevée par l'intermédiaire de trois élingues *AB*, *AC* et *AD* de même longueur (2 m). Le poids de la bobine est schématisé par le vecteur-poids $\vec{P}$, de module 2 000 daN, de direction la verticale $\vec{Z}$. Déterminer les actions de tension dans les trois élingues. Quelle est la valeur de l'action résultante sur le crochet en *A* ?

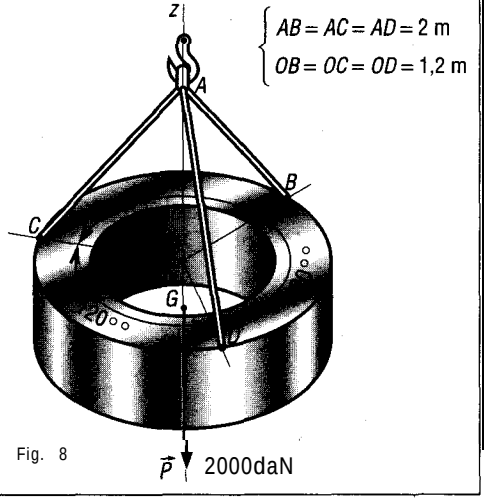


Fig. 8

6 Un mât DA supporte un panneau publicitaire. Le poids de l'ensemble est de 80 daN ($\vec{P} = -80\ \vec{k}$). Le mât est maintenu en A par deux câbles AC et AB fixés en B et C sur un mur. L'action exercée entre le mur et le mât en D est schématisée par un vecteur force passant par D. Déterminer l'action en D et les tensions des câbles.

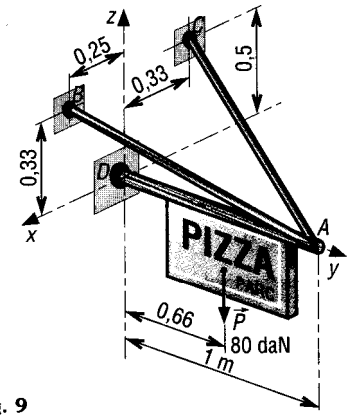


Fig. 9

Réponse

T_{AB} = 81,6 daN ; T_{AC} = 65,9 daN ;
$\vec{D} = 132\ \vec{j} + 26{,}7\ \vec{k}$.

❑ Le dispositif proposé représente l'un des quatre pieds de stabilisation d'un engin tout terrain. Chaque pied se compose d'un patin (5), de deux barres (3) et (4) et d'un vérin hydraulique de manœuvre (1 + 2 : 1 = corps ; 2 = tige). Les barres sont articulées en B et C sur le bâti (0) et en A sur le patin. Le vérin est articulé en A sur (5) et en D sur le bâti. Les liaisons en A, B, C et D sont des liaisons rotules de centres de même nom, A est commune à (2), (3), (4) et (5). Les actions en A, B, C et D seront schématisées par des vecteurs-forces passant par, ces points ; les poids sont négligés. F (3 000 daN, verticale z) schématise l'action du sol sur le patin.

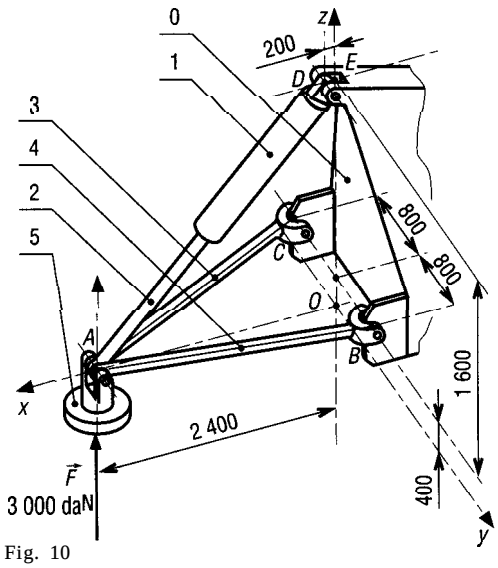


Fig. 10

Déterminer les actions exercées dans les barres et dans le vérin.

❑ Un mât de charge, utilisé pour décharger les navires, se compose d'un mât principal vertical AB (1), lié en A (liaison rotule) au pont (0) du bateau et maintenu en B par deux câbles BC et BD. La charge à lever 3 ($\vec{P}$, 3 000 daN) est fixée en E sur un deuxième mât EF (2) pouvant tourner (pivot d'axe F, z) autour de AB.
Les poids sont négligés. Pour a = 12" et pour a = 24°, déterminer les tensions des câbles BC et BD.

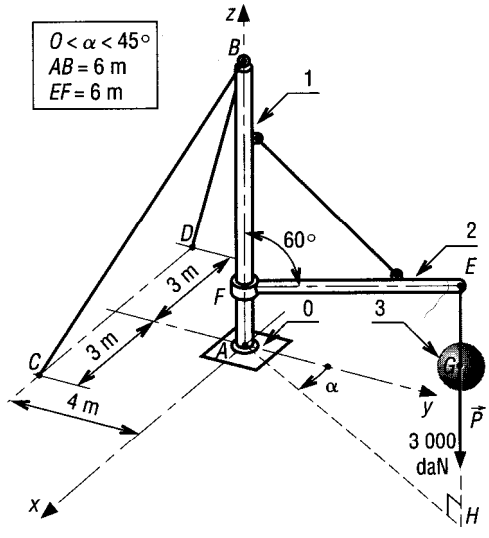


Fig. 11

Réponse

a = 12" : T_{BC} = 1 745 daN et T_{BD} = 3 120 daN ;
α = 24" : T_{BC} = 924 daN et T_{BD} = 3 630 daN.

❑ Reprendre l'exercice 8 avec α = 30". Déterminer les tensions des câbles et les actions exercées en B, A et F, si celles-ci sont schématisées par des vecteurs-forces passant par ces points.

❑ Pour tester la qualité d'un lubrifiant, on utilise une machine d'essai à quatre billes. Dans cet essai, la bille supérieure (1) glisse sur trois billes inférieures (2), (3) et (4) sans rouler. La dégradation se produit soit par grippage, soit par soudure totale. La bille (1) est entraînée à 1 500 $tr.min^{-1}$ par une broche et l'essai dure moins d'une minute.

$\vec{P}$ (100 daN) schématise l'effort presseur exercé sur la bille (1). I, J, K et L sont les centres des billes, toutes de même diamètre (d = 10 mm), A, B et C sont les points de contact respectifs.

a) Si l'ensemble est à l'arrêt, déterminer les actions exercées en A, B et sous l'action de $\vec{P}$.

b) L'appareil est mis en mouvement ; un enregistreur indique un couple résistant de 1 Nm pour l'entraînement de la bille supérieure. En déduire la valeur du frottement entre les billes.

Réponse

A = B = C = 66,6 daN ; f = 0,115.

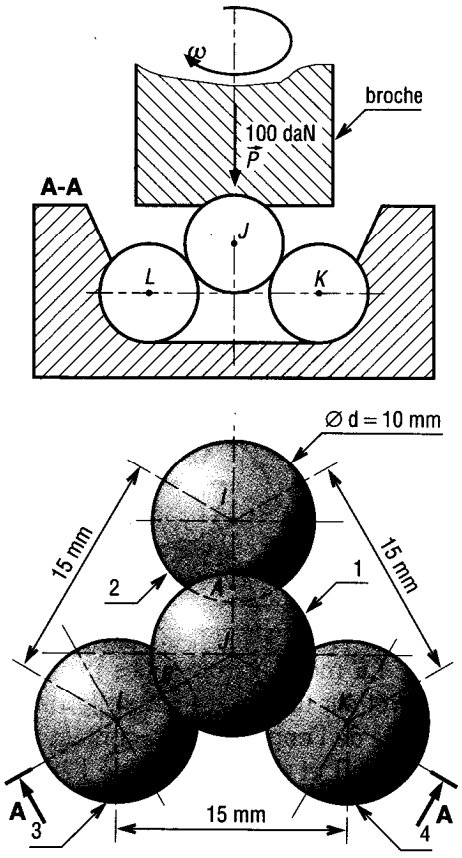


Fig. 12

❑ Les boules de bowling (1) et (2) sont en équilibre dans une rainure d'attente en vé (angle du vé 70"). La rainure du vé est inclinée de 15" par rapport à l'horizontale. Les poids des boules sont schématisés par $\vec{P_1}$ et $\vec{P_2}$ de module 40 N.

Déterminer les actions de contact en A, B et C entre la boule (1), le vé et la boule (2).

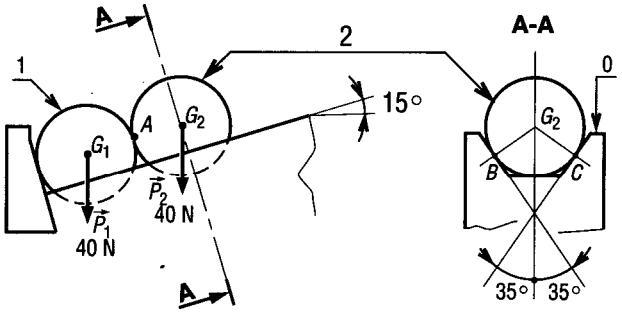


Fig. 13

12 Le module lunaire fut le premier vaisseau spatial habité à se poser sur la Lune. Le vaisseau était muni de quatre pieds identiques, dont la structure en treillis se compose de sept barres (*ABCDE* pyramide régulière et *AFED* tétraèdre symétrique). $\vec{F}$ (300 daN), direction verticale (F, z), schématise l'effort encaissé au moment de l'alunissage. Les poids des barres sont négligés, les liaisons en A, *B*, C, *D*, *E* et *F* sont des liaisons rotules de centre de même nom.

Déterminer les actions supportées par les sept barres de la structure.

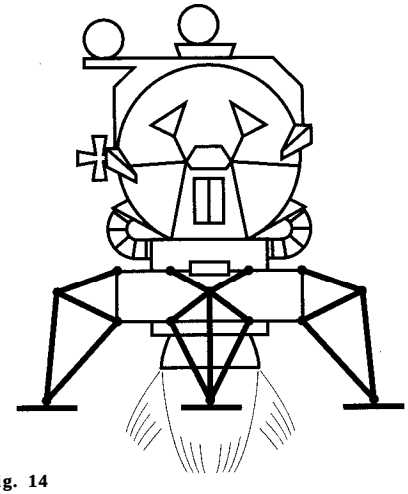


Fig. 14

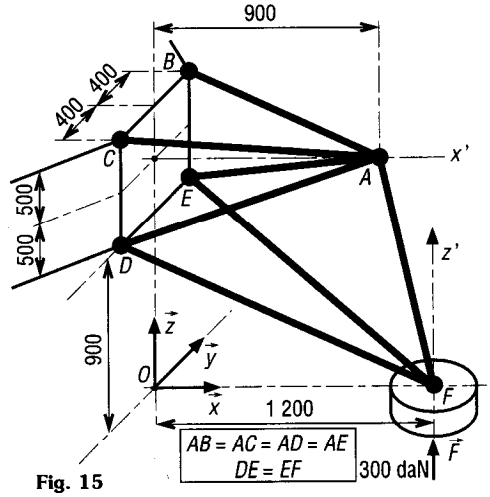


Fig. 15

13 La moto à trois roues proposée est à l'arrêt sur un terrain plat et horizontal. Les roues de l'engin sont en contact avec le sol en A, *B* et C. Le poids de l'ensemble en charge est schématisé par le vecteur-poids $\vec{P}$, de module 2 000 N. *P* passe par K.

Déterminer les actions exercées en A, *B* et C si celles-ci sont schématisées par des vecteurs-forces.

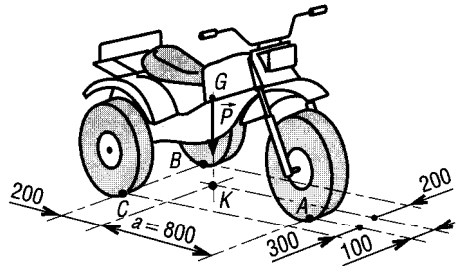


Fig. 16

Réponse

A = 175 N ; B = 1 186,5 N ; C = 638,5 N (4 forces parallèles).

❑ Reprendre l'exercice 13 avec a = 650 et P = 1 200 N.

❑ L'avion proposé est au repos sur une piste plane et horizontale. Les roues de l'appareil sont en contact avec le sol en A, *B* et C (ABC triangle isocèle).

Les actions exercées par le sol sur les roues sont mesurées à l'aide d'une bascule. Les valeurs mesurées sont A = 2 750 daN, *B* = 3 400 daN et C = 3 500 daN.

Déterminer le poids $\vec{P}$ de l'avion et la position de ce vecteur.

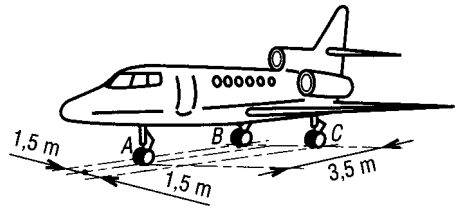


Fig. 17

❑ Les poulies (4) et (5) sont solidaires de l'arbre de renvoi (1). L'arbre est guidé en rotation par deux paliers à roulements étanches (2) et (3). $\vec{S}$ (- 200 $\vec{k}$ daN), $\vec{T}$ (- 600 $\vec{k}$ daN), $\vec{E}$ (- 300 $\vec{j}$) et $\vec{F}$ (- 100 j) schématisent les tensions des courroies.
Les poids sont négligés, les actions des paliers sont schématisées par les vecteurs-forces $\vec{A}_{3/1}$ et $\vec{B}_{2/1}$ en A et B, l'action $\vec{B}_{2/1}$ est supposée perpendiculaire à l'axe de l'arbre. Déterminer $\vec{A}_{3/1}$ et $\vec{B}_{2/1}$.

Réponse

$\vec{A}_{3/1} = -75\ \vec{j} + 1\,200\ \vec{k}$; $\vec{B}_{2/1} = 475\ \vec{j} - 400\ \vec{k}$ (daN).

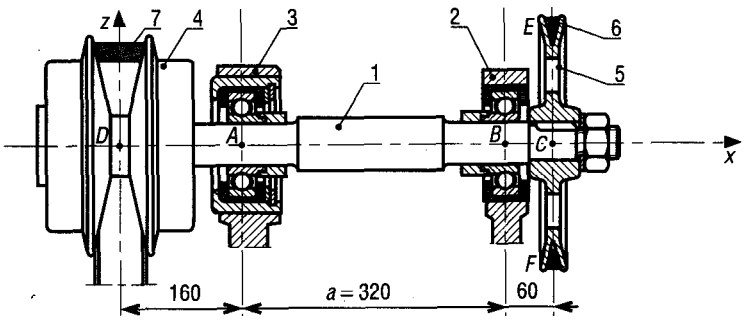


Fig. 18

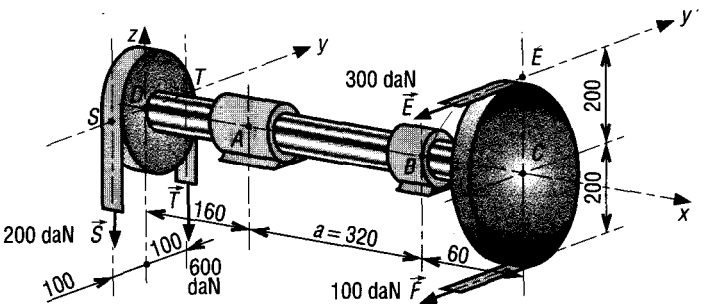


Fig. 19

❑ Le réducteur à engrenages proposé en coupe brisée se compose de deux étages de réduction (3/6) et (4/7). Les roues sont à denture droite avec des angles de pression de 20°. $\vec{E}$ (300 daN) et $\vec{F}$ (module inconnu) schématisent les actions exercées par les roues (3) et (7) sur l'ensemble (4 + 6). Les poids sont négligés, les actions exercées par les paliers (1 + 10) et (2 + 11) sur (4 + 6) sont schématisées par les vecteurs-forces $\vec{D}_{2/4}$ et $\vec{C}_{1/4}$ passant par C et D. Déterminer $\vec{F}$, $\vec{D}_{2/4}$ et $\vec{C}_{1/4}$.

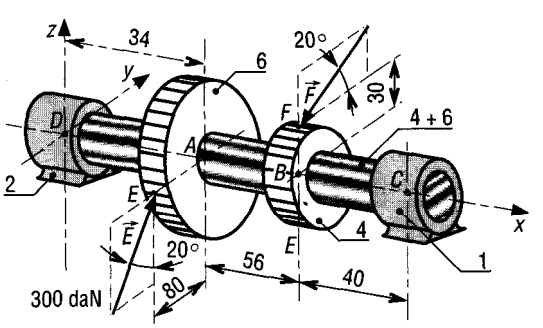


Fig. 20

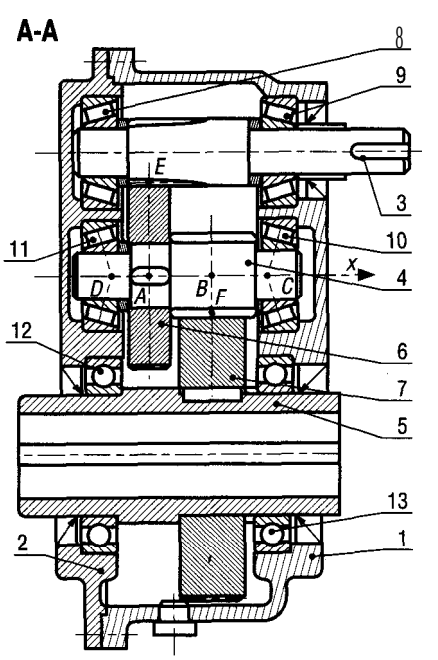


Fig. 21

18 Le renvoi d'angle proposé se compose d'un arbre d'entrée 1 (puissance d'entrée 200 kW à 1 500 $tr.min^{-1}$), d'un arbre intermédiaire 2, solidaire d'une roue à denture conique 3 (clavetage), et d'un arbre de sortie 5 solidaire d'une roue à denture hélicoïdale 4. La vitesse de sortie est de 230 tr/min.
$(\overrightarrow{F_{1/3}} = \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_T} + \overrightarrow{F_R} = -520\,\vec{i} - 2\,200\,\vec{j} - 220\,\vec{k})$
et $(\overrightarrow{E_{4/2}} = \overrightarrow{E_A} + \overrightarrow{E_T} + \overrightarrow{E_R} = 310\,\vec{i} - 4\,400\,\vec{j} + 1\,140\,\vec{k})$ schématisent les actions exercées par les roues 1 et 4 sur l'ensemble (2 + 3). Les poids sont négligés ; les actions exercées par les paliers à roulement en A et D sont schématisées par les vecteurs forces $\overrightarrow{A_{0/2}}$ et $\overrightarrow{D_{0/2}}$ en A et D. Déterminer $\overrightarrow{A_{0/2}}$ et $\overrightarrow{D_{0/2}}$ connaissant $\overrightarrow{F_{1/3}}$ et $\overrightarrow{E_{4/2}}$.

Réponse

$\overrightarrow{A_{0/2}} = A_x\,\vec{i} + 2\,768\,\vec{j} + 123\,\vec{k}$; $\overrightarrow{D_{0/2}} = D_x\,\vec{i} + 3\,832\,\vec{j} - 1\,043\,\vec{k}$ (daN) ;
$A_x + D_x = 210$ daN.

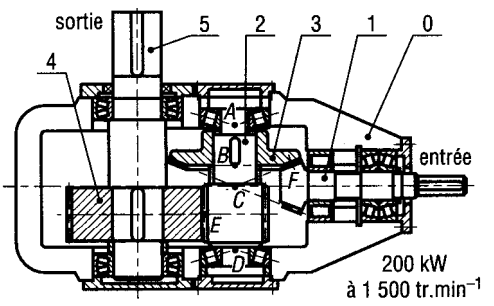


Fig. 22

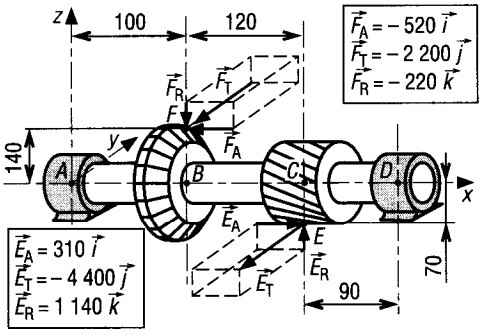


Fig. 23

19 Le réducteur à engrenages proposé en coupe longitudinale se compose de deux étages de réduction (3/1) et (4/2). Les roues sont à denture hélicoïdale. (3) est l'arbre d'entrée,) l'arbre de sortie et (2) l'arbre intermédiaire, objet de l'étude.
$\overrightarrow{F_{4/2}} = \overrightarrow{F_{A2}} + \overrightarrow{F_{R2}} + \overrightarrow{F_{T2}}$ et $\overrightarrow{E_{3/1}} = \overrightarrow{F_{A1}} + \overrightarrow{F_{R1}} + \overrightarrow{F_{T1}}$ sont des actions exercées par (4) et (3) sur (1+2). Les poids sont négligés, $\overrightarrow{K_{0/2}}$ et $\overrightarrow{C_{0/2}}$ schématisent les actions des paliers en K et C. Déterminer $\overrightarrow{K_{0/2}}$ et $\overrightarrow{C_{0/2}}$ si $\overrightarrow{K_{0/2}} \cdot \vec{i} = 0$

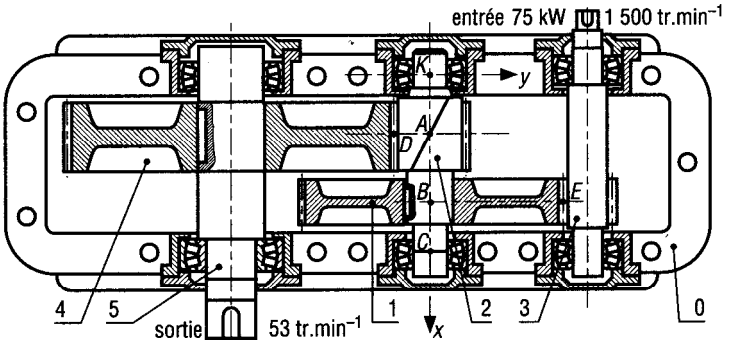


Fig. 24

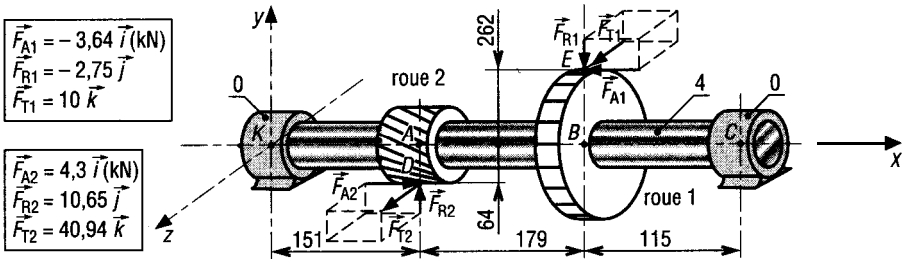


Fig. 25

9 STATIQUE PAR LES TORSEURS

OBJECTIFS

- Définir la notion de systèmes statiquement équivalents et la notion de torseurs d'actions mécaniques.
- Donner la méthode permettant d'écrire un torseur en différents points.
- Décrire les opérations sur les torseurs, les propriétés principales et les torseurs particuliers : glisseur, torseur-couple et torseur-nul.
- Donner un nouvel énoncé au principe fondamental de la statique.
- Indiquer les torseurs d'interefforts des liaisons usuelles.

Les torseurs sont des outils de modélisation analogues aux vecteurs, utilisés pour représenter des actions mécaniques, des vitesses et diverses autres grandeurs. Dans ce chapitre, nous nous limiterons à l'étude des torseurs d'actions mécaniques (ou système force-couple), les propriétés abordées pourront être généralisées aux autres torseurs.Les torseurs (ou équivalents) sont des outils appréciés par l'enseignement supérieur et dans les études longues. Leur domaine d'emploi privilégié concerne les études de mécanismes dans l'espace faisant intervenir des liaisons mécaniques complexes et nécessitant des analyses détaillées en statique, cinématique et cinétique.

Remarque : d'un formalisme rigoureux, les torseurs sont des outils exigeants sur le plan mathématique, les habitudes de calcul et nécessitent du temps et de l'expérience pour être opérationnel.

Suggestion : avant d'aborder ce chapitre, il est préférable d'avoir assimilé les notions de produit vectoriel, de vecteurs-moments, de vecteurs-couples, d'isolement d'un solide, de calculs vectoriels dans l'espace et le principe fondamental de la statique.

I- Systèmes de forces statiquement équivalents

Cette notion est particulièrement utile pour comprendre les torseurs.

1. Déliniion

Deux systèmes de forces sont statiquement équivalents s'ils ont même somme vectorielle et même moment résultant en **tout** point.

Propriété : dans tout problème de statique, un système de forces pourra toujours être remplacé par un autre système de forces qui lui est statiquement équivalent : les systèmes sont interchangeables. Autrement dit, l'utilisation de l'un ou l'autre système ne modifie ni les équilibres, ni les mouvements, ni les résultats obtenus.

2. Exemples

Exemple 1 : une force $\vec{F}$ appliquée en un point A et ses composantes au même point sont des systèmes statiquement équivalents.

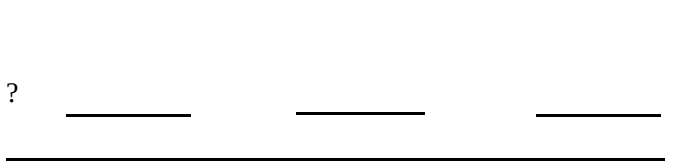


Fig. 1

Remarque : inversement, la résultante de deux forces est statiquement équivalente à celles-ci. Mêmes remarques pour les diverses résultantes définies au chapitre 4.

Exemple 2 : un couple C est statiquement équivalent à deux forces $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ égales et opposées, distantes de a' (C = *Fd).* Une infinité de solutions sont possibles.

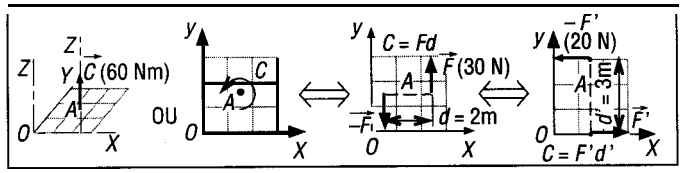


Fig. 2

Exemple 3 : une force $\vec{F}$ peut être remplacée en n'importe quel point A par un système force $(\vec{F})$ plus couple (M_A) qui lui est statiquement équivalent.

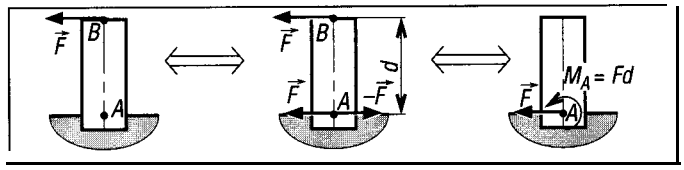


Fig. 3

Exemple 4 : tout système de n forces $(\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots, \vec{F_n})$ dans l'espace est statiquement équivalent (autrement dit peut se réduire) en tout point A à un système force $(\vec{S})$ plus couple $(\vec{M_A})$ tel que : $\vec{S} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \ldots + \vec{F_n}$ et $\vec{M_A} = \vec{M_A(F_1)} + \vec{M_A(F_2)} + \ldots + \vec{M_A(F_n)}$.

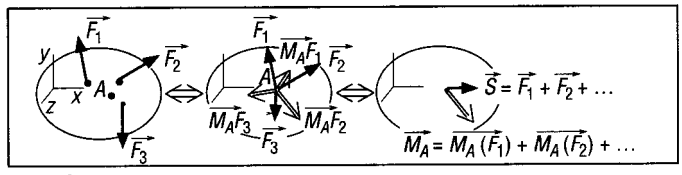


Fig. 4

Remarque : il suffit de répéter ***n*** fois le raisonnement de l'exemple 3, puis de faire les sommes vectorielles respectives.

Exemple 5 : dans le cas des liaisons mécaniques usuelles (pivot, rotule, etc.), en procédant de la même manière que pour l'exemple 4, l'infinité des petites forces de contact $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \ldots, \vec{f_n})$ émanant les actions exercées entre les solides (1) et (2) est statiquement équivalente en tout point A à un système force $(\vec{S} = \vec{f_1} + \ldots + \vec{f_n})$ plus couple $[\vec{M_A} = \vec{M_A(f_1)} + \ldots + \vec{M_A(f_n)}]$ encore appelé torseur des actions de contact.

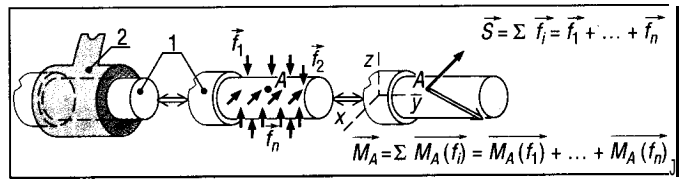


Fig. 5

Remarque : si $\vec{S}$ ne dépend pas du point A choisi, il n'en va pas de même pour le moment résultant $\vec{M_A}$.

II - Définitions et notations

Défini en un point donné (A), un torseur d'action mécanique est un système force-couple constitué de deux grandeurs :

a) une force ou somme vectorielle $\overrightarrow{S}$, indépendante du point choisi.

b) un couple ou moment résultant $\overrightarrow{M_A}$, fonction du point A choisi.

Notation : $\left\{\begin{matrix}\text{torseur}\\ \text{en } A\end{matrix}\right\} = {}_A\{T_A\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{S}\\ \overrightarrow{M_A}\end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix}X & L_A\\ Y & M_A\\ Z & N_A\end{matrix}\right\}_{A\,(x,y,z)}$ ou $\{T_A\}_A = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{S}\\ \overrightarrow{M_A}\end{matrix}\right\}_A$

Remarque 1 : dans le repère (x, y, z), $\overrightarrow{S}$ et $\overrightarrow{M_A}$ s'écrivent :
$\overrightarrow{S} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k}$ et $\overrightarrow{M_A} = L_A\,\vec{i} + M_A\,\vec{j} + N_A\,\vec{k}$
S'il n'y a pas d'ambiguités, l'indication du repère (x, y, z) peut être omise de l'écriture.

Remarque 2 : $\overrightarrow{S}$ et $\overrightarrow{M_A}$ sont appelés les éléments de réduction du torseur. $\overrightarrow{S}$ encore notée $\overrightarrow{R}$ est aussi appelée résultante générale du torseur (en remarquant que $\overrightarrow{S}$ n'a pas toutes les propriétés des résultantes du chapitre 4).

Exemple : action de contact, en A et B, exercée par un solide 1 sur un solide 2.

$$\{T_{1/2}\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{S_{1/2}}\\ \overrightarrow{M_{A\,1/2}}\end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix}X_{1/2} & L_{A\,1/2}\\ Y_{1/2} & M_{A\,1/2}\\ Z_{1/2} & N_{A\,1/2}\end{matrix}\right\}_A \quad ; \quad \{T_{1/2}\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{S_{1/2}}\\ \overrightarrow{M_{B\,1/2}}\end{matrix}\right\}_B = \left\{\begin{matrix}X_{1/2} & L_{B\,1/2}\\ Y_{1/2} & M_{B\,1/2}\\ Z_{1/2} & N_{B\,1/2}\end{matrix}\right\}_B$$

III - Écriture d'un torseur en différents points

Un torseur (T) étant connu en un point A, déterminons sa valeur en un point B.

Principe

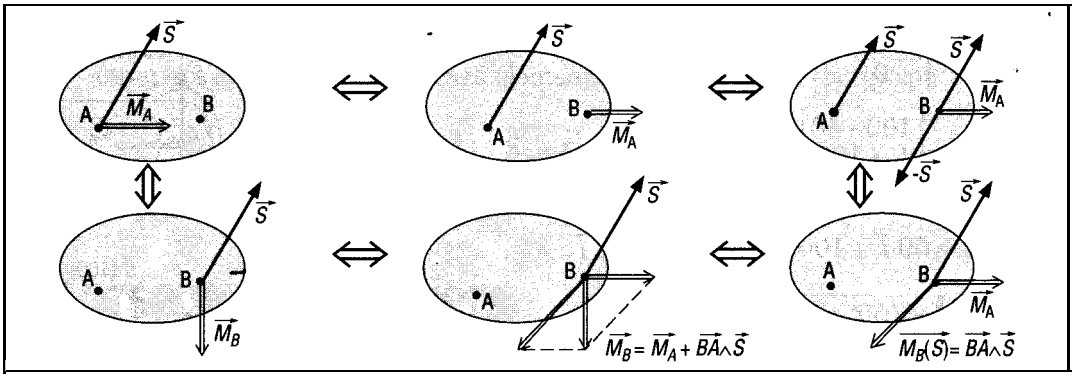


Fig. 6

a) La somme vectorielle $\overrightarrow{S}$ du torseur a même valeur en tout point, elle est invariable.

b) $\overrightarrow{M_A}$ étant connu, la valeur du moment en B, $\overrightarrow{M_B}$, est obtenue par la relation :

$$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{S} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{M_B^t(S)}$$

Remarque 1 : de manière générale, si 0 est l'origine du repère de calcul (0, x, y, z), les coordonnées de A, B et $\overrightarrow{BA}$ sont :

$$\overrightarrow{OA}\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{OB}\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{BA}\begin{bmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{bmatrix}$$

Le moment $\overrightarrow{M_B}$ est alors égal à :

$$\overrightarrow{M_B}\begin{pmatrix} L_B \\ M_B \\ N_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{S}$$

et

$$\begin{aligned} L_B &= L_A + Z(y_A - y_B) - Y(z_A - z_B) \\ M_B &= M_A - Z(x_A - x_B) + X(z_A - z_B) \\ N_B &= N_A + Y(x_A - x_B) - X(y_A - y_B) \end{aligned}$$

Remarque 2 : on notera que toutes les écritures sont statiquement équivalentes (l'écriture en A est statiquement équivalente à celle en B). De ce fait, on peut choisir n'importe quel point pour écrire le torseur des actions exercées. Les diverses écritures sont comparables aux différentes photos possibles d'un même individu.

Exemple : reprenons l'exemple 5 du paragraphe 1 ; les actions exercées par le solide (2) sur le solide (1) sont schématisées par :

$$\{T_{1/2}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{S} \\ \overrightarrow{M_A} \end{matrix} \right\}_A \text{ avec } \vec{S}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000\,\text{N} \end{bmatrix} \overrightarrow{M_A}\begin{bmatrix} 100\,\text{Nm} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \left\{ \begin{matrix} \vec{S} = 1000\,\vec{k} \\ \text{MA} = 100\,\vec{i} \end{matrix} \right\}$$

Coordonnées de A (origine), B et $\overrightarrow{BA}$

$$A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B\begin{bmatrix} 0{,}1\,m \\ 0{,}04 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{BA}\begin{bmatrix} -0{,}1 \\ -0{,}04 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{S}$$

$$\overrightarrow{M_B} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}1 \\ -0{,}04 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\,000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 100 - 40 \\ 0 + 100 \\ 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}$$

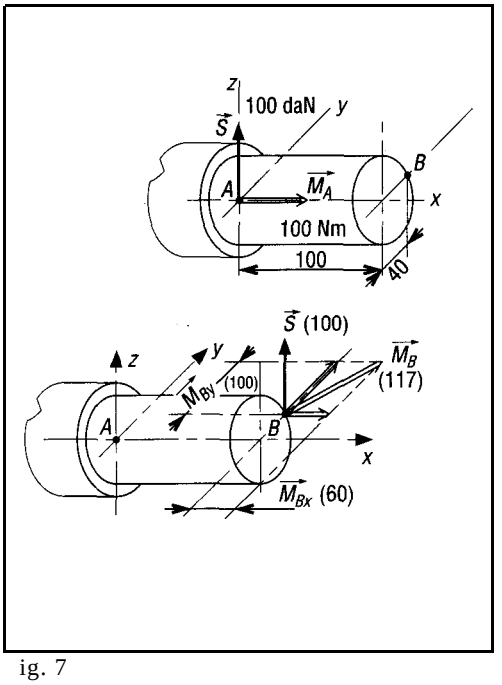
$$\overrightarrow{M_B} = 60\,\vec{i} + 100\,\vec{j} = M_{Bx}\,\vec{i} + M_{By}\,\vec{j}$$

$$\left\| \overrightarrow{M_B} \right\| = \sqrt{60^2 + 100^2} \simeq 117\text{Nm}$$

Résultats

$$\{T_{1/2}\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 100 \\ 0 & 0 \\ 1\,000 & 0 \end{matrix} \right\}_A$$

$$\{T_{1/2}\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 60 \\ 0 & 100 \\ 1\,000 & 0 \end{matrix} \right\}_B$$



ig. 7

IV - Opérations sur les torseurs

1. Addition ou somme de torseurs

Condition impérative : la somme de n torseurs $\{T_1\}, \{T_2\}, \ldots, \{T_n\}$ n'est possible que si tous les torseurs de la somme sont écrits au même point.

$$\{T_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{S_1} \\ \overrightarrow{M_{1A}} \end{array} \right\}_A \quad ; \quad \{T_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{S_2} \\ \overrightarrow{M_{2A}} \end{array} \right\}_A \quad ; \ \ldots \ ; \quad \{T_n\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{S_n} \\ \overrightarrow{M_{nA}} \end{array} \right\}_A$$

$$\{T\}_A = \{T_1\}_A + \{T_2\}_A + \ldots + \{T_n\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{S} = \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} + \ldots + \overrightarrow{S_n} \\ \overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_{1A}} + \overrightarrow{M_{2A}} + \ldots + \overrightarrow{M_{nA}} \end{array} \right\}_A$$

Pour effectuer la somme, il faut additionner d'un côté les n sommes vectorielles et de l'autre, les n moments écrits au même point A. L'addition se résume à deux sommes de vecteurs.

2. Multiplication par un scalaire

Si a est un scalaire (nombre) quelconque et $\{T\}$ un torseur, le produit de a par $\{T\}$ revient à ajouter k fois le torseur $\{T\}$ avec lui-même.

$$a \,.\, \{T\} = (a \,.\, T) = a \,. \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{S} \\ \overrightarrow{M_A} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{a.S} \\ \overrightarrow{a \,.\, M_A} \end{array} \right\}_A$$

3. Torseurs égaux

Deux torseurs $\{T_1\}$ et $\{T_2\}$ sont égaux s'ils ont même somme $\overrightarrow{S}$ et même moment $\overrightarrow{M_A}$ au point A, autrement dit s'ils ont les mêmes éléments de réduction en tout point.

$$\{T_1\} = \{T_2\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{S_1} \\ \overrightarrow{M_{1A}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{S_2} \\ \overrightarrow{M_{2A}} \end{array} \right\}_A \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{S_1} = \overrightarrow{S_2} \\ \overrightarrow{M_{1A}} = \overrightarrow{M_{2A}} \end{array} \right\}$$

V - Torseurs particuliers

1. Torseur nul

Cas où $\overrightarrow{S}$ et $\overrightarrow{M_A}$ sont nuls, exemple de notation : $\{0\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$ en tout point

Remarque : le torseur est nul en tout point de l'espace.

2. Torseur couple

Cas où s'est nulle et $\overrightarrow{M_A}$ non nul : $\{C\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{M} \end{matrix} \right\}$ en tout point

Remarque : la relation $\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{S}$ donne, dans la mesure où S'est nulle : $\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{0} = \overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M}$. Autrement dit, le moment a même valeur $\overrightarrow{M}$ en tout point et le torseur couple $\{C\}$ même écriture en tout point de l'espace.

Exemple

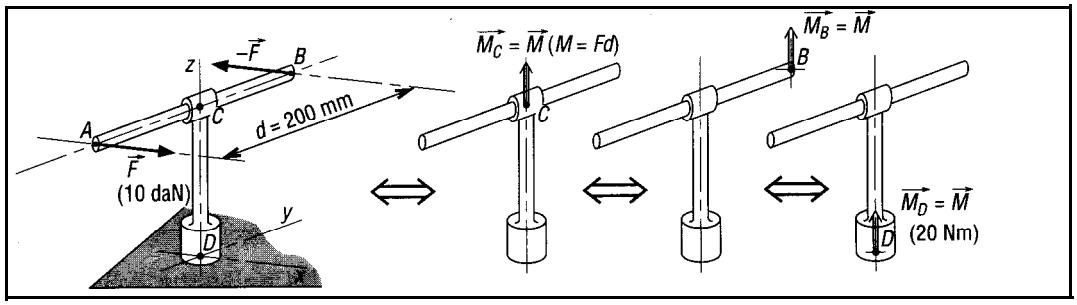


Fig. 8

L'ensemble des deux forces $\vec{F}$ et $(-\vec{F})$ est statiquement équivalent au couple $\overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{M}$ en C de module M = F . a' = 100 x $0{,}2$ = 20 Nm. Le couple a même valeur en tout point de la clé $\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_D} = \overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{M}$. Il en résulte que le couple de serrage exercé sur l'écrou en D est $\overrightarrow{M}$ (20 Nm) d'axe z.

Le torseur couple s'écrit : $\{C\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{M} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ 20\vec{k} \end{matrix} \right\}$ en tout point.

3. Glisseur

Cas où, en un point, le torseur se réduit à une somme $\vec{S}$ non nulle et à un moment $\overrightarrow{M_A}$ nul : $\{G\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{S} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$

Remarque : les forces ou les vecteurs-forces usuels, les résultantes des chapitres précédents, ont tous comme image, ou sont tous schématisés, par des glisseurs.

À la ligne d'action de la force correspond l'axe du glisseur. Si A est un point de cette ligne, le moment en A du glisseur est nul $(\overrightarrow{M_A} = \vec{0})$.

En un point I éloigné de la direction de l'axe du glisseur, le moment $\overrightarrow{M_I}$ n'est pas nul :

$\overrightarrow{M_I} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{IA} \wedge \vec{S} = \vec{0} + \overrightarrow{IA} \wedge \vec{S}$

$\overrightarrow{M_I}$ = moment en I de $\vec{S}$ en $A = \overrightarrow{IA} \wedge \vec{S}$

$\overrightarrow{M_I}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{IA}$ et à $\vec{S}$, il en résulte la propriété : $\overrightarrow{M_I} \cdot \vec{S} = 0$

Le produit scalaire de $\overrightarrow{M_I}$ par $\vec{S}$ est toujours nul dans le cas d'un glisseur. Cette propriété, propre aux glisseurs, permet de les distinguer des autres torseurs.

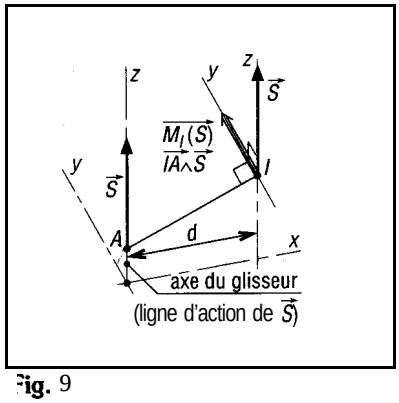


Fig. 9

Évolution des écritures d'un même glisseur et propriétés

$$\vec{F} = 100\vec{k}$$

$$\{G\}_A = \{G\}_D = \begin{Bmatrix} 100\vec{k} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{G\}_B = \{G\}_E = \begin{Bmatrix} 100\vec{k} \\ 200\vec{j} \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F} = 200\vec{j}$$

$$\{G\}_C = \{G\}_H = \begin{Bmatrix} 100\vec{k} \\ 500\vec{j} \end{Bmatrix}$$

Remarque :

$$\frac{M_B}{AB} = \frac{M_C}{AC} = \frac{200}{2} = 100$$

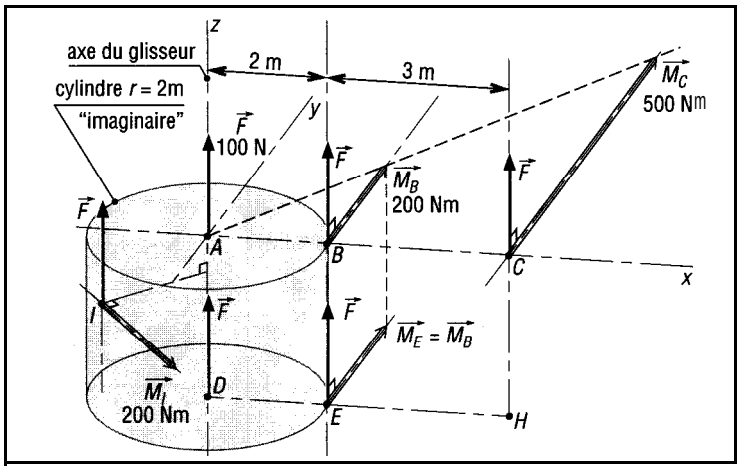


Fig. 10

L'écriture du glisseur est la même pour tous les points (A, D, etc.) de son axe. L'écriture du glisseur est la même pour tous les points (B, E, etc.) appartenant à une droite parallèle à son axe ou à sa résultante ($\overrightarrow{F} = \overrightarrow{S}$).

Tous les points (B, E, I, etc.) appartenant à la périphérie d'un cylindre d'axe l'axe du glisseur ont des moments de même module : $M_B = M_E$ = M, = 200 Nm.

VI • Propriétés des torseurs dans le cas général

Dans le cas général, $\overrightarrow{S} \neq \overrightarrow{0}$; $\overrightarrow{M_A} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{M_A} . \overrightarrow{S} \neq \overrightarrow{0}$ (le torseur n'est pas un glisseur).

1. Équiprojectivité des moments

$$\text{Soit : } \{T\} = \begin{Bmatrix} \vec{S} \\ \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{S} \\ \overrightarrow{M_B} \end{Bmatrix}_B$$

avec $\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{S}$

Multiplions scalairement les deux membres par $\overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{M_B} . \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{M_A} . \overrightarrow{BA} + (\overrightarrow{BA} \wedge \vec{S}) . \overrightarrow{BA}$$
$$= \overrightarrow{M_A} . \overrightarrow{BA} + 0$$

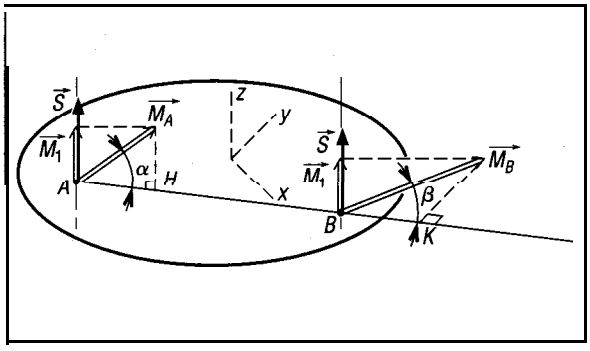


Fig. 11

Remarque : $\overrightarrow{BA} \wedge \vec{S}$ est un vecteur perpendiculaire à la fois à $\overrightarrow{BA}$ et à $\vec{S}$. Il en résulte que $(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{S}) . \overrightarrow{BA} = 0$

$$\overrightarrow{M_B} . \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_A} . \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BK}$$

La projection de $\overrightarrow{M_A}$ sur $\overrightarrow{AB}$ est égale à la projection de $\overrightarrow{M_B}$ sur $\overrightarrow{AB}$ quels que soient les points A et B choisis, autrement dit : $\overrightarrow{M_A} . \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_B} . \overrightarrow{AB}$.

On dit qu'il y a équiprojectivité du champ (de l'ensemble) des moments du torseur.

Remarque : de façon analogue, la projection des moments sur la direction de la résultante $\vec{S}$ donne toujours la même valeur $\overrightarrow{M_1}$.

2. Évolution des écritures d'un même torseur et propriétés

Pour tout point (A, D) de l'axe central :

$$\{T\}_A = \{T\}_D = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100\vec{k} \\ 150\vec{k} \end{Bmatrix}$$

Pour tous points (B, E, etc.) appartenant à une droite parallèle à $\vec{S}$, l'écriture est la même :

$$\{T\}_E = \{T\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M_B} \end{Bmatrix}$$

Même remarque en C et H sur CH

$$\{T\}_C = \{T\}_H = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M_C} \end{Bmatrix}$$

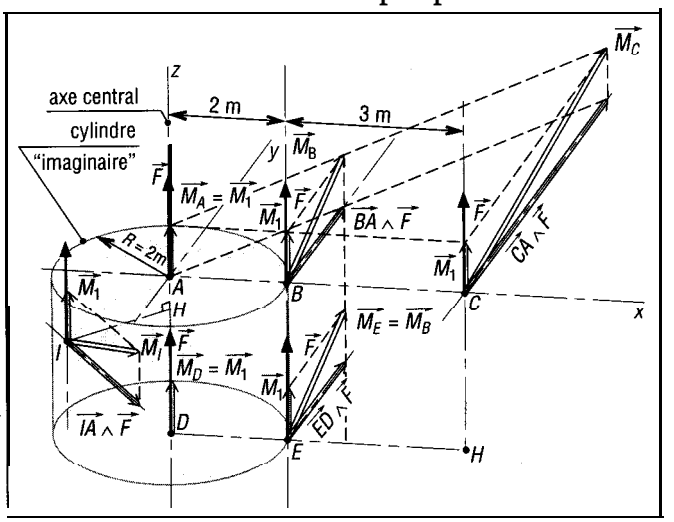


Fig. 12

Tous les points (B, E, I, etc.) appartenant à la périphérie d'un cylindre d'axe, l'axe centra1 du torseur, ont des moments de même module : $M_E = M_B = M_I = \sqrt{150^2 + 200^2} = 250\,\text{Nm}$.

Remarque : tous les torseurs ont un axe centra1 ; de plus cet axe centra1 est unique. Sur l'axe central, la somme $\vec{S}$ et le moment $\vec{M_1}$ sont colinéaires (même ligne d'action). La combinaison particulière $\vec{S}$ avec $\vec{M_1}$ est appelée visseur. Ce type d'action se rencontre par exemple dans le cas d'un foret réalisant le perçage d'une pièce.

VII • Principe fondamental de la statique

Énoncé : un solide (S), en équilibre sous l'action de n torseurs d'actions mécaniques ${}_A\{T_{1/S}\}, {}_B\{T_{2/S}\}, \ldots, {}_N\{T_{n/S}\}$ reste en équilibre si la somme des n torseurs, tous écrits au même point I, est égale au torseur nul $\{0\}$: ${}_I\{T_{1/S}\} + {}_I\{T_{2/S}\} + \ldots + {}_I\{T_{n/S}\} = \{0\}$

Le principe fondamental a déjà été énoncé une fois en statique plane et une fois en statique dans l'espace. L'énoncé précédent utilise une autre écriture mais n'en diffère pas fondamentalement. Les moments sont exprimés sous forme vectorielle. Les autres principes restent inchangés : principe des actions mutuelles, principe de transmissibilité des forces ou des glisseurs, isolement d'un solide, méthode générale de résolution d'un problème de statique, application aux ensembles de solides (voir statique plane).

Remarques : $\{T_{1/S}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{S}_{1/S} \\ \vec{M}_{A\,1/S} \end{Bmatrix}$; $\{T_{2/S}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{S}_{2/S} \\ \vec{M}_{B\,2/S} \end{Bmatrix}$; … ; $\{T_{n/S}\} = {}_N\begin{Bmatrix} \vec{S}_{n/S} \\ \vec{M}_{N\,n/S} \end{Bmatrix}$

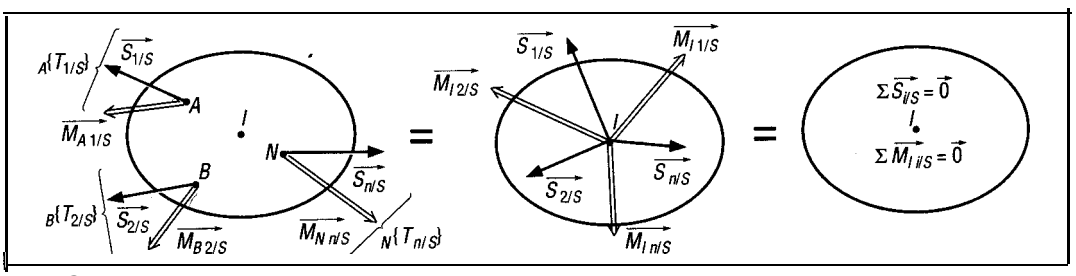


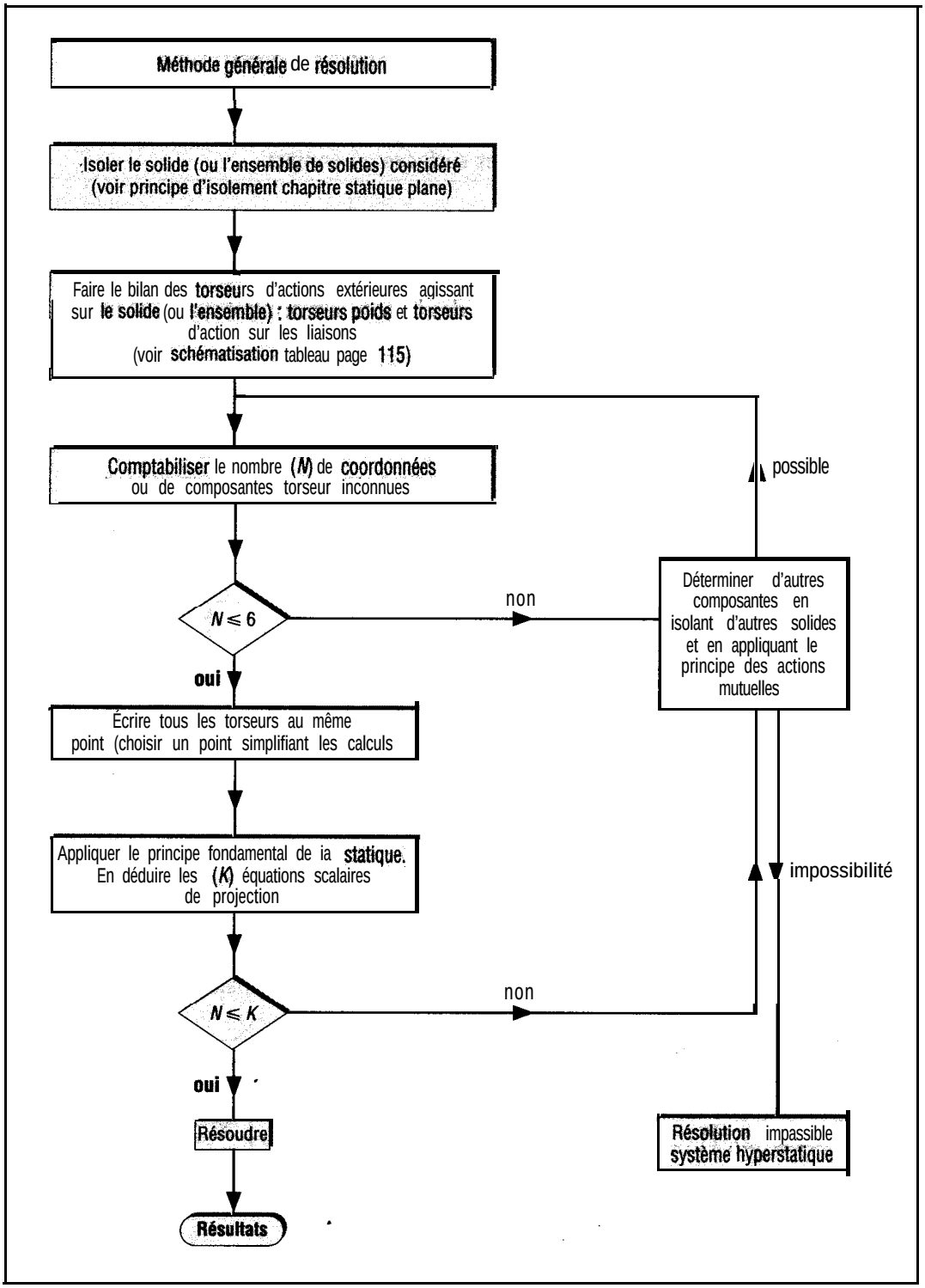
Fig. 13

L'addition des n torseurs se ramène à deux équations vectorielles dans l'espace :

a) $\Sigma \overrightarrow{S_{i/S}} = \overrightarrow{S_{1/S}} + \overrightarrow{S_{2/S}} + \ldots + \overrightarrow{S_{n/S}} = \overrightarrow{0}$ (donne trois équations scalaires de projection sur les axes x, y, z).

b) $\Sigma \overrightarrow{M_{I\,i/S}} = \overrightarrow{M_{I\,1/S}} + \overrightarrow{M_{I\,2/S}} + \ldots + \overrightarrow{M_{I\,n/S}} = \overrightarrow{0}$ (donne trois équations scalaires de projection sur les axes x, y, z).

Pour la résolution, on dispose, au plus, de six équations pour déterminer six coordonnées inconnues au maximum (coordonnées sur x, y, z des vecteurs somme $\overrightarrow{S_{i/S}}$ et moment $\overrightarrow{M_{I\,i/S}}$).



VIII - Torseurs d'actions exercées par les liaisons usuelles

C'est lorsque les liaisons mécaniques et les actions entre solides sont définies de manière détaillée que les torseurs montrent tout leur intérêt.

1. Liaison parfaite

Une liaison définie comme parfaite vérifie les trois conditions suivantes :
- les surfaces de contact sont géométriquement parfaites,
- le contact est supposé réalise sans jeu (ajusté sans jeu),
- il n'y a pas de frottement entre les surfaces en contact.

2. Schématisation des liaisons

La schématisation ou la modélisation des liaisons est normalisée et est indiquée dans les tableaux suivants.

Remarque : les jeux internes aux liaisons réelles peuvent parfois amener plusieurs interprétations possibles et des choix différents pour une modélisation.

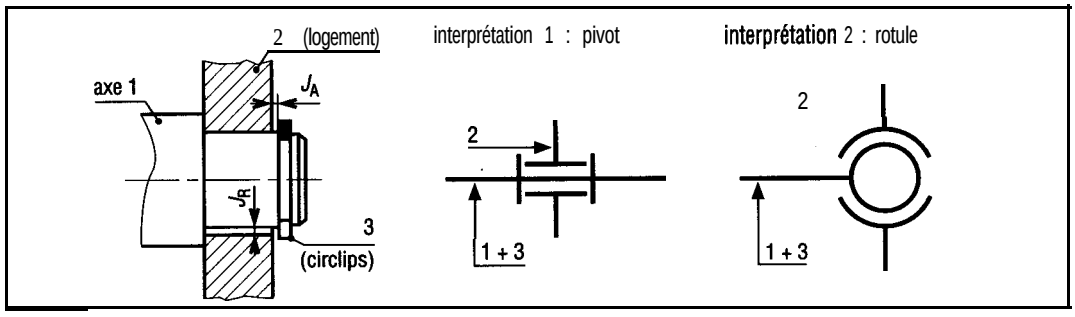


Fig. 14

Pour l'exemple propose et suivant la valeur des jeux radial (J_R) et axial (J_A), plusieurs schématisations sont possibles : pivot (J_A et J_R faibles) ; rotule (J_A et J_R assez grands) ; appui plan (épaulement entre 1 et 2 grand) ; etc.

Le choix définitif retenu peut conduire à un problème isostatique (calculable en statique) ou à un problème hyperstatique (non calculable à partir des seules équations de la statique) et conditionne le succès de l'étude envisagée. Une certaine expérience est nécessaire et on met ici en évidence l'une des difficultés de l'application des torseurs.

3. Torseurs d'actions (intereforts) des liaisons usuelles

Pour le solide (1) en liaison avec le solide (2), $\{T_{1/2}\}$ est le torseur des actions exercées par 1 sur 2 au point 0 choisi (voir tableaux). X, Y, Z, L, M et N sont les coordonnées du torseur.

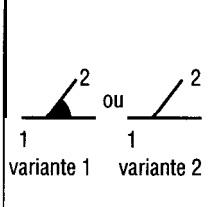
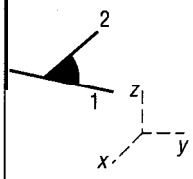
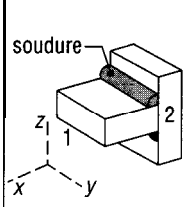
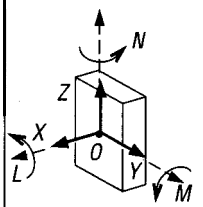
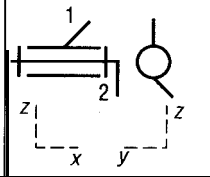
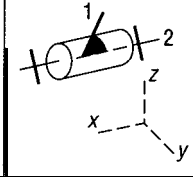
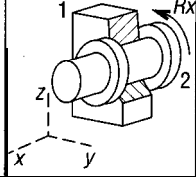
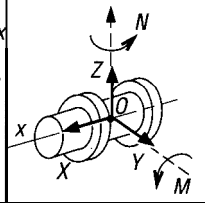
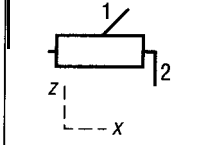
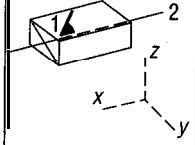
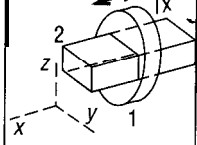
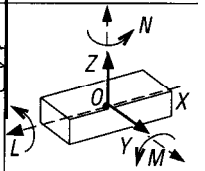
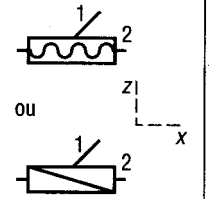
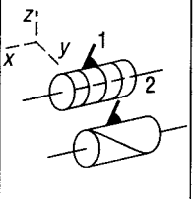
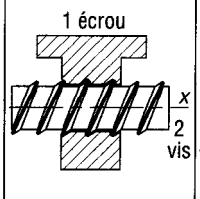
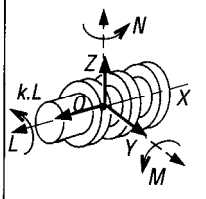
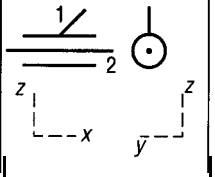
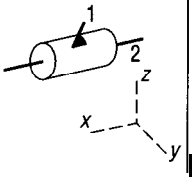
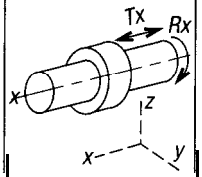
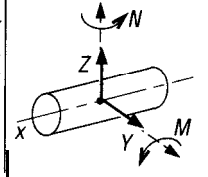
$$\{T_{1/2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{S_{1/2}} \\ \overrightarrow{M_{O\,1/2}} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{cc} X_{1/2} & L_{O\,1/2} \\ Y_{1/2} & M_{O\,1/2} \\ Z_{1/2} & N_{O\,1/2} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_O$$

$$\overrightarrow{S_{1/2}} = X\,\vec{i} + Y.\vec{j} + Z.\vec{k} \quad ; \quad \overrightarrow{M_{O\,1/2}} = L.\vec{i} + M.\vec{j} + N.\vec{k}$$

Remarques : suivant la nature de la liaison, certaines coordonnées seront nulles. L'ensemble des coordonnées non nulles caractérise l'effort transmissible par la liaison. Les mouvements possibles du solide (2) par rapport au solide (1) sont indiqués par R_x, R_y, R_z, T_x, T_y, T_z. R_x indique une rotation possible autour de l'axe x et T_z une translation possible dans la direction z. Il y a au plus six mouvements possibles, trois rotations et trois translations, correspondant à six degrés de liberté.

Si une rotation est possible suivant l'axe x (R_x), dans le même temps, il n'y a pas de couple transmissible suivant cet axe ; autrement dit : L = 0. Même remarque avec les translations, si T_y existe alors Y = 0, etc.

Dans le cas particulier de la liaison-glissière hélicoïdale (vis-écrou), les coordonnées X et L dépendent l'une de l'autre (X = kL), de la même façon que la rotation R_x et la translation T_x sont liées par le pas. Si X est connu, L est lui aussi connu et inversement : c'est le principe de la clé dynamométrique.

Nom de la liaison	translations	rotations	degrés de liberté	Représentation plane (orthogonale)	Représentation en perspective	Torseur d'intereffort $T_{1/2}$	Exemple	Action sur le solide 2 isolé
Encastrement ou liaison fixe	0	0	0			$0\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$		
Pivot (axe O, x)	0	Rx	1			$0\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$		
Glissière (axe O, x)	Tx	0	1			$0\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$		
Hélicoïdale (axe O, x)	Tx + Rx combinées fonction du pas		1			$0\begin{Bmatrix} k.L & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$		
Pivot glissant (axe O, x)	Tx	Rx	2			$0\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$		

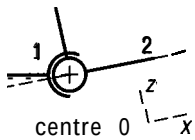
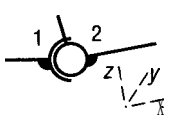
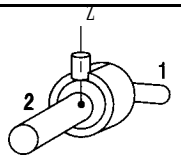
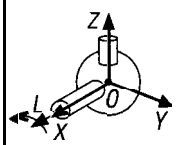
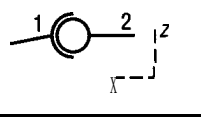
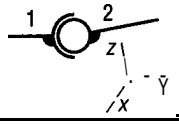
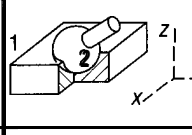
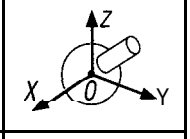
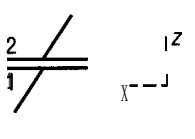
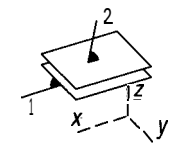
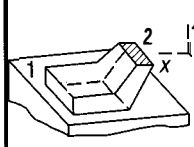
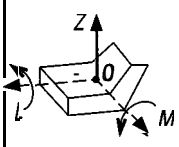
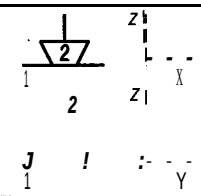
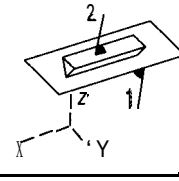
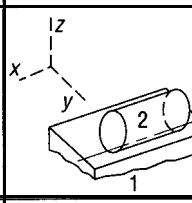
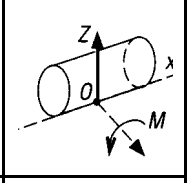
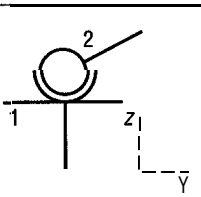
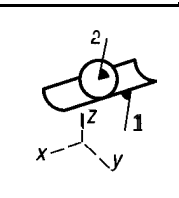
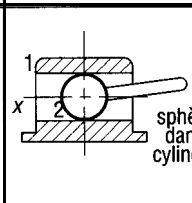
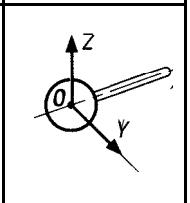
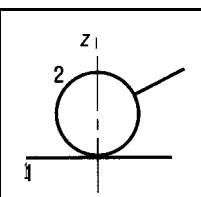
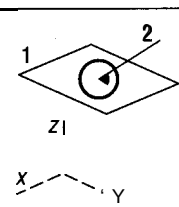
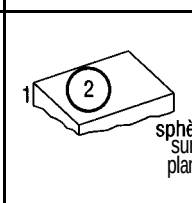
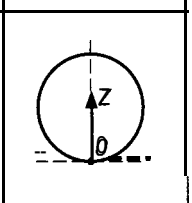
Nom de la liaison	translations	rotations	degrés de liberté	Représentation plane (orthogonale)	Représentation en perspective	Torseur d'inter-effort $T_{1/2}$	Exemple	Action sur le solide 2 isolé
Rotule à doigt (doigt o,z)	0	Ry Rz	2			$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$		
Rotule ou sphérique centre O	0	Rx Ry Rz	3			$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$		
Appui plan normale O,z	Tx Ty	Rz	3			$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$		
Linéaire rectiligne (axe O, x) (normale O, z)	Tx Ty	Rx Rz	4			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$		
Linéaire annulaire (axe O, x)	Tx	Rx Ry Rz	4			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$		
Ponctuelle (direction O, z)	Tx Ty	Rx Ry Rz	5			$\begin{Bmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$		

Fig. 15 (liaison linéaire annulaire ou sphère cylindre, ponctuelle ou sphère plan)

EXERCICES RÉSOLUS

1 L'hélicoptère proposé évolue horizontalement à vitesse constante suivant l'axe (0, x) ; l'axe (0, z) est vertical. $\vec{F}$ et $\vec{M}$ schématisent les actions exercées par l'air sur les pales du rotor principal. $\vec{M_Q}$ et $\vec{Q}$ sont les actions sur le rotor anti-couple, $\vec{R}$ est la résistance de l'air sur l'ensemble de l'appareil et $\vec{P}$ le poids total.

Écrire les torseurs correspondant aux actions précédentes. Isoler l'hélicoptère ; appliquer le principe fondamental de la statique ; en déduire R, Q et F.

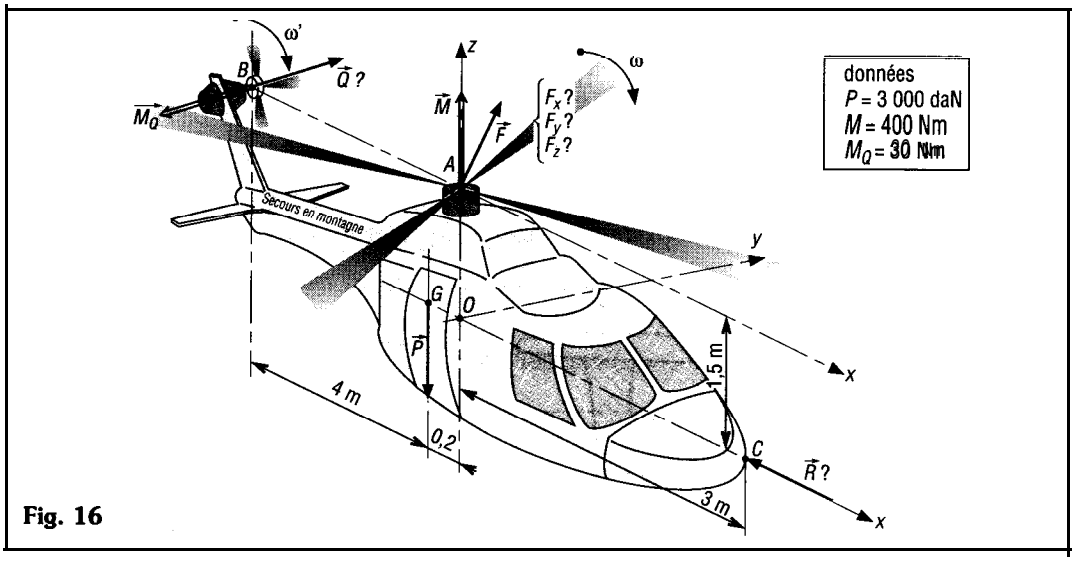


Fig. 16

Résolution : isolons l'ensemble de l'hélicoptère et appliquons le principe fondamental. L'hélicoptère est soumis à l'action de quatre torseurs d'actions extérieures :

a) action du poids :

$$\{\mathscr{T}_P\} = \left\{\begin{matrix}\vec{P}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_G = \begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ -P & 0\end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & -0{,}2P\\ -P & 0\end{Bmatrix}_A$$

$$\text{avec } \overrightarrow{M_A(\vec{P})} = \overrightarrow{M_G(\vec{P})} + \overrightarrow{AG}\wedge\vec{P} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-0{,}2\\0\\-1{,}5\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}0\\0\\-P\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-0{,}2P\\0\end{bmatrix}$$

b) résistance de l'air :

$$\{\mathscr{T}_R\} = \left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_C = \begin{Bmatrix}-R & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix}-R & 0\\ 0 & 1{,}5R\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_A$$

$$\text{avec } \overrightarrow{M_A(\vec{R})} = \overrightarrow{M_C(\vec{R})} + \overrightarrow{AC}\wedge\vec{R} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\0\\-1{,}5\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}-R\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1{,}5R\\0\end{bmatrix}$$

c) action du rotor de queue :

$$\{\mathscr{T}_B\} = \left\{\begin{matrix}\vec{Q}\\ \overrightarrow{M_Q}\end{matrix}\right\}_B = \begin{Bmatrix}0 & 0\\ Q & -M_Q\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix}0 & 0\\ Q & -M_Q\\ 0 & -4{,}2Q\end{Bmatrix}_A$$

$$\text{avec } \overrightarrow{M_A(\vec{Q})} = \overrightarrow{M_B(\vec{Q})} + \overrightarrow{AB}\wedge\vec{Q} = \begin{bmatrix}0\\-M_Q\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4{,}2\\0\\0\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}0\\Q\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-M_Q\\-4{,}2Q\end{bmatrix}$$

d) action du rotor principal :

$$\{\mathscr{T}_A\} = \left\{\begin{matrix}\vec{F}\\ \vec{M}\end{matrix}\right\}_A = \begin{Bmatrix}F_x & 0\\ F_y & 0\\ F_z & M\end{Bmatrix}_A$$

Écrivons le principe fondamental au point A :

$$\{\mathscr{T}_A\}_A + \{\mathscr{T}_B\}_A + \{\mathscr{T}_R\}_A + \{\mathscr{T}_P\}_A = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix}F_x & 0\\ F_y & 0\\ F_z & M\end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix}0 & 0\\ Q & -M_Q\\ 0 & -4{,}2Q\end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix}-R & 0\\ 0 & 1{,}5R\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & -0{,}2P\\ -P & 0\end{Bmatrix}_A = \{0\}$$

On obtient les équations :

$F_x - R = 0$ (1) o = o (4)

$F_y + Q = 0$ (2) $-M_Q + 1{,}5R - 0{,}2P = 0$ (5)

$F_z - P = 0$ (3) $M - 4{,}2Q = 0$ (6)

(3) donne $F_z = P = 3\,000\,\text{daN}$; .

(6) donne $Q = \dfrac{M}{4{,}2} = \dfrac{40}{4{,}2} = 9{,}5\,\text{daN}$;

(5) donne $R = \dfrac{M_Q + 0{,}2P}{1{,}5} = 402\,\text{daN}$;

(1) donne $F_x = R = 402\,\text{daN}$;

(2) donne $F_y = -Q = -9{,}5\,\text{daN}$.

❑ L'ensemble proposé représente, en coupe et sous forme schématique, l'une des roulettes d'un patin à roulettes en ligne (Roller blade). Le guidage en rotation entre la roulette (1) et le patin (2) est réalisé par deux roulements à billes à contact radial, étanches des deux côtés. La liaison entre (1) et (2) est une liaison pivot d'axe x, les poids des pièces sont négligés. Le glisseur $\overrightarrow{B_{0/1}}$ (100 N) schématise l'action exercée par le sol (0) sur la roulette (1). Déterminer le torseur des actions exercées entre (1) et (2).

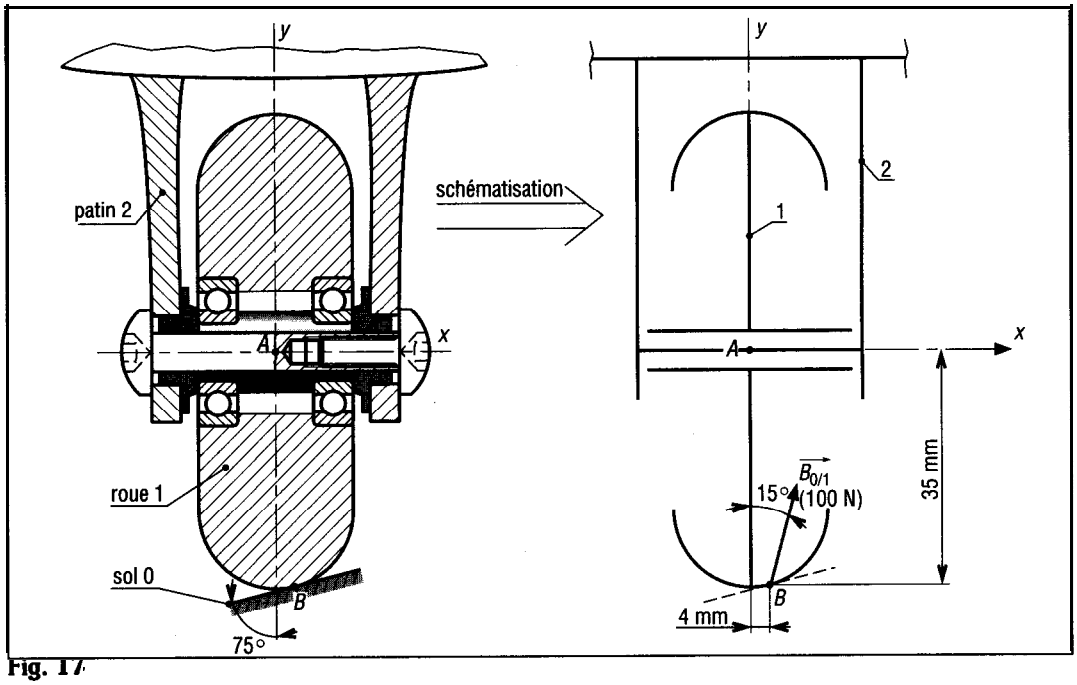


Fig. 17

Résolution

Isolons la roulette (1), le poids étant négligé, celle-ci est soumise à l'action de deux torseurs d'action.

a) action au sol : $\{\mathcal{T}_{0/1}\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{B_{0/1}} \\ \vec{O}\end{matrix}\right\}_B = \left\{\begin{matrix}B_{0/1}.\sin 15° & 0 \\ B_{0/1}.\cos 15° & 0 \\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_B = \left\{\begin{matrix}25{,}88\,\text{N} & 0 \\ 96{,}59\,\text{N} & 0 \\ 0 & 1{,}29\,\text{Nm}\end{matrix}\right\}_A$

avec $\overrightarrow{M_A(B_{0/1})} = \overrightarrow{M_B(B_{0/1})} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{B_{0/1}} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}+\,0{,}004\\-0{,}035\\0\end{pmatrix}_A \wedge \begin{pmatrix}25{,}88\\96{,}59\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1{,}29\end{pmatrix}$

b) action sur la liaison pivot : $\{\mathcal{T}_{2/1}\} = \left\{\begin{matrix}X_{2/1} & 0 \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1}\end{matrix}\right\}_A$

Appliquons le principe fondamental de la statique à la roulette.

$$\{\mathcal{T}_{0/1}\}_A + \{\mathcal{T}_{2/1}\}_A = \{0\} \quad \text{ou} \quad \{\mathcal{T}_{2/1}\}_A = -\{\mathcal{T}_{0/1}\}_A = \left\{\begin{matrix}-\,25{,}88 & 0 \\ -\,96{,}59 & 0 \\ 0 & -1{,}29\end{matrix}\right\}_A$$

Résultats

$X_{2/1} = -\,25{,}88$ N ; $Y_{2/1} = -\,96{,}59$ N ; $N_{2/1} = -\,1{,}29$ Nm ; $Z_{2/1} = 0$ $M_{2/1} = 0$

3 L'ensemble proposé en coupe longitudinale et partiellement sous forme schématique est une pompe (ou moteur) hydraulique à cylindrée constante. L'huile hydraulique est aspirée en P puis refoulée en E (400 bars maximum) par le mouvement de va-et-vient d'une série de pistons (4). Chaque piston est manœuvré en B par une biellette (3) articulée en A sur le rotor de commande (1).

Les poids des pièces et les frottements sont négligés. L'étude est limitée au piston (diamètre a' = 30 mm) en fin d'échappement et occupant la position indiquée par les figures.

Déterminons les actions exercées sur les liaisons $L_{1/3}$, $L_{3/4}$ et $L_{4/2}$.

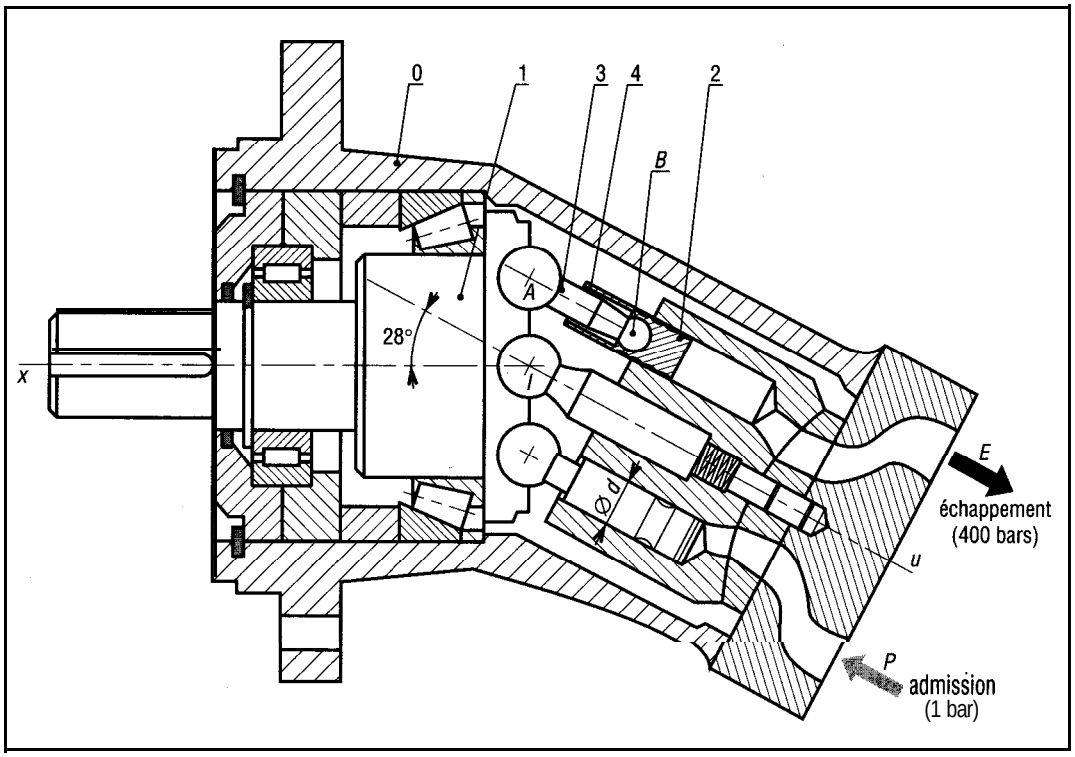


Fig. 18

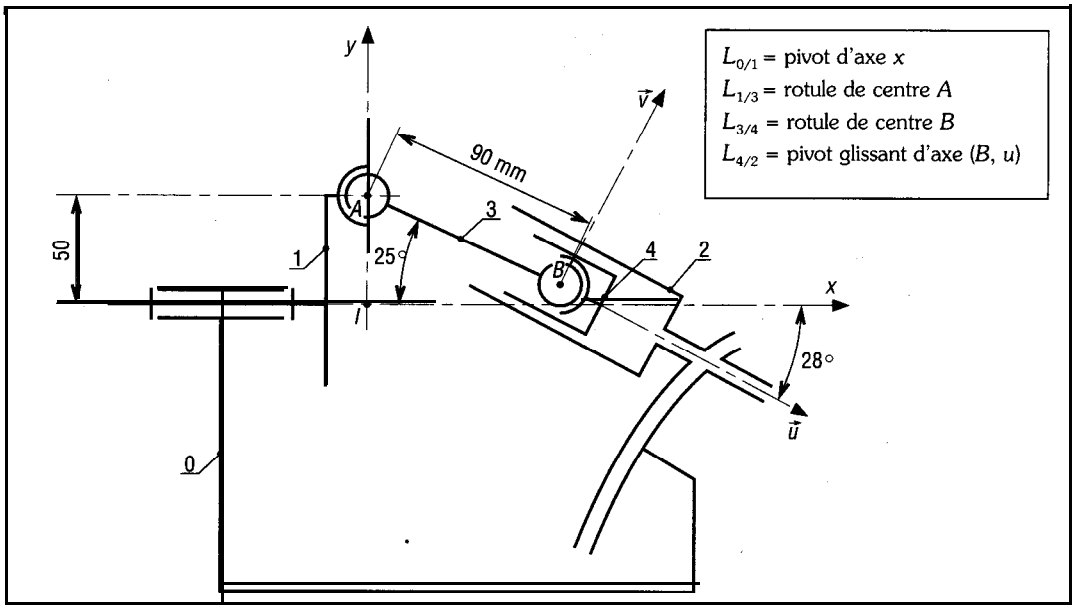


Fig. 19

Résolution

a) Isolons la biellette (3)

Le poids étant négligé, la biellette est soumise à l'action des deux torseurs $\{\mathcal{T}_{1/3}\}$ et $\{\mathcal{T}_{4/3}\}$ engendrés par les liaisons rotules en A et B.

$$\text{en } A : \{\mathcal{T}_{1/3}\} = \begin{Bmatrix} X_{1/3} & 0 \\ Y_{1/3} & 0 \\ Z_{1/3} & 0 \end{Bmatrix}_A \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{S_{1/3}} = X_{1/3}.\vec{i} + Y_{1/3}.\vec{j} + Z_{1/3}.\vec{k}$$

$$\text{en } B : \{\mathcal{T}_{4/3}\} = \begin{Bmatrix} X_{4/3} & 0 \\ Y_{4/3} & 0 \\ Z_{4/3} & 0 \end{Bmatrix}_B \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{S_{4/3}} = X_{4/3}.\vec{i} + Y_{4/3}.\vec{j} + Z_{4/3}.\vec{k}$$

Écrivons le principe fondamental en A :

$$\overrightarrow{M_A(S_{4/3})} = \overrightarrow{M_B(S_{4/3})} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{S_{4/3}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}09\cos 25° \\ -0{,}09\sin 25° \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X_{4/3} \\ Y_{4/3} \\ Z_{4/3} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -0{,}09\,Z_{4/3}\sin 25° \\ -0{,}09\,Z_{4/3}\cos 25° \\ 0{,}09\,Y_{4/3}\cos 25° + 0{,}09\,X_{4/3}\sin 25° \end{vmatrix}$$

$${}_A\{\mathcal{T}_{1/3}\} + {}_A\{\mathcal{T}_{4/3}\} = \{0\} = \begin{Bmatrix} X_{1/3} & 0 \\ Y_{1/3} & 0 \\ Z_{1/3} & 0 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} X_{4/3} & -0{,}09\,Z_{4/3}\sin 25° \\ Y_{4/3} & -0{,}09\,Z_{4/3}\cos 25° \\ Z_{4/3} & 0{,}09\,[Y_{4/3}\cos 25° + X_{4/3}\sin 25°] \end{Bmatrix}_A$$

On obtient les équations d'équilibre :

$X_{1/3} + X_{4/3} = 0$ (1) $\qquad -0{,}09\,Z_{4/3}\sin 25° = 0$ (4)

$Y_{1/3} + Y_{4/3} = 0$ (2) $\qquad -0{,}09\,Z_{4/3}\cos 25° = 0$ (5)

$Z_{1/3} + Z_{4/3} = 0$ (3) $\qquad 0{,}09\,[Y_{4/3}\cos 25° + X_{4/3}\sin 25°] = 0$ (6)

Les équations (4), (5) et (3) donnent : $Z_{4/3} = 0 = Z_{1/3}$.

Les équations (6), (1) et (2) donnent : $\dfrac{Y_{4/3}}{X_{4/3}} = -\tan 25° = \dfrac{X_{1/3}}{Y_{1/3}}$

Remarque : on retrouve le cas déjà abordé en statique plane, si un solide est soumis à l'action de deux glisseurs, ceux-ci sont égaux et opposés et ont même ligne d'action : $\overrightarrow{S_{1/3}} = -\overrightarrow{S_{4/3}}$ (ligne d'action AB).

$X_{1/3} = S_{1/3}\cos 25°$ et $Y_{1/3} = -S_{1/3}\sin 25°$.

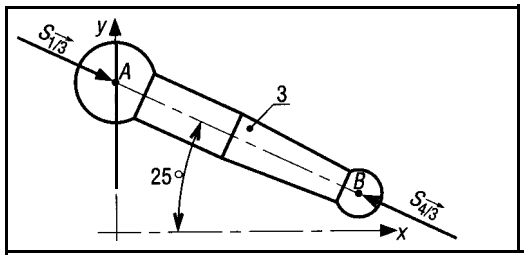


Fig. 20

b) Isolons le piston (4)

Le poids étant négligé, le piston est soumis à l'action de trois torseurs : $\{\mathcal{T}_{2/4}\}$, $\{\mathcal{T}_{3/4}\}$ et $\{\mathcal{T}_{H/4}\}$ l'action de l'huile. Travaillons avec les axes (u, v, z) plus pratiques dans ce cas.

Action de l'huile :

pS = (400 bars) x (π x $1{,}5^2$ cm^2)

= 2 827 daN

$$\{\mathcal{T}_{H/4}\} = \begin{Bmatrix} -pS & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} -2827' & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(u,v,z)}$$

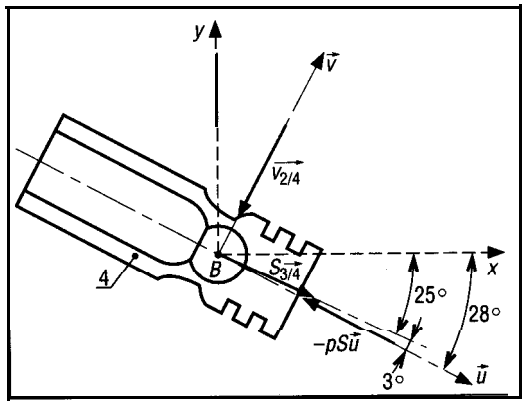


Fig. 21

Action du cylindre 2 :
(la liaison entre 4 et 2. est un pivot glissant d'axe u)

$$\{\mathcal{T}_{2/4}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ V_{2/4} & M_{V\,2/4} \\ Z_{2/4} & N_{2/4} \end{Bmatrix}_{B\,(u,v,z)}$$

Action de la biellette 3 :
${}_B\{\mathcal{T}_{3/4}\} = -{}_B\{\mathcal{T}_{4/3}\}$ d'après le principe des actions mutuelles.

$$\{\mathcal{T}_{3/4}\} = \begin{Bmatrix} S_{3/4}\cos 3° & 0 \\ S_{3/4}\sin 3° & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B\,(u,v,z)}$$

Appliquons le principe fondamental en B :

$${}_B\{\mathcal{T}_{H/4}\} + {}_B\{\mathcal{T}_{2/4}\} + {}_B\{\mathcal{T}_{3/4}\} = \begin{Bmatrix} -2\,827 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ V_{2/4} & M_{V\,2/4} \\ Z_{2/4} & N_{2/4} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} S_{3/4}\cos 3° & 0 \\ S_{3/4}\sin 3° & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B = \{0\}$$

Équations d'équilibre et résultats :

$S_{3/4}$ COS 3" $- 2\,827 = 0 \Rightarrow S_{3/4} = 2\,827/\cos 3° = 2831$ daN (1)

$V_{2/4} + S_{3/4}$ sin 3" $= 0 \Rightarrow V_{2/4} = -S_{3/4}\sin 3° = -148$ daN (2)

$Z_{2/4} = 0$ (3)

$M_{V\,2/4} = 0$ (4)

$N_{2/4} = 0$ (5)

EXERCICES À RÉSOUDRE

4 Une transmission se compose d'une poulie entraînée par trois courroies trapézoïdales. Le plan (0, Y, Z) est le plan de symétrie de l'ensemble et (0, X) l'axe de rotation. Le diamètre d'enroulement des courroies est de 400 mm. Chaque courroie supporte les tensions $\vec{T}$ (1 500 N, brin tendu) et $\vec{t}$ (300 N, brin mou). a) Écrire les trois tensions $\vec{T}$ sous forme d'un même torseur agissant en A. Même chose pour les trois tensions T'en B. b) Écrire les deux torseurs précédents au centre 0 de la liaison. c) En déduire le torseur résultant en ce point.

Réponse

$X_0 = 0$; $Y_0 = 5\,318$ N ; $Z_0 = -625$ N ; $L_0 = -720$ Nm ; $M_0 = N_0 = 0$.

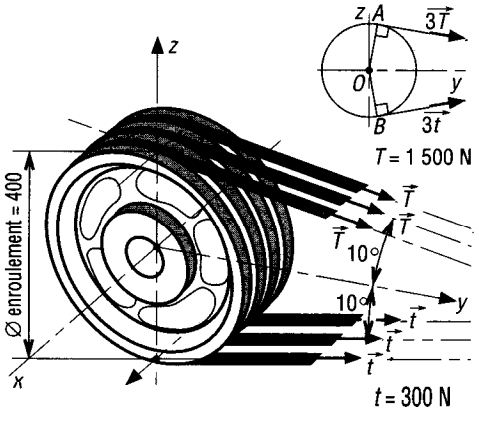


Fig. 22

5 Une roue dentée à denture hélicoïdale supporte au point A, exercée par une autre roue dentée, une action dont les composantes sont $\vec{F_A}$ (200 daN, charge axiale), $\vec{F_R}$ (100 daN, charge radiale) et $\vec{F_T}$ (400 daN, charge tangentielle). a) Écrire le torseur correspondant à ces actions au point A. b) Écrire le torseur en 0 et B.

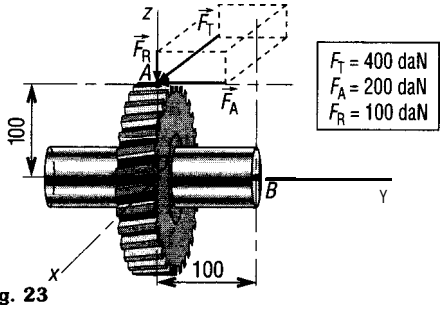


Fig. 23

6 Un robot à cinq axes supporte en A la charge $\vec{F}$ (200 N) et le couple $\vec{M_A}$ (50 Nm) indiqués sur la figure. Écrire le torseur correspondant à ces deux actions en A, B, C et O.

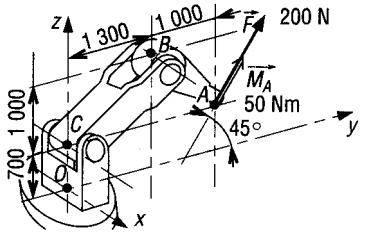


Fig. 24

❑ Les hélices d'un avion bimoteur sont supposées tourner en sens inverse l'une de l'autre. $\vec{F} = 3\,000\ \vec{i}$ (N) et $\vec{M_A} = 40\ \vec{i}$ (Nm) schématisent les actions exercées par l'air sur l'hélice A. $\vec{F}$ et $\vec{M_B} = -40\ \vec{i}$ (Nm) schématisent les actions sur l'hélice B.
a) Déterminer le torseur résultant des actions en A et B au centre de gravité G.
b) Que devient ce torseur lorsque les hélices tournent dans le même sens ? Lorsqu'un des deux moteurs tombe en panne ?

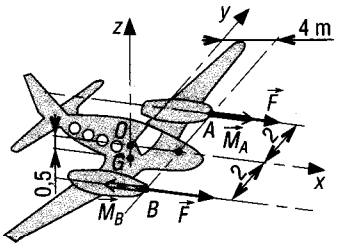


Fig. 25

❑ Les forces $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ (module 150 N) schématisent les actions exercées par l'opérateur sur une clé en croix. L'ensemble occupe la position de la figure, on est en phase desserrage, $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ sont dans le plan (A, y, z).
a) Écrire $\vec{F}$ sous forme de torseur en C et $-\vec{F}$ sous forme de torseur en D. b) Écrire les deux torseurs en A ; en déduire la valeur du torseur résultant en ce point. c) Écrire le torseur résultant en B, C et D. Quelle est la nature des torseurs ? d) Quel est le couple de desserrage (Cd) exercé sur l'écrou ?

Réponse

Torseurs couples $\{C_B\} = \{C_C\} = \{C_D\} = \{C_A\}$. X = Y = Z = 0 ; $M = N = 0$; $C_d = L = 52$ Nm.

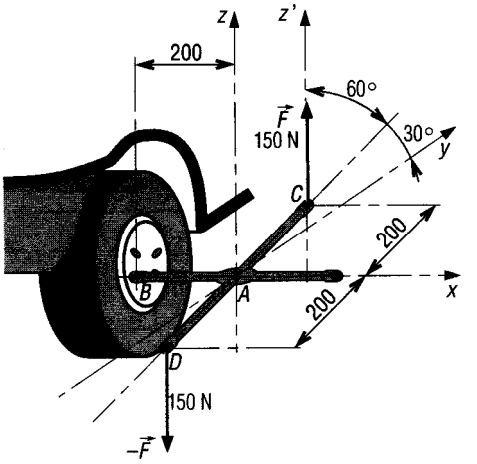


Fig. 26

9 Pour la perceuse sans fil proposée, la force $\vec{F}$ (5 daN) et le couple C (10 Nm, axe x) schématisent les actions exercées par le mur à percer sur l'extrémité B du foret.
a) Écrire les deux actions précédentes sous forme de torseur au point B. Valeurs du torseur en 0 et A ? b) Si le poids de la perceuse est négligé, déterminer les actions exercées en A par la main de l'opérateur.

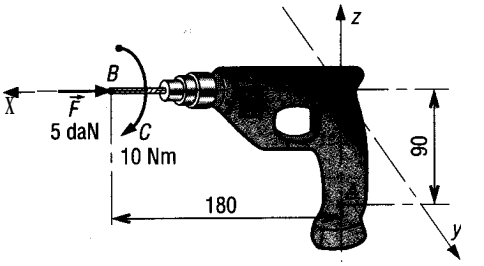


Fig. **27**

10 Un renvoi d'angle supporte les couples $\vec{C_m} = 1\,000\ \vec{j}$ (Nm) exercé en A par un moteur et $\vec{C_R} = 1\,000\ \vec{i}$ (Nm) exercé en B par le récepteur. Les poids sont négligés.
Déterminer le torseur d'encastrement en K $\{T_{0/1}\}$ exercé par le support (0) sur le renvoi.

Réponse

$X = 0$; $Y = 0$; $Z = 0$; $L = -1\,000$ Nm ; .
$M = -1\,000$; $N = 0$.

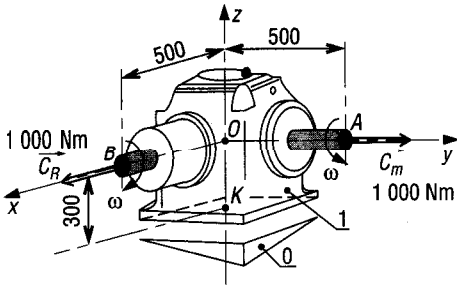


Fig. 28

11 Reprendre l'exercice 10 avec le réducteur propose à trois arbres ; $\overrightarrow{Cc}$ = 600 $\vec{i}$ (Nm) ; $\overrightarrow{C_B}$ = – 400 $\vec{i}$ et $\overrightarrow{C_m}$ = 300 $\vec{j}$.
Déterminer l'effort d'encastrement en D.

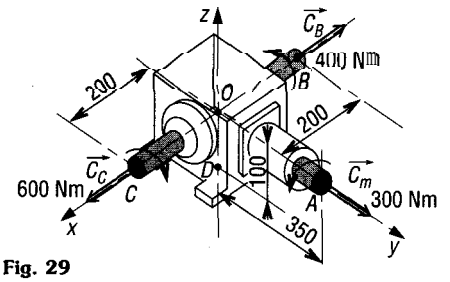


Fig. 29

❑ Pour la transmission par cardan propose, $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ (2 000 N) en A et B schématisent les actions exercées par la chape (3) sur le croisillon (2). La liaison entre la chape (1) et le bâti (0) est un pivot de centre M. Isoler l'ensemble (1 + 2) ; en déduire le torseur d'action $\{T_{0/1}\}$ et le couple transmis par l'arbre (1) ($\vec{F}$ et $-\vec{F}$ parallèles à o,x,y).

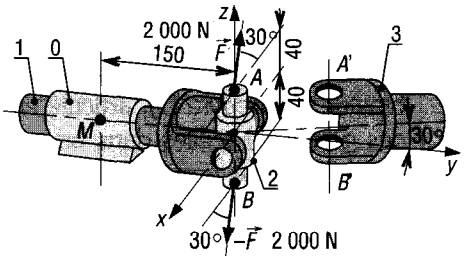


Fig. 30

❑ Une clé (1) est utilisée pour desserrer une vis bloquée sur un bâti (0). L'effort $\vec{F}$ exercé par la main de l'opérateur a pour coordonnées : F_x = 60 N ; F_y = 200 ; F_z = 40. Si l'ensemble reste en équilibre, déterminer le torseur d'encastrement exercé en A entre (0) et (1) et le couple de desserrage (C_d) appliqué à l'écrou. Le poids de la clé est négligé.

Réponse

X_A = – 60 N ; Y_A = – 200 ; Z_A = – 40 ;
L_A = + 14 Nm ; M_A = + 7,8 ; N_A = – 60 = – C_d.

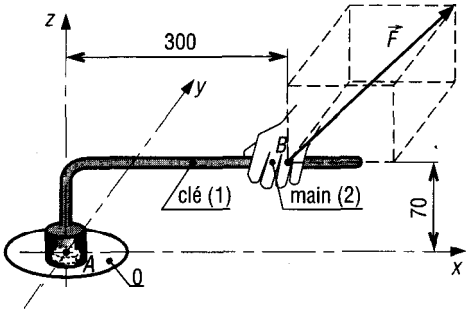


Fig. 31

14 Un couvercle (1) de canalisation est ouvert en position horizontale. Le couvercle est maintenu en C par une barre (2) ou BC. La liaison en A entre la canalisation (0) et le couvercle est un pivot d'axe (A, x). $\overrightarrow{P_1}$, 80 daN, vertical (z) en G schématise le poids du couvercle. Déterminer les actions exercées en A, B et C.

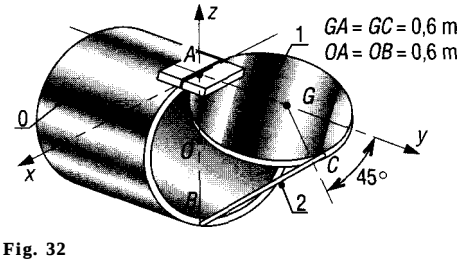


Fig. 32

15 Une roue pivotante est guidée par des roulements à billes. $\vec{F}$ (200 $\vec{k}$ daN) schématise l'action exercée par le sol. a) Écrire le torseur correspondant à $\vec{F}$ en C. Valeurs du torseur en 0, A et B ? b) Déterminer les actions exercées par les deux liaisons pivots, $L_{2/1}$ en A et $L_{0/1}$ en B si les poids sont négligés.

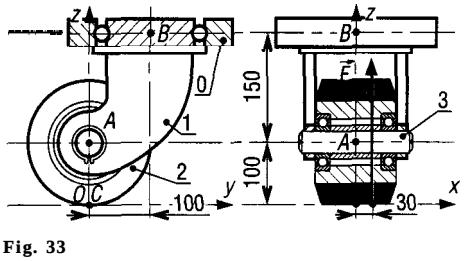


Fig. 33

16 Un arc se compose de trois parties démontables (1), (2) et (3). Apres assemblage par vis, l'ensemble est parfaitement solidaire. Si le tireur exerce un effort $\vec{F}$ de 180 N sur la corde, déterminer le torseur d'ençastrement exercé entre (1) et (2) au point A.

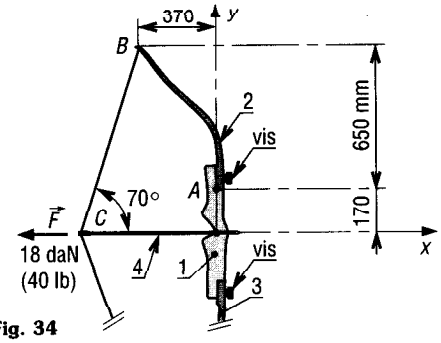


Fig. 34

Réponse

$X = 9$; $Y = 24{,}7$ daN ; $Z = 0$; $L = M = 0$; $N = -150$ Nm.

17 Une porte de coffre-fort se compose d'un bras de manœuvre (1), articulé en A et B sur des gonds (0) scellés dans un mur en béton armé, et d'une porte (2) articulée sur le bras précédent. $\vec{P_1}$ (10 kN) schématise le poids du bras de manœuvre et $\vec{P_2}$ (20 kN) le poids de la porte. La liaison en B entre (0) et (1) est une rotule de centre B, celle en A une liaison linéaire annulaire. Déterminer les torseurs exercés sur les liaisons en A et B.

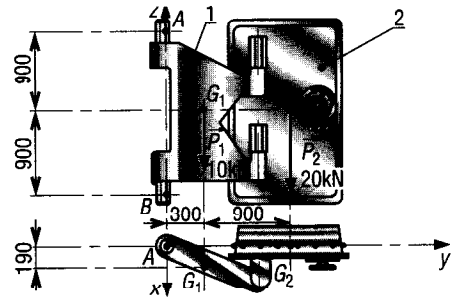


Fig. 35

18 Un arbre de transmission (1) est guidé en rotation par deux roulements à rouleaux coniques. La liaison entre (1) et le bâti (0) est un pivot d'axe y. La partie pignon conique de l'arbre supporte en A la charge $\vec{F}$ telle que : $\vec{F} = 2\,500\ \vec{i} + 1\,500\ \vec{j} - 1\,000\ \vec{k}$'(N). Les poids sont négligés. Déterminer le torseur d'action $\{T_{0/1}\}$ supporté par la liaison pivot et le couple C_m transmis par la partie C de l'arbre.

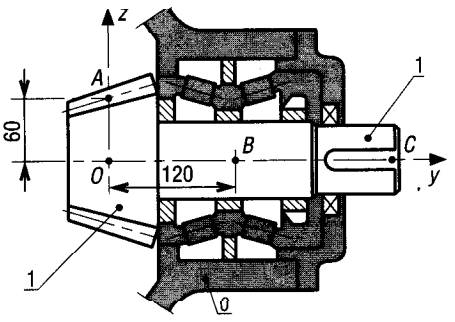


Fig. 36

Réponse

$X = -2\,500$ N ; $Y = -1\,500$; $Z = 1\,000$; $L = -30$ Nm ; $M = 0$; $N = -300$; $C_m = 150$.

❑ L'ensemble proposé représente schématiquement une pédale de commande. L'action du pied sur la pédale 1, en B, permet de relever la tige de commande 2. La pédale est articulée (liaison pivot de centre A) sur le bâti 0, de même la liaison entre 1 et 2 est une liaison pivot de centre C. $\vec{T}$ [10 daN, direction (C, Z)] schématise la tension de la tige et $\vec{F}$ (direction B, Z) l'action du pied. $L_{2/1}$ = pivot d'axe (C,x).

L'ensemble de la pédale étant en équilibre, déterminer $\vec{F}$ et le torseur d'action de la liaison pivot en A $(T_{0/1})$.

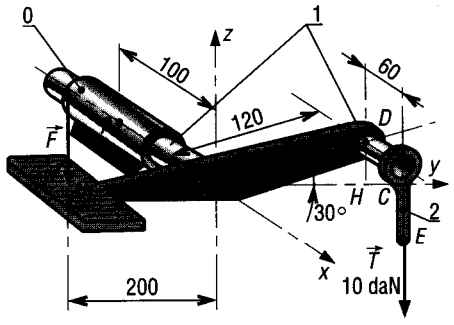


Fig. 37

Réponse

$\vec{F} = -5{,}2\ \vec{k}$ (daN) ; $X = Y = 0$;
$Z = 15{,}2$ daN ; $L = N = 0$;
$M = -21{,}2$ Nm.

❑ Un support proposé assure le maintien de trois câbles dont les tensions sont $\vec{F_A}$ [1 000 N, plan (0, Y, Z)], $\vec{F_B}$ [600 N, plan (0, X, Y)] et $\vec{F_C}$ (700 N). Le support 1 est fié dans le mur 0 (liaison encastrement de centre E). a) Écrire pour chaque tension le torseur correspondant. b) Isoler le support ; en déduire le torseur d'encastrement entre 0 et 1 en E.

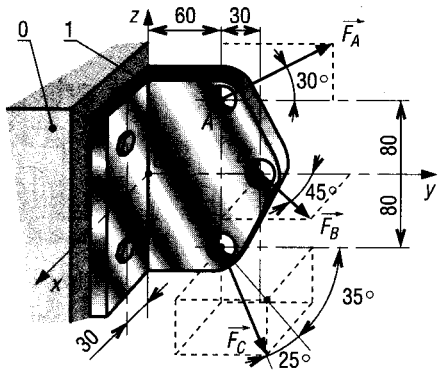


Fig. 38

Réponse

$X_{0/1}$ = − 788 N ; $Y_{0/1}$ = − 1 810 ; $Z_{0/1}$ = − 204 ; $L_{0/1}$ = 15,5 Nm ; $M_{0/1}$ = 23 ; $N_{0/1}$ = 25,2.

❑ Une potence articulée se compose d'un socle 0 solidaire d'une colonne 1 (liaison encastrement de centre 0), d'une flèche articulée 2 [pivot de centre A et d'axe (0, Z)], d'une contre-flèche articulée (3) [pivot de centre B et d'axe (C, Z)] et d'un palan 4 fié à l'extrémité D. $\vec{P}$ schématise le poids de la charge à manœuvrer. Al3 et CD se déplacent dans des plans horizontaux parallèles à (0, X, Y). AO, BC et DE sont verticales (parallèles à 0, Z). Écrire le torseur correspondant à la charge $\vec{P}$ en E, D, C, B, A et 0. Supposer a variable. Déterminer les torseurs d'action sur les liaisons pivots (en A entre 1 et 2, en B entre 2 et 3) et sur la liaison encastrement (en 0 entre 0 et 1). Les poids sont négligés.

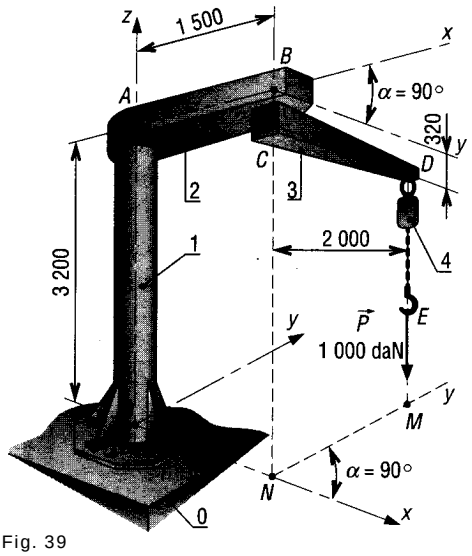


Fig. 39

22 Une unité de fraisage est intégrée dans une chaîne de fabrication automatisée. La force $\vec{F}$ et le couple $\vec{M}$ schématisent les efforts de coupe sur la fraise (3) en A. La liaison entre l'arbre porte-fraise 2 et le bâti (1) est une liaison pivot de centre 0 et d'axe (0, Y), la liaison entre (1) et la semelle fixe O, une glissière de centre B et d'axe (B, X). $\vec{T}$ schématise l'action du dispositif de mise en translation intégré à la semelle (vérin, vis.. .). Déterminer $\vec{T}$ et le torseur d'action sur la liaison glissière en B entre (0) et (1).

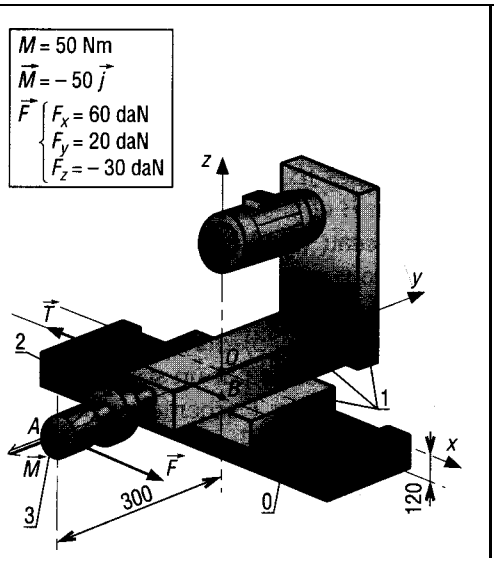


Fig. 40

Réponse

T = 60 daN ; X = 0 ; Y = − 20 daN ; Z = 30 ; L = − 66 Nm ; M = − 22 ; N = − 180.

❑ L'arbre de transmission propose est guidé en rotation par deux roulements à billes à contact radial en A et B. L'arbre reçoit en D le couple $\vec{C} = 100\ \vec{i}$ (Nm) et entraîne en E une roue dentée (non représentée) qui exerce l'effort $\vec{E}$ ($\vec{E} = 1\ 000\ \vec{i} - 500\ \vec{j} + E_z\ \vec{k}$).

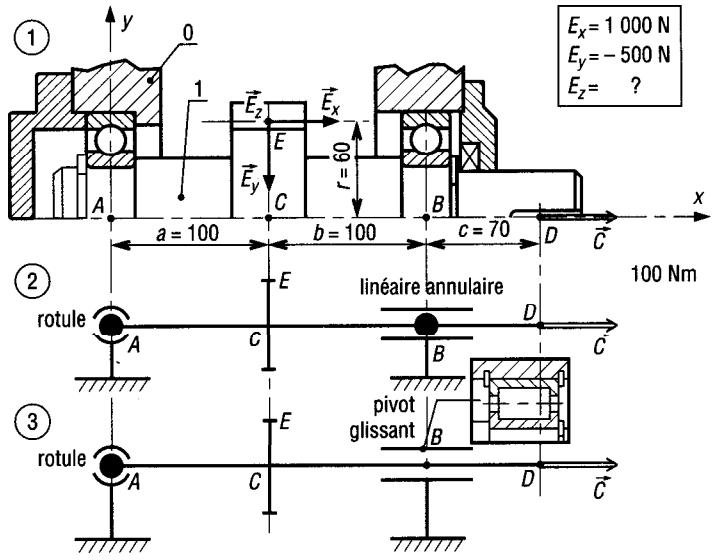


Fig. 41

a) En fonctionnement normal (charges et flexions d'arbre moyennes), la schématisation des liaisons se ramène au cas de la figure 2 : rotule en A et linéaire annulaire en B. Déterminer les torseurs d'actions sur les liaisons en A et B. Calculer E_z. b) Montrer que l'ensemble des deux liaisons en A et B se ramène à une liaison pivot d'axe (A, x).
c) Le roulement B est remplacé par un roulement à rouleaux cylindriques les charges et les flexions d'arbres sont supposées plus importantes et la schématisation se ramène au cas de la figure 3 : rotule en A et pivot glissant en *B*. Reorendre les questions a) et b).

❑ Un pont élévateur, de capacité 2 000 daN, est utilise pour des travaux de maintenance sur véhicules automobiles. Le pont se compose de deux colonnes (1) identiques, équipées chacune de deux paires de bras (3) et (4) articulés (pivots d'axes (B, *z*) et (C, *z*) en B et C sur un coulisseau (2). Le coulisseau, en liaison glissière d'axe (0, z) par rapport à la colonne, est manoeuvré (levage ou descente) par une tige filetée (5) entraînée par un motoréducteur (6). Le mouvement est transmis à la deuxième colonne par un système à roues et chaîne.

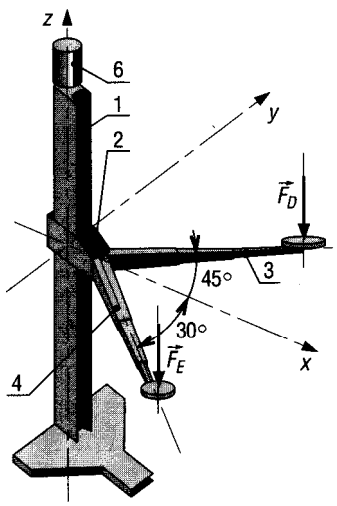


Fig. 42

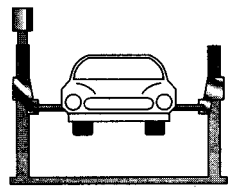


Fig. 43

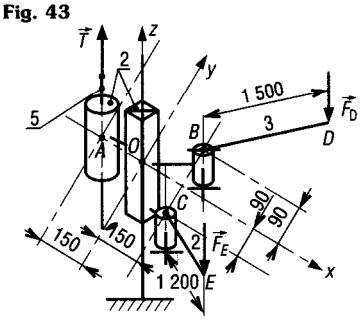


Fig. 44

Le glisseur $\vec{T}$ schématise la tension de la vis, ligne d'action (A, z), $\vec{F_D} = -500\ \vec{k}$ (daN) et $\vec{F_E} = -350\ \vec{k}$ sont les actions exercées par l'automobile. Les poids et les frottements sont négligés, l'ensemble est en équilibre.
Déterminer les torseurs d'actions $\{T_{1/2}\}_O$, $\{T_{2/4}\}_C$, $\{T_{2/3}\}_B$ et la valeur de $\vec{T}$.

Réponse

$T = 850$ daN ; $X_{1/2} = Y_{1/1} = Z_{1/2} = 0$; $L_{1/2} = 3\ 335$ Nm ; $M_{1/2} = -11490$; $X_{2/3} = Y_1 = 0$; $Z_{2/3} = 500$; $L_{2/3} = -M_{2/3} = 5\ 300$; $X_{2/4} = Y_{2/4} = 0$; $Z_{2/4} = 350$; $L_{2/4} = -2\ 100$; $M_{2/4} = -3\ 640$ Nm.

10 CINÉMATIQUE GÉNÉRALITÉS TRAJECTOIRES

OBJECTIFS

- Présenter la cinématique.
- Définir les notions de solide ou repère de référence, de mouvements absolu et relatif.
- Introduire les principaux mouvements de solides, la notion de points coïncidents et de trajectoire.
- Définir les principales grandeurs cinématiques : vecteur-position, vecteur-déplacement, vitesse et accélération d'un point.
- Fournir des éléments concernant le repérage des solides.

La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie le mouvement des corps, indépendamment des forces qui les produisent. Les grandeurs étudiées s'appellent mouvement, déplacement, trajectoire, vitesse et accélération. Le mot cinématique dérive du grec *kinema,* qui signifie mouvement.

La cinématique présente deux types d'applications. La première voie est orientée vers l'analyse des grandeurs cinématiques liées aux mécanismes et aux machines. Son but est de définir la géométrie' et les dimensions des pièces ou composants, tout en remarquant que la géométrie retenue a une influence sur les efforts engendrés. Exemples : engrenages, transmissions diverses, cames, etc. La deuxième voie est celle de la dynamique et de l'énergétique qui, pour déterminer les mouvements à partir des efforts qui les produisent, fait largement appel aux grandeurs de la cinématique.

Remarque : en cinématique, les solides étudiés sont supposés indéformables. Un solide peut être défini comme un ensemble de points dont les distances respectives restent inchangées au cours du temps.

I - Solide ou repère de référence - Référentiel

1. Repère et solide de référence

En cinématique, le mouvement d'un solide peut être défini par rapport à un autre solide choisi comme référence et appelé solide de référence.

Un repère de référence est un repère d'espace (exemples : repères cartésiens (0 ; x, *y)* ou (0 ; x, y, z)) lié ou "collé" au solide de référence, permettant de repérer avec précision la position et le mouvement du solide.

Exemple

Si l'on considère le mouvement de l'avion (1) par rapport au sol (0), noté $\mathcal{M}^{vt}_{1/0}$, le sol est le solide de référence. Un observateur, immobile au sol, voyant l'avion évoluer dans le ciel, peut servir d'origine à un repère de référence lié à (0). $\mathcal{M}^{vt}_{0/1}$ définit le mouvement inverse, l'avion est le solide de référence. Le pilote, immobile dans l'appareil, voit le sol défiler sous ses yeux et peut servir d'origine à un repère de référence lié à (1).

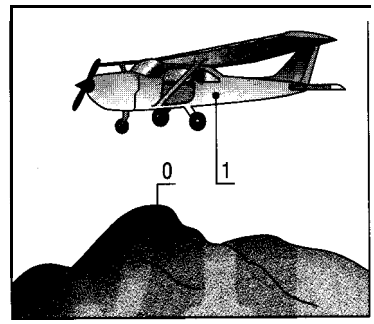


Fig. 1

2. Repère de temps

Schématisation du temps

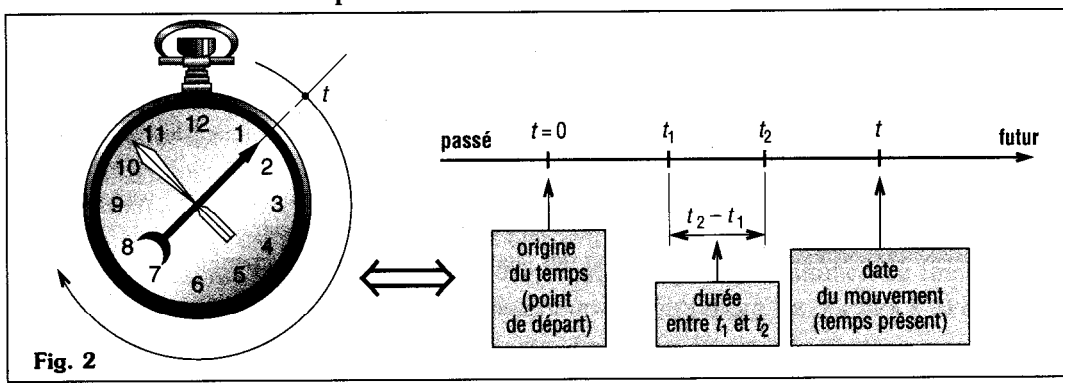


Fig. 2

En mécanique classique, le temps est' considéré comme absolu et uniforme. Chaque moment, chaque fragment de temps est identique au suivant.
Le temps peut être schématisé par une droite, orientée du passé vers l'avenir, avec au besoin une origine des temps (t = 0). L'image équivalente de cet espace est une montre ou un chronomètre. La lettre t, appelée date, symbolise un point de cet espace.

Unité : la seconde, symbole s, est l'unité de base légale (unité SI) du temps.
Les autres unités usuelles sont également utilisables : minute, heure, jour, année, etc.

Remarque : quelques notions concernant la relativité du temps sont proposées au chapitre « dynamique - mouvements plans ».

3. Système de référence ou référentiel

Un système de référence est l'addition ou la combinaison d'un repère de référence et d'un repère de temps.

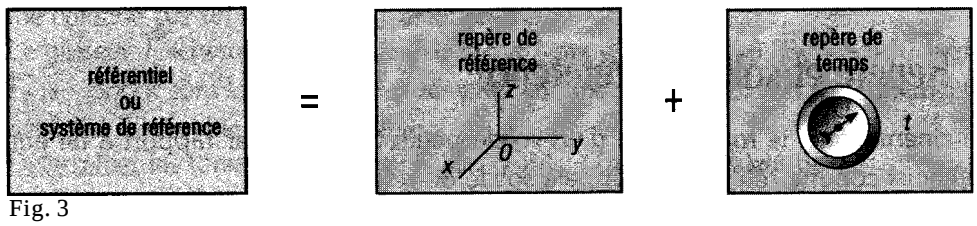


Fig. 3

Remarque : en cinématique, le mouvement des solides sera défini par rapport à un système de référence.

II - Mouvements absolu et relatif

1. Mouvement absolu

Le mouvement d'un solide est dit absolu s'il est défini ou décrit par rapport à un référentiel absolu.
Un référentiel absolu (ou galiléen) est un référentiel au repos absolu dans l'univers.

En mécanique industrielle, la Terre peut être assimilée, avec une très bonne approximation, à un référentiel absolu (voir le chapitre « dynamique - mouvements plans »).

Remarque : à la notion de mouvement absolu correspond les notions de vitesses absolues et d'accélérations absolues.

2. Mouvement relatif

Le mouvement d'un solide est dît relatif s'il est défini par rapport à un référentiel relatif.
Un référentiel en mouvement dans l'univers est un référentiel relatif.

À la notion de mouvement relatif correspond les notions de vitesses relatives et d'accélérations relatives.

Exemple : prenons le cas d'un voyageur (2), marchant dans un wagon (1) en mouvement par rapport au sol (0).

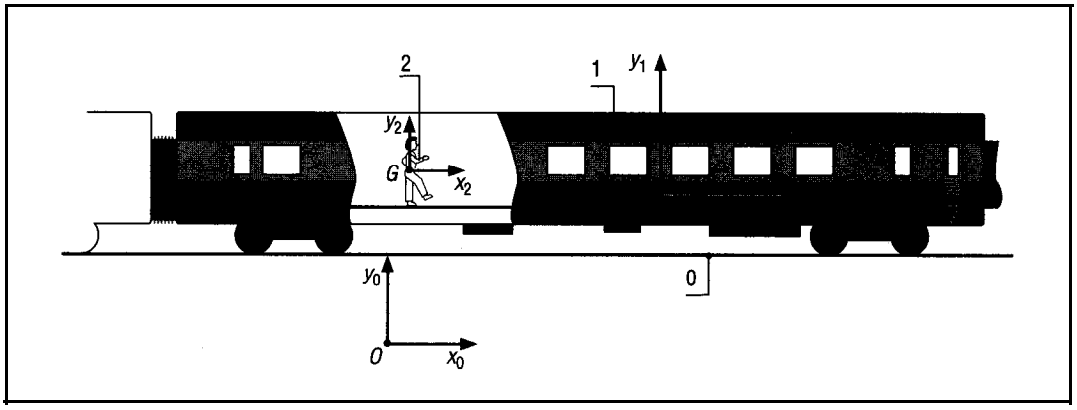


Fig. 4

R_0 = (0, x_0, y,), lié à la terre, est un repère absolu.
R_1 = (A, x_1, y_1), lié au wagon et R_2 (G, x_2, y_2) lié au voyageur sont des repères relatifs.
Les mouvements $M^{vt}_{2/0}$ et $M^{vt}_{1/0}$ sont des mouvements absolus.
$M^{vt}_{2/1}$ est un mouvement relatif ;. même chose pour son mouvement inverse $M^{vt}_{1/2}$.

Remarque : le mouvement $M^{vt}_{2/0}$ résulte de la combinaison des deux mouvements $M^{vt}_{2/1}$ et $M^{vt}_{1/0}$.

III • Principaux mouvements plans de solides

Un solide exécute un mouvement plan lorsque tous les points qui le constitue se déplacent dans des plans parallèles entre eux. Par commodité, le plan retenu pour définir le mouvement sera celui qui contient le centre de gravité G et le solide sera assimilé à une fine feuille ou à une fine lamelle. Cette schématisation permet de rassembler dans une même catégorie la plupart des mouvements de solides rencontrés en technologie : translations, rotations et mouvements plans généraux.

Résumé des principaux types de mouvements plans

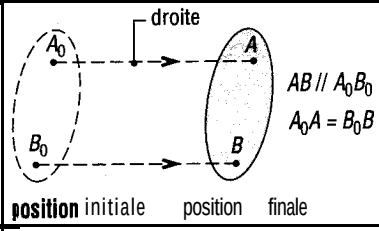
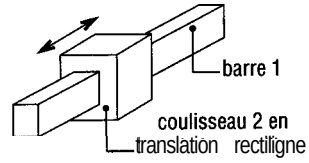
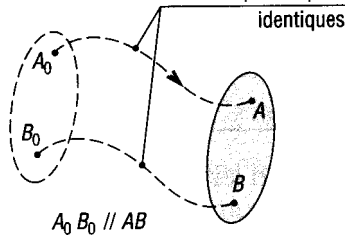
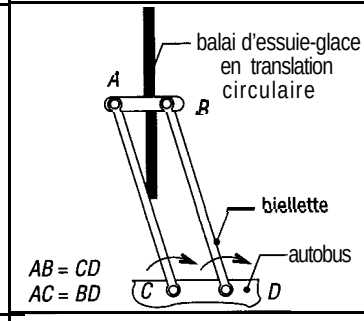
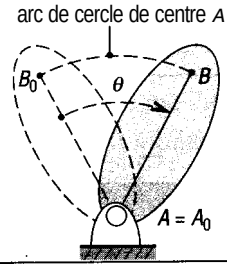
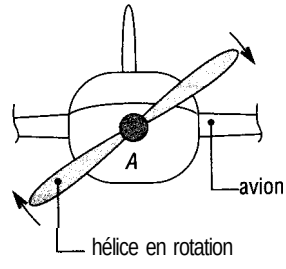
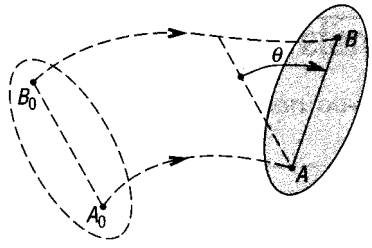
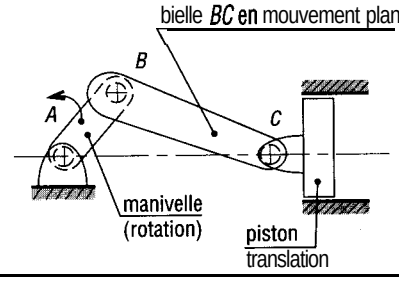
Mouvements	Propriétés	Exemple
Translation rectiligne		
Translation curviligne		
Rotation (d'axe fixe)		
Mouvement plan général		

Fig. 5

1. Translation

Un solide se déplace en translation si n'importe quelle ligne (AB) de celui-ci reste constamment parallèle à sa position initiale au cours du mouvement. À tout instant, il n'y a aucune rotation de AB.

Remarque : dans l'espace, deux lignes non parallèles seront nécessaires pour définir une translation.

Translation rectiligne : tous les points du solide se déplacent suivant des lignes parallèles entre elles.

Translation curviligne : les points du solide se déplacent suivant des courbes géométriques identiques ou superposables.

2. Rotation (autour d'un axe fixe)

Le solide tourne ou est animé d'un mouvement angulaire autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan du mouvement.

Les points du solide décrivent des cercles ou des circonférences centrés sur l'axe.

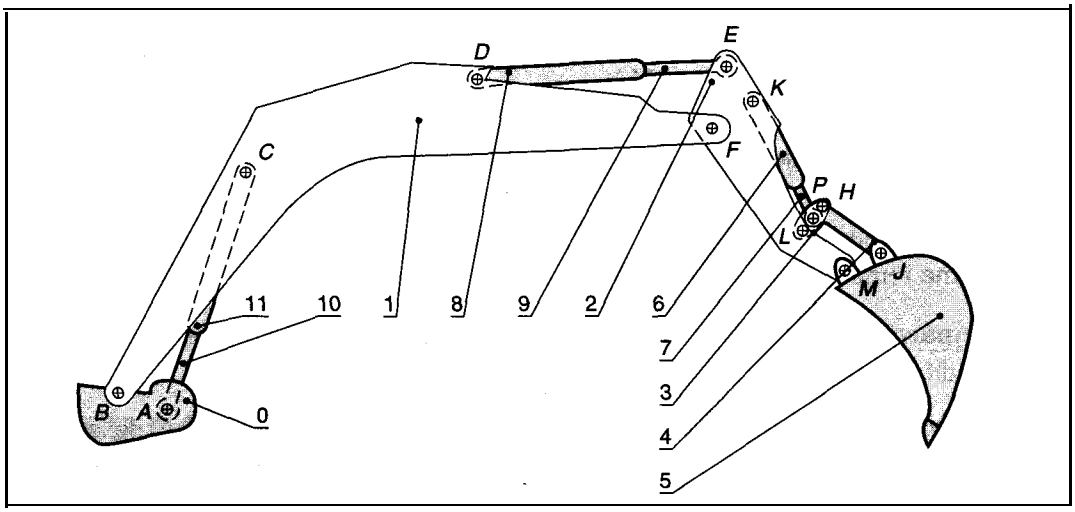
Toutes les lignes ou droites du solide tournent du même angle 19 à chaque instant considéré.

3. Mouvement plan général

Un mouvement plan général n'est ni une translation, ni une rotation. Tous les points du solide se déplacent dans des plans parallèles entre eux aux cours du mouvement.

Remarque : un mouvement plan peut être considéré comme la combinaison d'une translation et d'une rotation.

Exemple : flèche de pelle hydraulique. On suppose que les trois vérins hydrauliques (10 + 1 1), (8 + 9) et (6 + 7) sont alimentés.



ig. 6

$M^{vt}_{1/0}$ = rotation de centre B ; $M^{vt}_{2/1}$ = rotation de centre F ;
$M^{vt}_{5/2}$ = rotation de centre M ; $M^{vt}_{3/2}$ = rotation de centre L ;
$M^{vt}_{11/10}$ = translation rectiligne de direction AC ;
$M^{vt}_{9/8}$ = translation rectiligne de direction DE ;
$M^{vt}_{7/6}$ = translation rectiligne de direction KP.

Les mouvements suivants sont tous des mouvements plans généraux :
$M^{vt}_{2/0}$; $M^{vt}_{5/0}$; $M^{vt}_{5/1}$; $M^{vt}_{3/0}$; $M^{vt}_{11/0}$; $M^{vt}_{4/2}$; $M^{vt}_{4/1}$; $M^{vt}_{6/0}$; $M^{vt}_{6/1}$, etc.

IV - Points coïncidents et trajectoire

1. Notion de points coïncidents

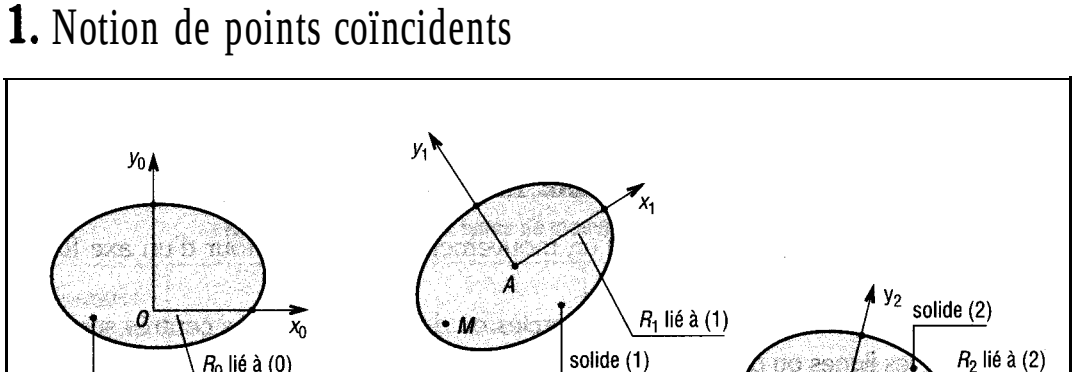


Fig. 7

Les solides (1) et (2) sont en mouvement entre eux et en mouvement par rapport au solide de référence (0). À un instant t quelconque, le point géométrique M peut être considéré comme lié, ou appartenant, à l'un quelconque des trois solides (0, 1 ou 2) et suivre le mouvement du solide auquel il est lié.

Trois cas possibles : M lié à 1 (M,), M lié à 2 (M_2) et M lié à 0 (M_0).

Les points M_1, M_2 et M_0 sont par définition des points coïncidents à l'instant t.

Remarque 1 : il n'est pas nécessaire que M soit un point matériel du solide auquel il est lié (c'est le cas de M_0 et M_2).

À partir de la notion de points coïncidents, il est plus facile de différencier les grandeurs cinématiques (trajectoires, vitesses, etc.) des points de chacun des solides.

Par exemple, pour le mouvement $M^{vt}_{1/0}$ au point M, on peut définir $T_{M1/0}$ (la trajectoire), $\overrightarrow{V_{M1/0}}$ (la vitesse) et $\overrightarrow{a_{M1/0}}$ (l'accélération) du point M_1 lié à 1 par rapport à 0 ou R,.

Même remarque pour les mouvements $M^{vt}_{2/0}$ et $M^{vt}_{2/1}$.

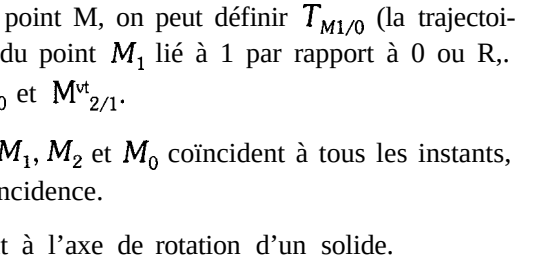
Remarque 2 : il peut arriver que les points M_1, M_2 et M_0 coïncident à tous les instants, on dit alors qu'ils sont constamment en coïncidence.

Exemple : ensemble des points appartenant à l'axe de rotation d'un solide.

2. Trajectoire d'un point

La trajectoire du point M est la courbe géométrique décrite au cours du temps par les positions successives de celui-ci dans le repère de référence R, .

Remarque : si M appartient à un solide (1), la trajectoire de M, notée $T_{M1/0}$, est définie par l'ensemble des points M_0 qui coïncident avec M_1 au cours du temps.



'ig. 8

Exemple : roue avant de bicyclette.

A est le point de contact entre la roue (1) et le sol (0). B est le centre de l'articulation (ou du moyeu) entre la roue (1) et le cadre (2). C est un point appartenant à une poignée de frein. Le vélo se déplace en translation rectiligne. Pour un tour de roue :

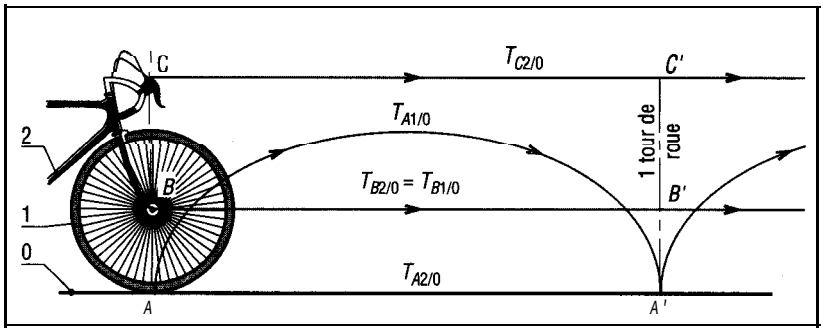


Fig. 9

. $T_{C2/0}$ = segment CC', $T_{B2/0}$ = segment BB', $T_{A2/0}$ = segment AA' ($T_{A2/0}$ c'est aussi la trace laissée par le pneu sur le sol).

. $T_{B1/2}$ est réduite au point B. B_1 et B_2 sont constamment en coïncidence. Il en résulte que $T_{B2/0}$ est identique à $T_{B1/0}$.

. $T_{A1/2}$ = cercle de centre B et de rayon AB.

. $T_{A1/0}$ est une courbe particulière appelée cycloïde (voir figure).

V • Vecteur-position et vecteur-déplacement

La notion de vecteur-position est également abordée dans le chapitre "Vecteurs".

1. Vecteur-position $\overrightarrow{OM}$

$R_0 = (0, x_0, y_0)$ est un repère de référence lié au solide de référence S,.

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ définit la position, à l'instant t, du point M dans son mouvement par rapport au repère de référence R_0.

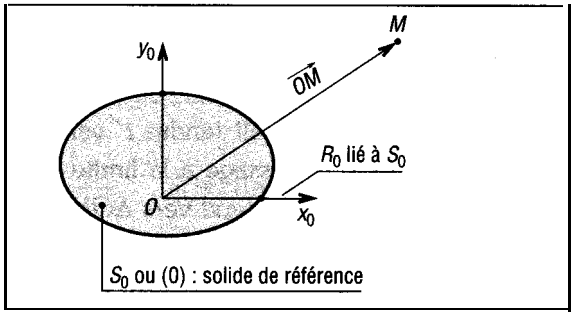


Fig. 10

2. Vecteurdéplacement $\overrightarrow{M_1M_2}$

Si M_1 est la position du point M à l'instant t_1 et M_2 la position de M à t_2, le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ définit le déplacement de M entre t_1 et t_2 pendant la durée $(t_2 - t_1)$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

Remarque

le vecteur-déplacement $\overrightarrow{M_1M_2}$ mesure la distance entre M_1 et M_2.

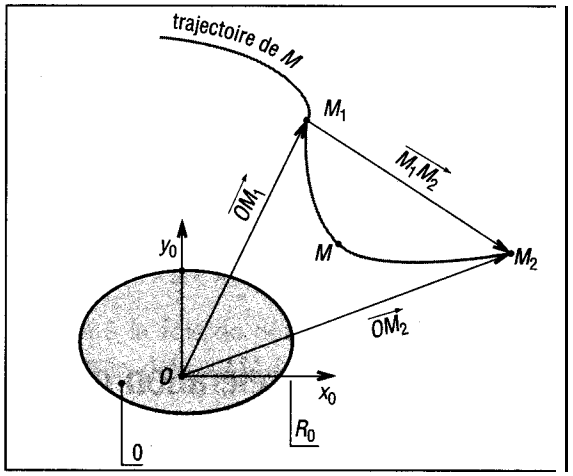


Fig. 11

Exemple : considérons un avion (1) en phase ascentionnelle suivant une trajectoire rectiligne, R_0 est un repère lié au sol.

$\overrightarrow{OM_1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ ou $\overrightarrow{OM_1} = 1\vec{j}$ (km)

$\overrightarrow{OM_2}\begin{bmatrix}11\\4\end{bmatrix}$ ou $\overrightarrow{OM_2} = 11\vec{i} + 4\vec{j}$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$
$$= \left(11\vec{i} + 4\vec{j}\right) - 1\vec{j}$$
$$= 11\vec{i} + 3\vec{j}$$

Distance entre M_1 et M_2:

$$\left\| \overrightarrow{M_1M_2} \right\| = \sqrt{11^2 + 3^2} = 11{,}4\,\text{km}.$$

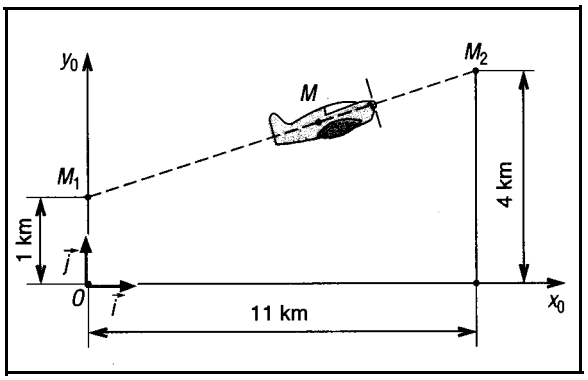


Fig. 12

VI • Vitesse et accélération

1. Vecteur vitesse V_M

Si $\overrightarrow{MM'}$ définit le déplacement du point M pendant la durée ($t' - t = \Delta t$), on peut définir la vitesse moyenne de M à M' par :

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{(t' - t)} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

Si maintenant on fait tendre t' vers t ou Δt vers 0 (« passage à la limite »), MM' = OM' − OM tend vers AOM et la vitesse moyenne tend vers la vitesse instantanée V_M.

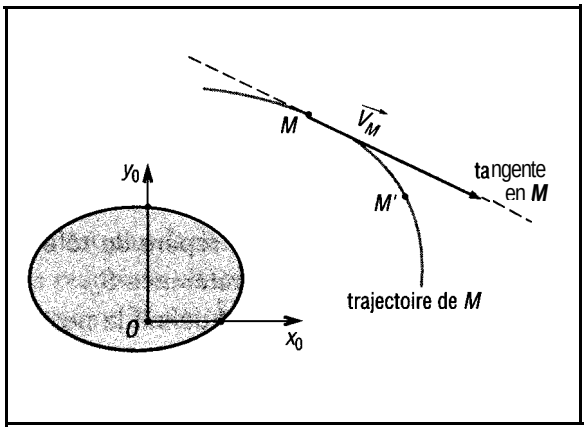


Fig. 13

$$\vec{V}_M = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\,t}\right)$$

La vitesse $\vec{V}_M$ du point M est égale à la dérivée par rapport au temps t du vecteur position OM.

Remarque : la vitesse $\vec{V}_M$ est toujours tangente en M à la trajectoire.

2. Vecteur-accélération $\vec{a}_M$

Même démarche que précédemment, l'accélération $\vec{a}_M$ s'obtient en dérivant par rapport au temps la vitesse $\vec{V}_M$.

$$\vec{a}_M = \left(\frac{d\vec{V}_M}{dt}\right) = \left(\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\right)$$

$$\vec{a}_M = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

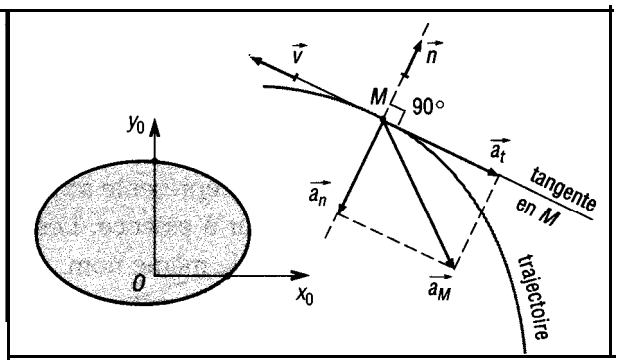
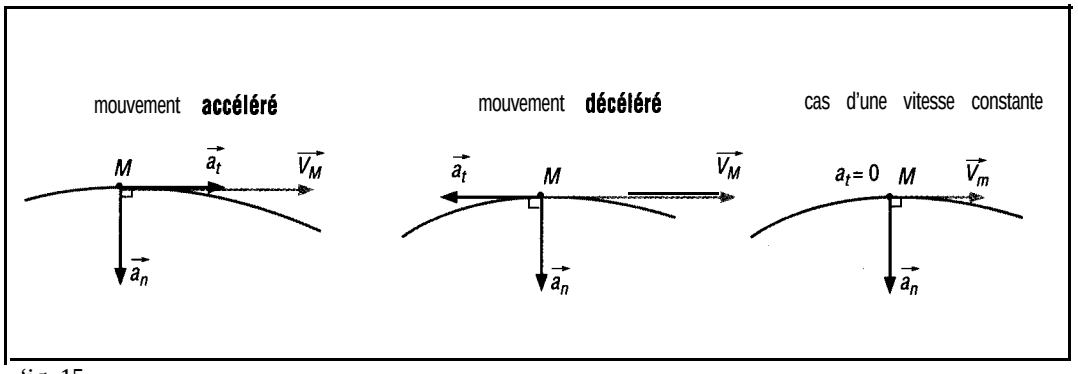


Fig. 14

$\vec{a}_t$: accélération tangentielle portée par la tangente en M.
$\vec{a}_n$: accélération normale perpendiculaire à $\vec{a}_t$ et toujours orientée vers la partie concave de la trajectoire.



'ig. 15

VII- Repérage des mouvements de solide

Le repérage d'un solide nécessite deux familles de paramètres :

a) des coordonnées pour définir la position d'un point origine appartenant au solide ($\overrightarrow{OA}$ par exemple) ;

b) des paramètres permettant de définir la position angulaire du solide par rapport au repère de référence (θ par exemple).

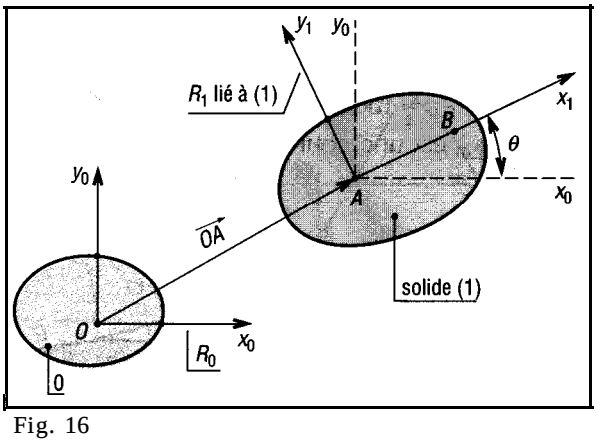


Fig. 16

Remarque : dans le plan, trois paramètres suffiront pour repérer n'importe quelle position de solide (X_A, Y,., et θ). Dans l'espace, six paramètres seront nécessaires. ,

La description du mouvement du solide impose à la fois de définir les caractéristiques cinématiques d'un point ($T_{A1/0}$, $\overrightarrow{V_{A1/0}}$ et $\overrightarrow{a_{A1/0}}$) et la définition des grandeurs angulaires (θ, ω et a).

Plusieurs types de coordonnées (cartésiennes, polaires, etc.) sont utilisables pour repérer la position du point (A) (voir formulaires).

EXERCICE RÉSOLU

1 L'ensemble proposé représente schématiquement le système bielle (2), manivelle (1) et piston (3) d'un moteur à essence. Les liaisons en A, B et C sont des liaisons pivots dont les centres portent le même nom.

a) Déterminer la nature des mouvements suivants : $M^{vt}_{1/0}$; $M^{vt}_{3/0}$; $M^{vt}_{2/0}$.

b) En déduire la nature des trajectoires : $T_{B1/0}$; $T_{B2/0}$; $T_{C2/0}$ et $T_{C3/0}$.

c) Tracer point par point la trajectoire du centre de gravité G de la bielle $(T_{G2/0})$.

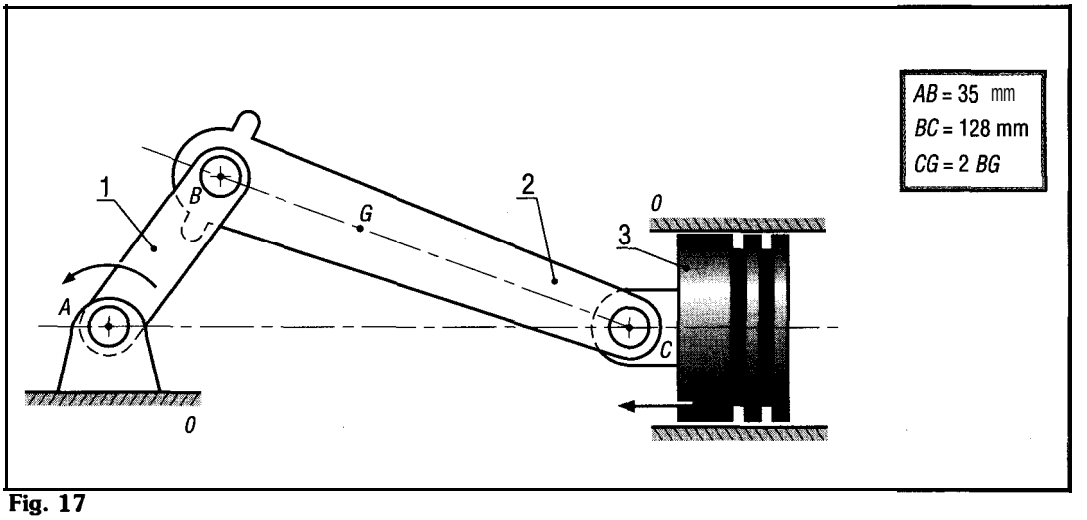


Fig. 17

Résolution

• $M^{vt}_{1/0}$ = rotation de centre A et $T_{B1/0}$ = $T_{B2/0}$ = cercle de centre A et de rayon $AB = 35$ mm

. $M^{vt}_{3/0}$ = translation rectiligne de direction AC, $T_{C3/0}$ = $T_{C2/0}$ = segment C_0C_{12} de 70 mm de longueur, B_1 et B_2, C_2 et C_3 sont des points constamment en coïncidence.

• $M^{vt}_{2/0}$ = mouvement plan général.

$T_{G2/0}$ est une courbe symétrique, obtenue graphiquement point par point.

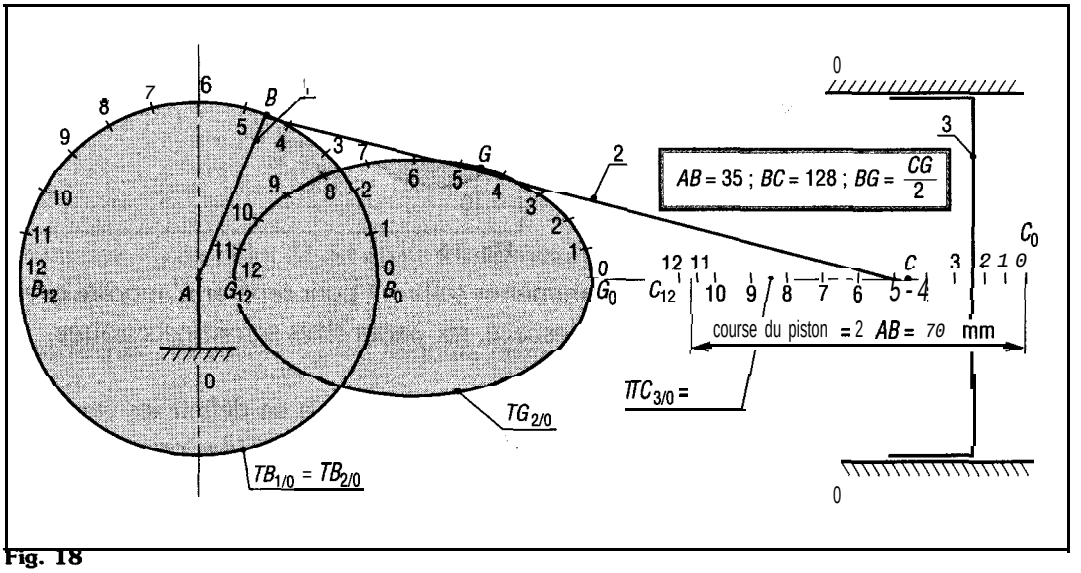


Fig. 18

EXERCICES À RÉSOUDRE

❑ Le dispositif propose schématiquement est un mécanisme d'entraînement à griffe de caméra. La manivelle (1) d'axe O_1, entraîne en A la griffe (3). La biellette (2) d'axe 0, assure en B le maintien de (3). La griffe tire le film en C et le fait avancer d'une image à la cadence de 24 images par seconde.

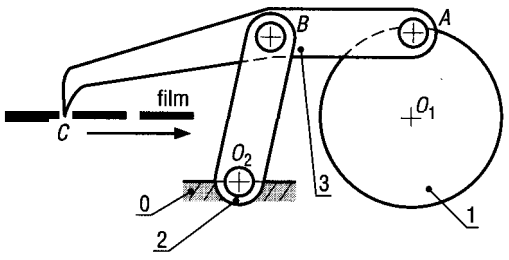


Fig. 19

a) Déterminer la nature des mouvements : $M^{vt}_{1/0}$; $M^{vt}_{2/0}$; $M^{vt}_{3/0}$; $M^{vt}_{3/2}$.

b) Déterminer la nature des trajectoires : $T_{A1/0}$; $T_{A3/0}$; $T_{B2/0}$ et $T_{B3/0}$.

c) Déterminer point par point, graphiquement ou par logiciel, la trajectoire du point C de la griffe $T_{C3/0}$.

- Sur quel tronçon et pendant combien de temps le film reste-t-il immobile ?
- Quel est le sens de rotation de la manivelle (1) si le film avance de la gauche vers la droite ?

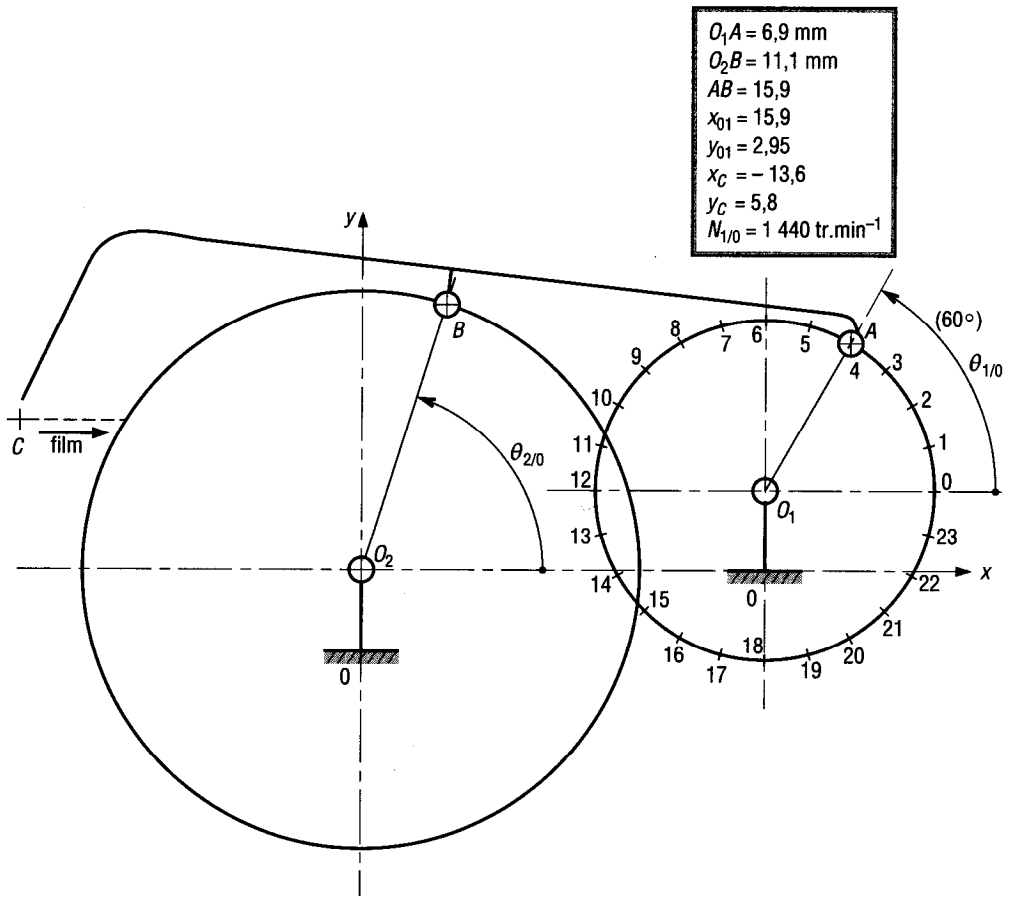


Fig. 20

3 Le mécanisme proposé est une suspension de locomotive basée sur le mécanisme à quatre barres de watt. L'essieu moteur est en liaison pivot (axe C) sur deux boîtiers à roulement (6). Chaque boîtier est relié au bâti par deux biellettes (3) et (4) articulés (pivots) en A, B, D et E. La suspension est obtenue par des ressorts (8).

a) Déterminer la nature des mouvements : $M^{vt}_{4/5}$; $M^{vt}_{3/5}$; $M^{vt}_{6/5}$ (5 = chassis).

b) Déterminer la nature des trajectoires : $T_{B4/5}$ et $T_{D3/5}$.

c) Déterminer point par point, graphiquement ou par logiciel, la trajectoire du point C si B varie entre B_1 et B_{13}. Commenter les formes et les particularités de la trajectoire obtenue. Quel est l'intérêt du dispositif ?

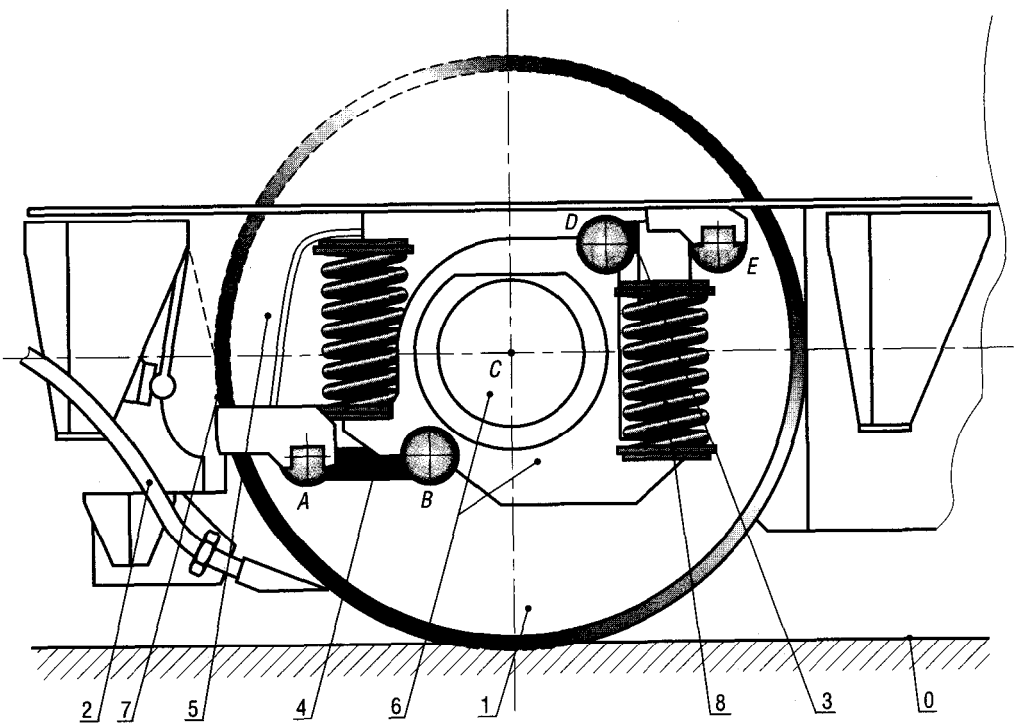


Fig. 21

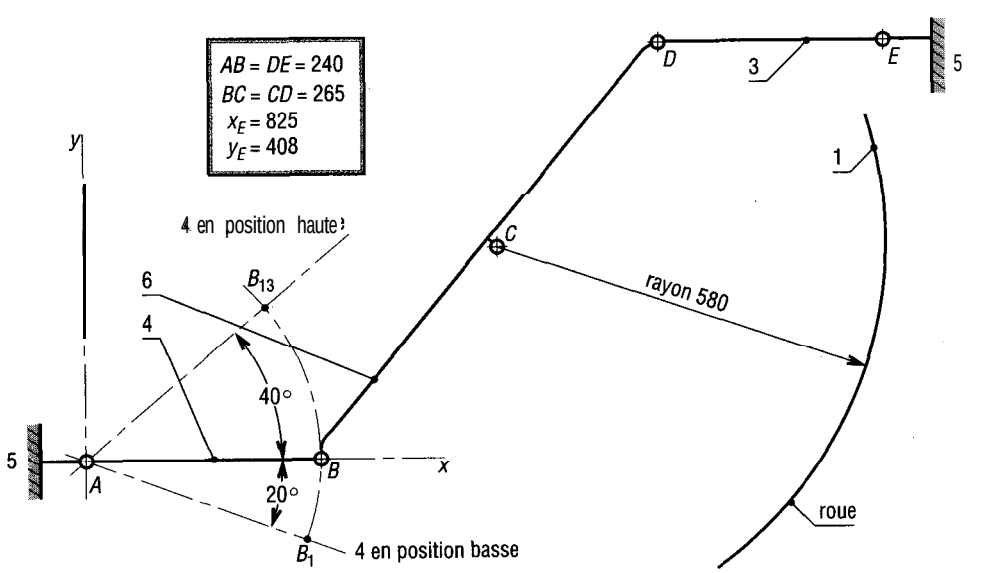


Fig. 22

4 La potence d'équilibrage proposée est utilisée pour diminuer le roulis sur les bateaux. Les potences sont placées perpendiculairement au plan de symétrie du bateau, la charge (7) face à la mer. Si l'on écarte les charges (7), le moment d'inertie du navire par rapport à l'axe de rotation du roulis augmente, diminuant ainsi la vitesse de rotation ou roulis.

La potence se compose d'un vérin d'équilibrage à ressort (5 + 6), libre de translater horizontalement dans la rainure R, et d'un ensemble de barre articulées entre elles en pantographe avec un contrepoids (8). Les liaisons en A, B, C, D, E, F, I, J, K et L sont des liaisons pivots de centre de même nom.

a) Quelle est la nature des mouvements : $M^{vt}_{1/0}$; $M^{vt}_{10/0}$; $M^{vt}_{2/10}$; $M^{vt}_{7/0}$; $M^{vt}_{6/0}$; $M^{vt}_{3/0}$?

b) Montrer que les points A, C et F restent alignés et que AF/AC est constant.

c) Déterminer l'effort $\vec{F}$ exercé par le vérin en fonction de la valeur de P.

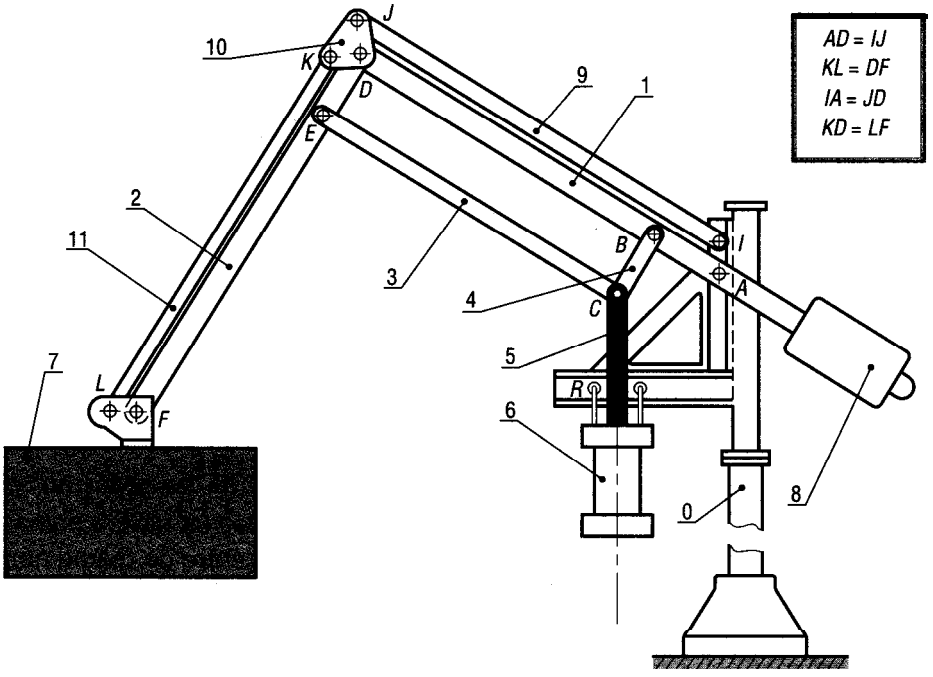


Fig. 23

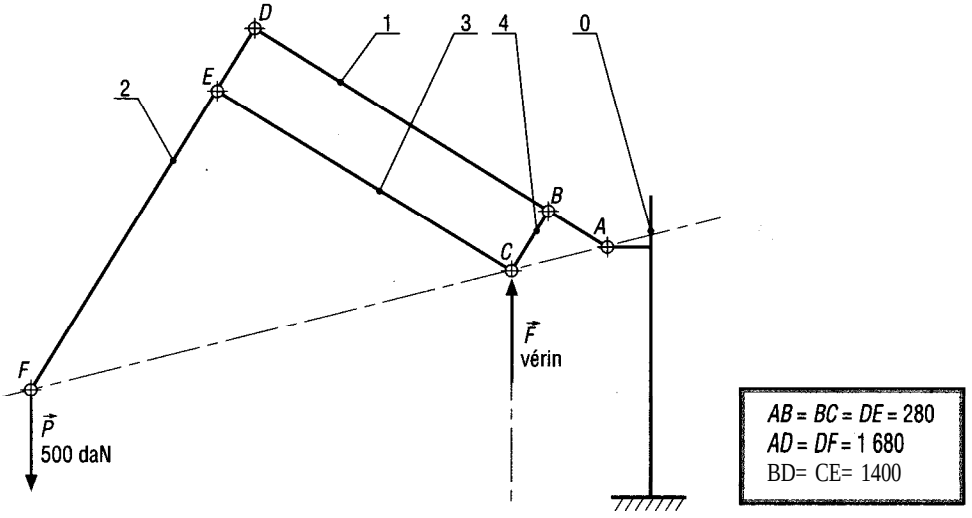


Fig. 24

❑ La plupart des grues portuaires poursuivent le même but : limiter et éviter le levage des charges. L'objectif, une fois la charge sortie de la cale du navire, est de translater celle-ci, horizontalement, sans levage jusqu'aux quais, ce qui diminue les dépenses énergétiques. L'étude porte sur le modèle le plus répandu, les grues dites à fléchette. La grue proposée (capacité 50 tonnes) se compose d'une tourelle (0) pivotant sur le bâti (7) mobile en translation sur des rails.

Le mécanisme de la grue se compose d'une flèche (1) articulée en E sur la tourelle et en B sur la fléchette (2). La biellette (3) articulée en D et A sur (0) et (2) assure le maintien. La manœuvre de la flèche est assurée par un vérin hydraulique (5 + 6). Un contrepoids (10) assure l'équilibrage de l'ensemble en compensant le poids de la flèche. La charge (8) de centre de gravité G peut monter ou descendre grâce au câble (4) manoeuvré en F par un treuil situé dans la tourelle. Le câble coulisse librement grâce aux poulies placées en B et C. Les liaisons en A, B, C, D, E et F sont des liaisons pivots de centre de même nom.

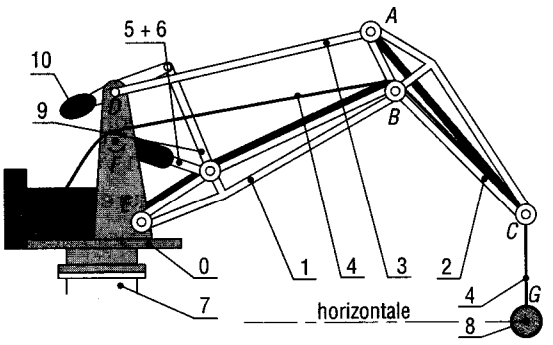


Fig. 25

longueur (L) du câble 4 : L = FB + BC + CG
L et BC sont constantes

AD = 18 000 mm
BC = 12 150 mm
AB = 4 500 mm
BE = 19 350 mm

rep	FB	CG	$\theta_{1/0}$
1			9°
2			14°
3			19°
4			24°
5			29°
6			34°
7			39°
8			44°
9			49°
10			54°

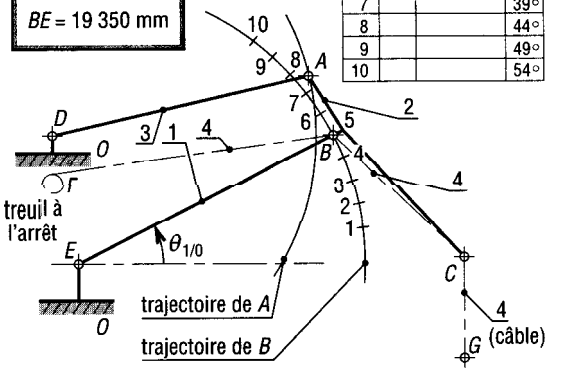


Fig. 26

a) Ouelle est la nature des mouvements : $M^{vt}_{1/0}$; $M^{vt}_{3/0}$; $M^{vt}_{2/0}$? En déduire la nature des trajectoires $T_{A3/0}$; $T_{B1/0}$; $T_{A2/0}$ et $T_{B2/0}$.

b) Déterminer point par point, graphiquement ou par logiciel, la trajectoire du point C appartenant à la fléchette (2) $T_{C2/0}$.

c) Si le treuil est à l'arrêt, la longueur de câble FB + BC + CG restant constante, déterminer la trajectoire $T_{G8/0}$ du centre de gravité G de la charge. On négligera le diamètre des poulies.

Réponse

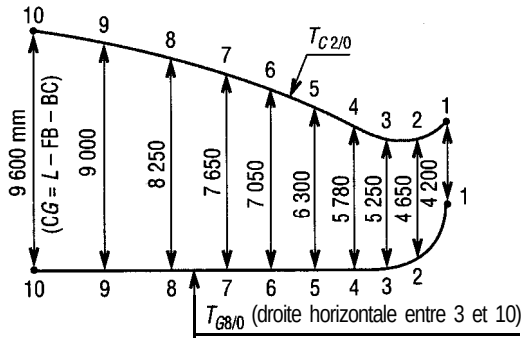


Fig. 27

$M^{vt}_{1/0}$: rotation de centre E.
$M^{vt}_{3/0}$: rotation de centre D.
$M^{vt}_{2/0}$: mouvement plan général.
$T_{A3/0} = T_{A2/0}$ = arc de cercle de centre D.
$T_{B1/0} = T_{B2/0}$ = arc de cercle de centre E.

11 MOUVEMENTS DE TRANSLATION

OBJECTIFS

- Indiquer les propriétés correspondant aux mouvements de solides.
- Définir les vitesses et les accélérations dans le cas des translations rectilignes. En donner les représentations graphiques.
- Développer les principaux cas particuliers : mouvement rectiligne uniforme, mouvement rectiligne uniformément accéléré, etc.

1 • Translation des solides

Lorsqu'un solide est en translation, chaque ligne de celui-ci se déplace parallèlement à sa position initiale au cours du temps.

Remarque : en cinématique plane, il suffit de montrer qu'une seule droite vérifie la propriété pour qu'il y ait translation. Dans l'espace, deux droites non parallèles seront nécessaires.

1, Propriétés

- Tous les points du solide en translation ont des trajectoires identiques (courbes géométriques superposables) : $\mathcal{T} = \mathcal{T}_A = \mathcal{T}_B = \ldots$
- Tous les points du solide ont même vitesse $\vec{v}$: $3 = \overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_B} = \ldots$
- Tous les points du solide ont même accélération $\vec{a}$: $\vec{a} = \overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_B} = \ldots$
- Le mouvement de translation d'un solide est complètement défini par le mouvement de l'un quelconque de ses points.

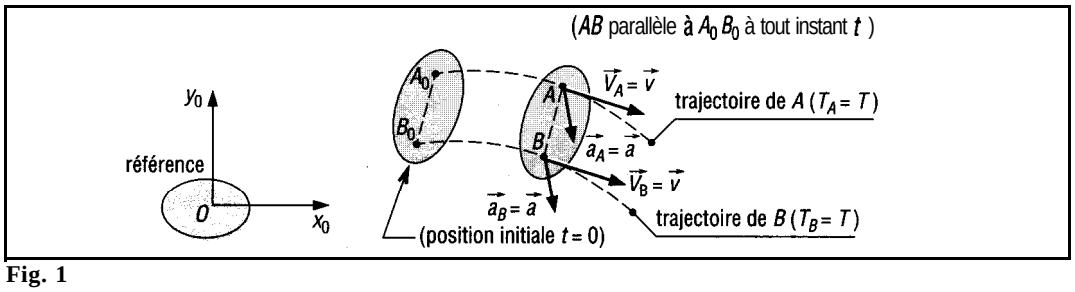


Fig. 1

2. Différents cas

Schématiquement, on distingue deux grandes familles de translations :

a) Translations rectilignes

Les trajectoires (T) des points sont des droites ou des segments parallèles.

b) Translations curvilignes

Les trajectoires des points sont des courbes géométriques quelconques identiques du plan ou de l'espace.

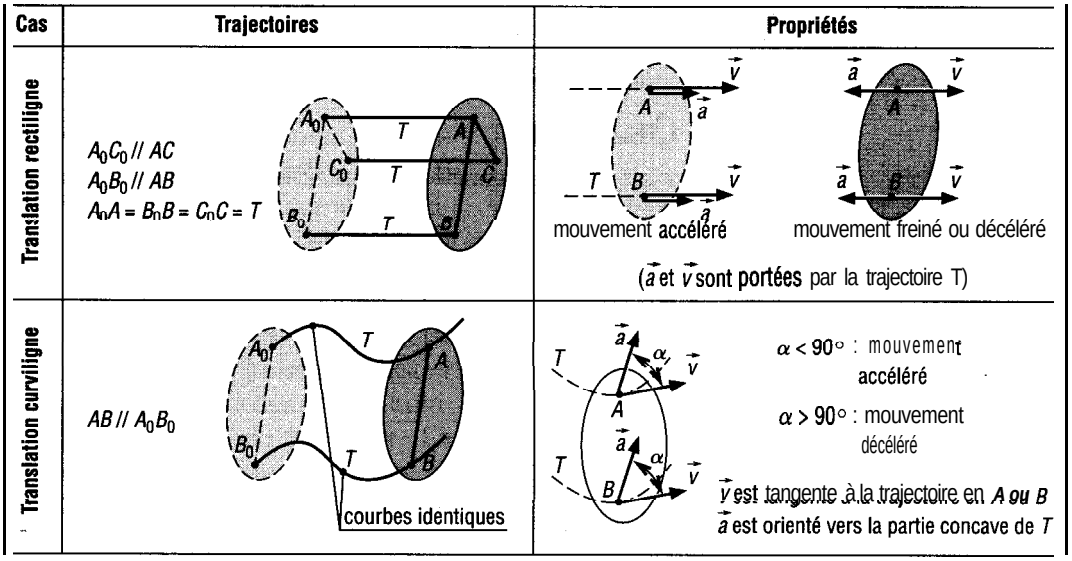


Fig. 2

Exemple : translation circulaire pour laquelle les trajectoires T sont des cercles ou des arcs identiques de même rayon.

Remarque : une translation circulaire ne doit pas être confondue avec une rotation.

Le solide (1) proposé, suspendu en A et B par deux barres AD et BC, est en translation circulaire par rapport au bâti fixe (0).

$ABCD$ est un parallélogramme.

- Toutes les trajectoires sont des arcs de cercle de rayon $R = AD = BC = \ldots$
- La vitesse $\vec{v}$ est tangente aux trajectoires. En A et B, $\vec{v}$ est aussi perpendiculaire à AD et BC.
- L'accélération $\vec{a}$ est orientée vers l'intérieur des cercles.

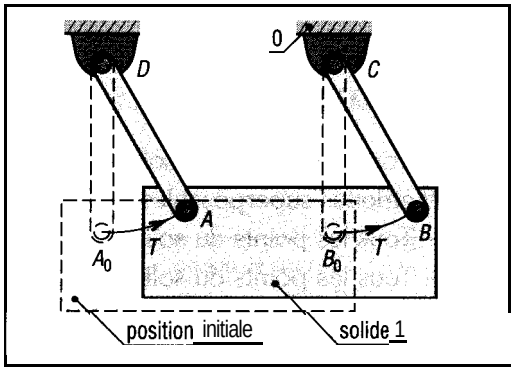


Fig. 3

II • Cas des translations rectilignes

Les propriétés et les résultats de ce paragraphe sont applicables à un solide en translation rectiligne, mais aussi à un point matériel se déplaçant sur une ligne droite.

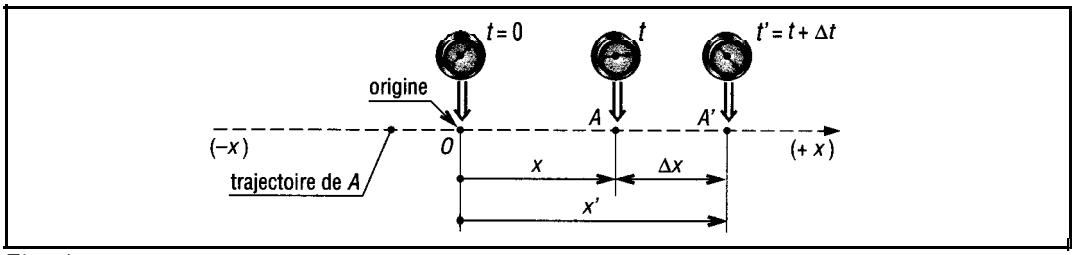


Fig. 4

La position du solide ou du point matériel (A), à l'instant t, est définie par la distance (ou abscisse) x, mesurée à partir du point 0 pris comme référence ou origine.
À l'instant suivant t' ($t' = t +$ At), A s'est déplacé et occupe la position A' à x' de 0.
Le déplacement de A à A' est ($\Delta x = x' -$ x) et a été effectué pendant la durée
At = $t' -$ t.

1. Vitesses en A

a) Vitesse moyenne (v_{moy})

La vitesse moyenne de A entre les instants t et t' est égale à la distance parcourue divisée par le temps mis pour parcourir cette distance.

$$v_{moy} = \frac{x' - x}{t' - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{unités : } m.s^{-1} \text{ ou } m/s$$

Exemple : sur un tronçon d'autoroute parfaitement rectiligne, un véhicule monospace parcourt 5 km en 3 minutes 20 secondes. Déterminons la vitesse moyenne :

$$v_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5\,000}{(3 \times 60 + 20)} = 25 \text{ m.s}^{-1}$$

ou v_{moy} = 25 x 3,6 = 90 km.h^{-1}

Remarque : la vitesse moyenne ne décrit pas les fluctuations du véhicule (ralentissement, accélération, arrêts). Ce sera le rôle de la vitesse instantanée.

b) Vitesse instantanée v

Dans la formule précédente, plus At est petit, plus la vitesse moyenne se rapproche de la vitesse instantanée. Celle-ci s'obtient par passage à la limite (At tendant vers 0, ou t' tend vers t) et v est égale à la dérivée de x par rapport au temps t.

$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$ donne : $\quad v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ unités : m.s^{-1} ou m/s

2. Accélérations en A

Les accélérations traduisent les variations de la vitesse (ralentissement, accélération, etc.). L'accélération moyenne a_{moy} entre les instants t et t' est égale à la variation de la vitesse (Au = $v' -$ v) divisée par At. Si on fait tendre At vers 0, l'accélération moyenne tend vers l'accéleration instantanée a (dérivée de v par rapport au temps t).

$$a_{moy} = \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

et

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

unités : $m.s^{-2}$

Remarque : si a est positif, le mouvement est accéléré et la vitesse v augmente progressivement. Si a est négatif, le mouvement est décéléré, freiné ou ralenti et v diminue progressivement.

3. Représentations et interprétations graphiques diverses

De nombreux graphes sont possibles pour représenter, comparer et interpréter x, v et a.

Remarque

Si on élimine dt des relations $v = \frac{dx}{dt}$ et $a = \frac{dv}{dt}$, on obtient : $v \cdot dv = a \cdot dx$

$v\,dv = d\left(\frac{v^2}{2}\right)$ est la dérivée de l'énergie cinétique $\left(E_C = \frac{1}{2} mv^2\right)$ en prenant la masse $m = 1$ kg.

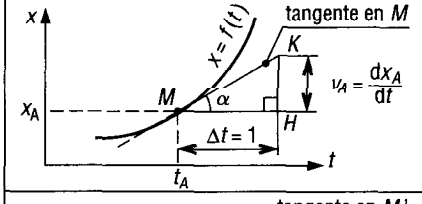
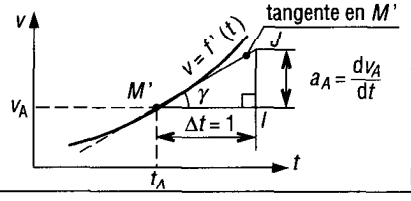
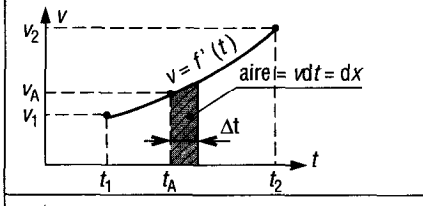
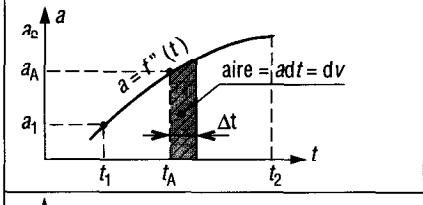
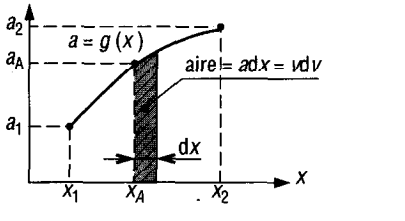
	Graphes	Observations
Dérivation graphique		**GRAPHE $x = f(t)$** v_A peut être déterminée par mesure de la pente de la tangente en **M.** $v_A = \tan\alpha = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = \frac{\overline{HK}}{\Delta t} = \frac{\overline{HK}}{1} = \overline{HK}$
		GRAPHE $v = f'(t)$ a_A peut être déterminée par mesure de la pente de la tangente en M'. $a_A = \tan\gamma = \frac{\Delta v_A}{\Delta t} = \frac{\overline{IJ}}{\Delta t} = \frac{\overline{IJ}}{1} = \overline{IJ}$
Intégration graphique		**GRAPHE $v = f'(t)$** Aire hachurée = $vdt = dx = \Delta x_A$ $\int_{x_1}^{x} dx = x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$ $(x_2 - x_1) =$ [aire sous toute la courbe entre t_1 et t_2]
		**GRAPHE $a = f''(t)$** Aire hachurée = $adf = d\,V$ $\int_{v_1}^{v_2} dv = v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt$ $(v_2 - v_1) =$ [aire sous toute la courbe entre t_1 et t_2]
		**GRAPHE $a = g(x)$** Aire hachurée : $adx = vdv$ $vdv = d\left(\frac{v^2}{2}\right)$; $E_C = \frac{1}{2} mv^2$ $\frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) =$ [variation énergie cinétique entre t_1 et t_2 pour $m = 1$] $\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \int_{x_1}^{x} dx =$ [aire sous toute la courbe entre x_1 et x_2]

Fig. 5

4. Mouvements rectilignes particuliers

a) Mouvement rectiligne uniforme

C'est le mouvement le plus simple, sans accélération (a = 0) et avec une vitesse constante au cours du temps.

Équations de mouvement

$$a = 0$$
$$v = v_0 = \text{constante}$$
$$x = v_0 t + x_0$$

$\left\{ \begin{array}{l} x_0 : \text{déplacement initial à } t = 0 \\ v_0 : \text{vitesse initiale et vitesse du mouvement} \\ x : \text{déplacement à l'instant } t \end{array} \right.$

Allure typique des graphes

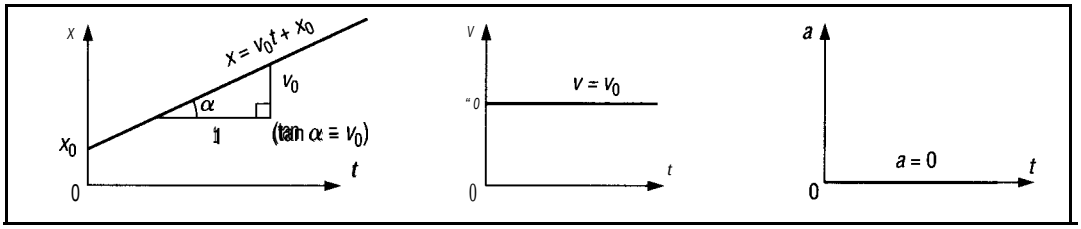


Fig. 6

b) Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Il sert de modèle à de nombreuses études simplifiées. Pour ces mouvements, accélérés (a > 0) ou décélérés (a < 0), l'accélération a reste constante au cours du temps.

Équations de mouvement

$$a = a_0 = \text{constante}$$
$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0 t + a\frac{t^2}{2}$$

conditions initiales du mouvement :
à $t = 0$; $x = x_0$; $v = v_0$ et $a = a_0$

Formule utile : $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

Remarque : la formule s'obtient en éliminant le temps t entre les relations donnant v et x.

Allure typique des graphes

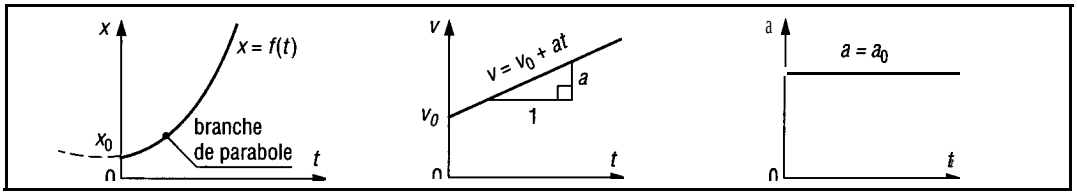


Fig. **7**

c) Mouvement ayant une accélération fonction du temps *t*

$$a = g(t) \quad v = v_0 + \int_0^t g(t)\,.\,dt \quad x = x_0 + \int_0^t v\,.\,dt$$

d) Mouvement avant une accélération fonction de la vitesse *v*

$$a = h(v) \quad t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{h(v)} \quad x = x_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{h(v)}$$

e) Mouvement ayant une accélération fonction du déplacement x

$$a = w(x) \quad v^2 = v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} w(x)\,.\,dx \quad t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{z(x)} \quad \text{avec } v = z(x)$$

EXERCICES RÉSOLUS

❑ Le chariot d'une machine pour découpage laser atteint la vitesse de 10 $cm.s^{-1}$ en 2 secondes. Le chariot évolue à vitesse constante pendant 8 secondes puis s'arrête en l'espace de 12,5 cm. Les accélérations et décélérations sont supposées constantes. Déterminer les équations de mouvement pour chacune des trois phases.

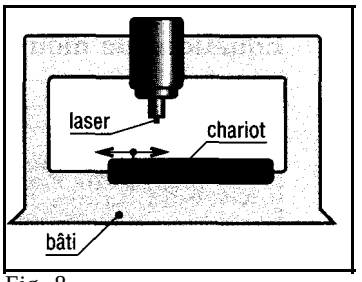


Fig. 8

Résolution

Phase 1 : accélération a, ;
conditions initiales : x,(l) = 0 et v_0(1) = 0

Forme générale : $v_1 = a_1 t$ e t $x_1 = \frac{a_1 t^2}{2}$

pour $t = 2$: $v_1 = 10$ $cm.s^{-1} = a_1$ x 2 ⇒ a, = 5

a, = 5 $cm.s^{-2}$	$v_1 = 5\,t$	$x_1 = 2{,}5\,t^2$

Remarque : pour $t = 2$; $x_1 = 2{,}5$ x $2^2 = 10$ cm.

Phase 2 : translation uniforme à la vitesse
$v_2 = 10$ $cm.s^{-1}$; $x_2 = 10\,t + x_2(0)$
à $t = 2$; $x_2 = 10 = 10$ x 2 + x,(O) ⇒ $x_2(0) = -10$

$a_2 = 0$	$v_2 = 10$ $cm.s^{-1}$	$x_2 = 10\,t - 10$

Remarque : pour $t = 2 + 8 = 10$;
$x_2 = 10$ x 10 - 10 = 90 cm

Phase 3 : mouvement décéléré, la vitesse passe de 10 $cm.s^{-1}$ à 0 sur 12,5 cm.

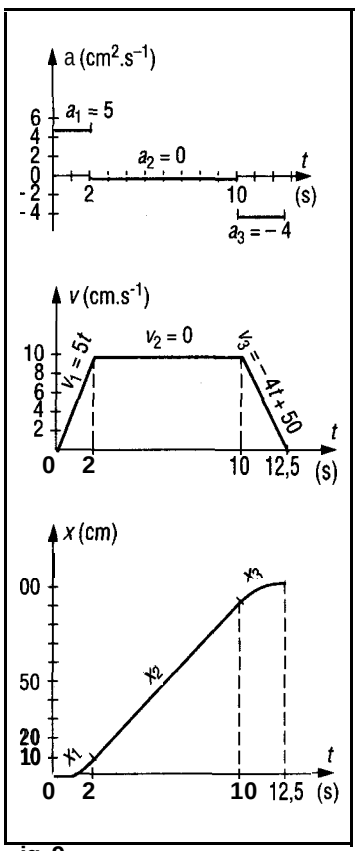
$v_{3f}^2 = v_0^2 + 2a_3 (x_3 - x_0)$
$0 = 10^2 + 2a_3 (12{,}5)$
et $[a_3 = -4$ $cm.s^{-2}]$

$v_0 = 10$
$v_{3f} = 0$
$x_3 - x_0 = 12{,}5$

$v_3 = a_3 t + u,(3) = -4\,t + v_0(3)$
Pour $t = 10$; $v = 10 = -4$ x 10 + $v_0(3)$ et $v_0(3) = 50$
$x_3 = -2t^2 + 50\,t + x,(3)$
Pour $t = 10$; x = 90 = - 2 x 10^2 + 50 x 10 + $x_0(3)$
x,(3) = - 210

$a_3 = -4$ $cm.s^{-2}$	$v_3 = -4t + 50$	$x_3 = -2t^2 + 50t - 210$

$t = 12{,}5$ s lorsque $v = 0$.



ig. 9

❑ Le déplacement (en m) d'un point matériel est donné par x = t^3 - 12 t + 3. Déterminer le temps nécessaire pour atteindre la vitesse de 36 $m.s^{-1}$. Que vaut l'accélération lorsque v = 15 $m.s^{-1}$ et le déplacement entre t = 1 et t = 4 s ?

Résolution

et $v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12$

$a = \frac{dv}{dt} = 6t$

- $v = 36 = 3t^2 - 12$ d'où : $t = \sqrt{\frac{36+12}{3}} = 4$ s.
- $v = 15 = 3t^2 - 12$ d'où : $t = 3$s, et $a = 6t = 6 \times 3 = 18$ m.s^{-2}.

$x_4 - x_1 = (4^3 - 12 \times 4 + 3) - (1^3 - 12 \times 1 + 3) = 27$ m.

t	0	1	2	3	4	5	6
v	- 12	- 9	0	15	36	63	96
x	3	- 8	- 13	- 6	19	68	147

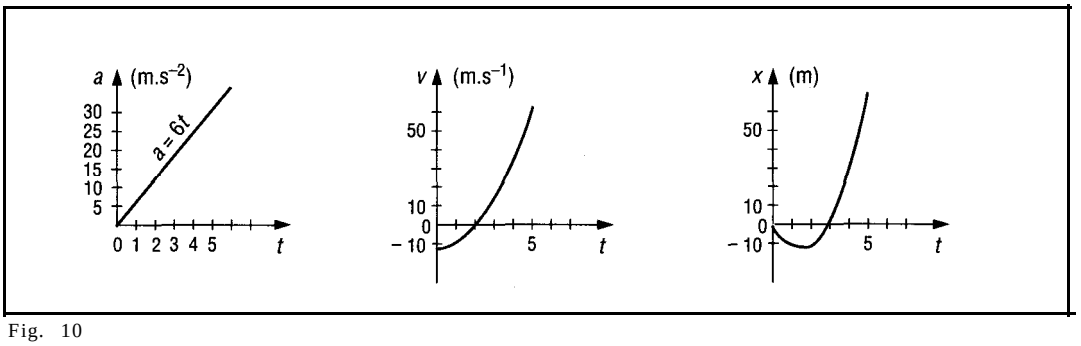


Fig. 10

❑ Le système bielle-manivelle sert de base à de multiples appareils (moteurs, thermiques, compresseurs, presses, etc.). Le mécanisme se compose d'une manivelle OA (1) articulée en 0 sur un bâti (0) et en A sur la bielle AB (2). La bielle est articulée en B sur le piston (3) animé d'un mouvement de translation rectiligne par rapport au bâti (direction x ou OB). Les liaisons en 0, A et B sont des liaisons pivots. Écrire les équations générales du mouvement de translation du piston (Voir fig. 17 page 136).

Résolution

- a est l'accélération angulaire de la manivelle (1).
- Par dérivations successives,

en remarquant que :
$R \sin\theta = L \sin\beta$;
x = R cos θ + L cos β,
on obtient les relations suivantes :

$$x = R\left(\cos\theta + \sqrt{k^2 - \sin^2\theta}\right)$$

$$v = -\omega r\left(\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2\sqrt{k^2 - \sin^2\theta}}\right)$$

$$a = -\omega^2 R\left|\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{k^2 - \sin^2\theta}} + \frac{\sin^2 2\theta}{4\sqrt{\left(k^2 - \sin^2\theta\right)^3}}\right| - \alpha r\left[\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2\sqrt{k^2 - \sin^2\theta}}\right]$$

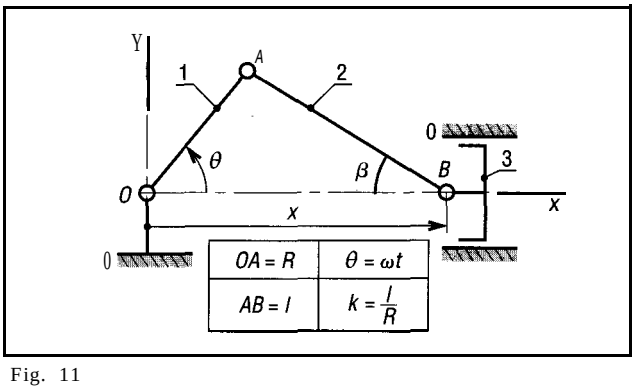


Fig. 11

EXERCICES À RÉSOUDRE

❑ Déterminer les équations des 4 mouvements du graphe proposé.

Réponse

$x_1 = 0{,}75t - 0{,}75$;
$x_2 = 1{,}5$;
$x_3 = t$;
$x_4 = 0{,}6t + 2$.

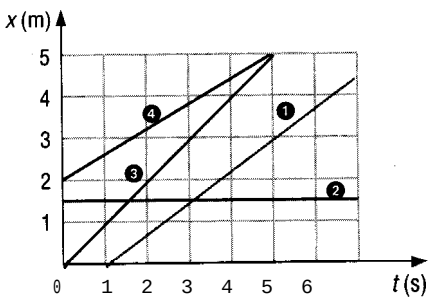


Fig. 12

❑ Le graphe des vitesses proposé donne les trois phases de la course aller d'un chariot de machine automatisé. Conditions initiales :
$t = 0, x = 0$
Déterminer les accélérations et les équations des trois mouvements.

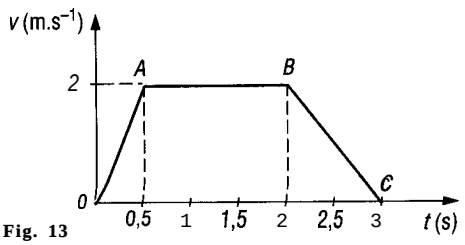


Fig. 13

❑ Le graphe des vitesses proposé décrit la vitesse d'un objet en chute libre (translation rectiligne). Déterminer les équations du mouvement si, pour $t = 0$, $x = -200$ m.

Réponse

$a = -10$ m.s^{-2} ;
$v = -10\,t + 30$; $x = -5t^2 + 30t - 200$.

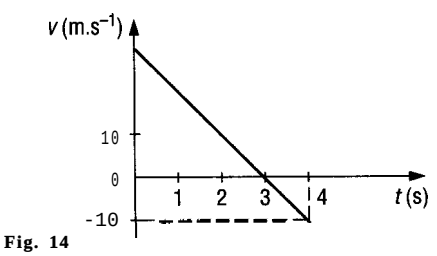


Fig. 14

❑ Un cyclomoteur part d'une ville A vers une ville B à la vitesse moyenne de 40 km.h^{-1} (vent de face). Arrivé en B, il revient vers A à la vitesse moyenne de 60 km.h^{-1} (vent de dos). a) Déterminer sa vitesse moyenne pour un aller et retour. b) Montrer que cette vitesse est indépendante de la distance entre les deux villes. On remarquera que cette vitesse n'est pas égale à 50 km.h^{-1}.

❑ Soit trois trains A, B et C circulant entre Amiens et Paris via Creil (distance Amiens-Paris 150 km ; Amiens-Creil 90 km). A part d'Amiens, vers Paris, à 7 h 30, à la vitesse de moyenne de 150 km.h^{-1}, sans arrêt. B part de Creil, vers Amiens à 8 h à la vitesse de 80 km.h^{-1}, sans arrêt. C part de Paris, en direction de Creil, à 7 h 45 à la vitesse de 120 km.h^{-1}, s'arrête à Creil pendant 15 minutes, puis repart vers Amiens à 150 km.h^{-1}. a) Écrire les équations des trois mouvements. Tracer les graphes correspondants. b) À quel le heure et à quelle distance y a-t-il croisement de A avec B et de A avec C ? c) À quelle heure et à quelle distance C dépasse-t-il B ?

Réponse

$X_A = -120t + 150$; $X_B = 80t + 20$;
$X_C = 120t - 30$ (si $t \leq 0{,}75$) ;
$X_C = 60$ (si $0{,}75 < t < 1$) ;
$X_C = 150t - 90$ (si $t \geq 1$) ;
A avec B : $t = 0{,}65$ et X = 72 ;
A avec C : $t = 0{,}75$ et X = 60 ;
B avec C : $t = 1{,}5714$ et X = 145,7.

❑ Une voiture. de formule 1 effectue la distance 0 – 1 000 m, départ arrêté, en 19 secondes. Si le mouvement est supposé rectiligne et uniformément accéléré, déterminer l'accélération du véhicule et sa vitesse au bout des 1 000 m.

Réponse

a = 5,54 m.s^{-2} ; v = 105,3 m.s^{-1} (379 km.h^{-1}).

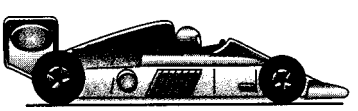


Fig. 15

❑ Un piéton marche le soir sous un lampadaire, le mouvement est supposé rectiligne et uniforme. Le piéton mesure $h = 1{,}8$ m (le lampadaire $H = 6$ m) et marche à la vitesse V_1 constante.

a) Déterminer la vitesse V_2 de l'extrémité (A) de l'ombre du piéton en fonction de la vitesse V_1 de celui-ci.

b) Montrer que V_2 est constante.

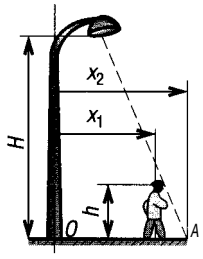


Fig. 16

❑ Aux États-Unis, les compétitions entre dragsters sont classiques. Le vainqueur est celui qui, départ arrêté, parcourt le plus vite une distance imposée (1 000 m, 1 mille, 2 000 m, etc.). Un des dragsters atteint la vitesse de 280 $km.h^{-1}$ entre 0 et 400 m. Si le mouvement est supposé rectiligne et uniformément accéléré, déterminer l'accélération de l'engin et le temps mis pour parcourir les 400 m.

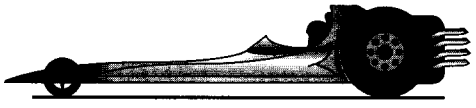


Fig. 17

12 Pour atterrir, un avion arrive en bout de piste à la vitesse de 300 $km.h^{-1}$. La longueur d'atterrissage est de 1 200 m et le mouvement est supposé uniformément décéléré. Déterminer la décélération de l'appareil et la durée totale de l'atterrissage.

Réponse

$a = -2{,}89$ m.s^{-2} ; $t = 28{,}8$ s.

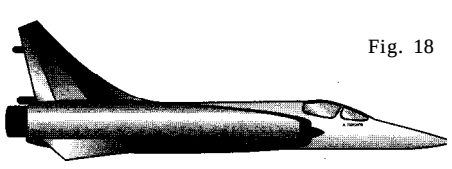


Fig. 18

• El Pour le tournage d'un film d'action, on prépare avec précision la scène où une automobile tombe du haut d'un pont et fait une chute sur la hauteur $h = 120$ m. La résistance de l'air est négligée, $g = 9{,}81$ m.s^{-2} est l'accélération du mouvement. a) Écrire l'équation du mouvement. b) Déterminer la durée de la chute. c) Quelle est la vitesse d'arrivée au fond du ravin ?

Réponse

$x = 4{,}9\ t^2$; $v = 9{,}81\ t$; $t = 4{,}95$ s ;
$v_h = 48{,}6$ m.s^{-1} (175 km.h^{-1}).

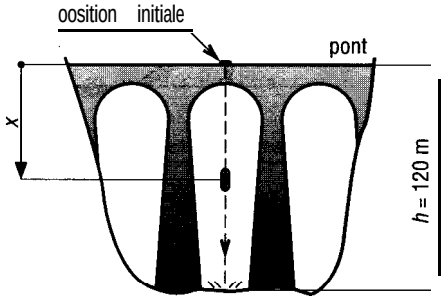


Fig. 19

❑ Avec un pistolet, on tire verticalement vers le haut. La balle sort du canon à la vitesse de 600 m.s^{-1}.

La résistance de l'air est négligée, $g = 9{,}81$ m.s^{-2}. a) Déterminer les équations de mouvement de la balle (a, v et x). b) En déduire la hauteur maxi d'ascension de la balle. c) Quelle est la vitesse du projectile à 6 000 m d'altitude ? d) Au bout de combien de temps retombe-t-il au sol et à quelle vitesse ?

❑ Une automobile arrive en haut d'une côte à la vitesse de 72 $km.h^{-1}$, puis descend en roue libre une pente de 15 %, freins desserrés sur une longueur de 1 000 m. Déterminer la vitesse d'arrivée du véhicule au bas de la côte et le temps mis pour descendre.

Réponse

$a = g \sin a = 1{,}46$ m.s^{-2} ; $t = 25{,}7$ s ;
$v = 57{,}5$ m.s^{-1} (207 km.h^{-1}).

❑ Un colis descend un plan incliné AB (angle a, hauteur h). Le mouvement de descente s'effectue à accélération constante. a) Montrer que la vitesse d'arrivée en B est indépendante de a et ne dépend que de h. b) AB = 3 m ; BC = 3,6 m ; le colis arrive en A à la vitesse $V_A = 1{,}2\ m.s^{-1}$ et s'arrête en C 2,8 secondes après avoir quitté A ; l'accélération entre A et B est de 0,3 g. Déterminer la décélération entre B et C (supposée constante) et le temps mis pour aller de B à C.

Réponse

$a_{BC} = -2{,}65\ m.s^{-2}$; t = 1,723 s.

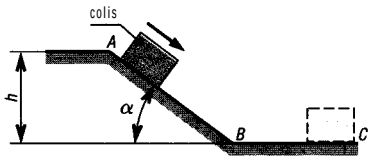


Fig. 20

❑ Une équipe de cascadeurs prépare un numéro où l'un d'entre eux, monté sur un tabouret de hauteur H = 4 m, attend qu'une voiture lancée à la vitesse constante v vienne le percuter. $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$, les pieds sont suffisamment fragiles et le cascadeur tombe verticalement. a) Écrire les équations de mouvement. b) Quelle doit être la vitesse v minimale pour que le cascadeur tombe sur le sol et pas sur le toit du véhicule ?

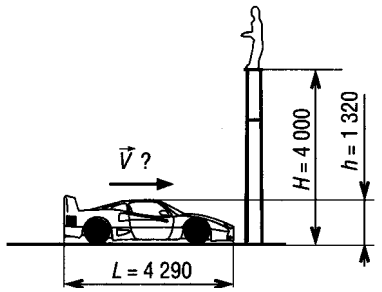


Fig. 21

❑ Une rame du métro du futur relie deux stations distantes de 10 km. Si l'accélération et la décélération, supposées constantes, sont limitées à 0,6g (g = 9,81 $m.s^{-2}$) et si la vitesse est limitée à 400 $km.h^{-1}$, déterminer le temps mis pour parcourir les 10 km.

Réponse

1,81 minute.

❑ L'accélération d'un chariot de machine de production automatise est indiquée par le graphe proposé. Les conditions initiales du mouvement sont : $t = 0$; $x_0 = 0$ et $v_0 = -8\ cm.s^{-1}$. a) Déterminer les équations du mouvement. b) Quelle est la vitesse du chariot à t = 5 s et le déplacement effectué pendant les deux premières secondes ?

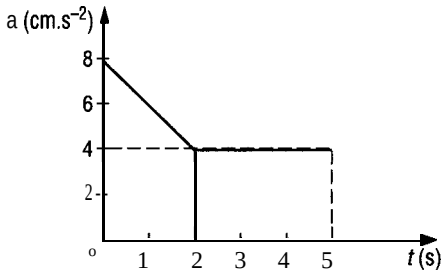


Fig. 22

❑ Le principe du système manivelle-cadre sert de base à de nombreux appareils divers (scie sauteuse, taille-haie, moulinet, etc.). Le mécanisme se compose d'une manivelle (1), entraînée en A par un moteur, et transmettant en B un mouvement de translation rectiligne alternatif à un cadre (2). Ecrire les équations générales du mouvement du cadre.

Réponse

$y = R\cos\theta = R\cos\omega t$; $v = -\omega R\sin\theta$; $a = -\omega^2 R\cos\theta$.

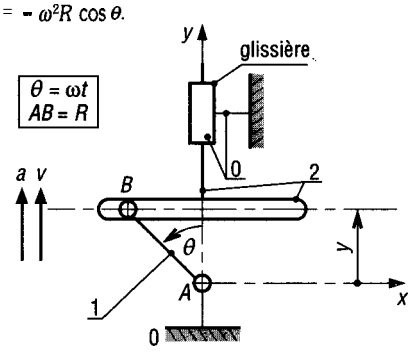


Fig. 23

21 Un navire porte-conteneurs avance à la vitesse de 10 noeuds (1 nœud = 0,5144 $m.s^{-1}$). Les moteurs sont coupes. Il faut 12 minutes au bateau pour réduire sa vitesse à 5 noeuds. Quelle distance a-t-il parcouru si la décélération est proportionnelle au carré de la vitesse ($a = -kv^2$) ?

Réponse

$k = 5$; $v = 10/(1 + 5t)$; $x = 2\ \mathbf{In}\ (1 + 5t)$; 2 567 m.

12 MOUVEMENTS DE ROTATION

OBJECTIFS

- Définir les notions de vitesse et d'accélération angulaires.
- Traiter les cas particuliers : rotation uniforme et rotation uniformément accélérée.
- Indiquer la valeur de la vitesse et de l'accélération pour un point lié à un solide en rotation.
- Définir les notions de vecteur-rotation et de vecteur-accélération angulaire.

1 • Angle de rotation, vitesse et accélération angulaires

1. Angle de rotation θ

La rotation d'un solide est définie par son mouvement angulaire. Pour un solide en rotation plane (rotation d'axe 0), il suffit de mesurer l'angle de rotation θ d'une droite quelconque (OA, OB, etc.) appartenant au solide pour repérer la rotation de celui-ci.

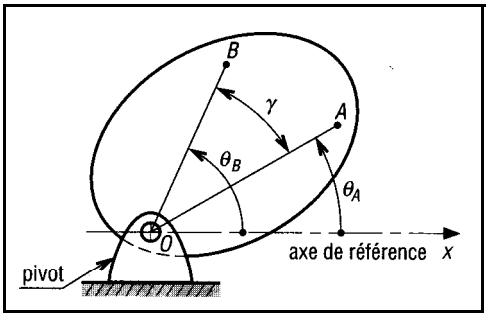


Fig. 1

$$\theta_B = \theta_A + \gamma$$

Remarque

1 tour = 2 π radian = 360" (1 rad = 57,296").

Il n'est pas nécessaire d'avoir un axe de rotation fixe pour avoir un mouvement de rotation.

2. Vitesse angulaire ou vitesse de rotation ω

La démarche est la même que pour les translations rectilignes.

Vitesse angulaire moyenne

$$\omega_{moy} = \frac{\theta' - \theta}{t' - t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

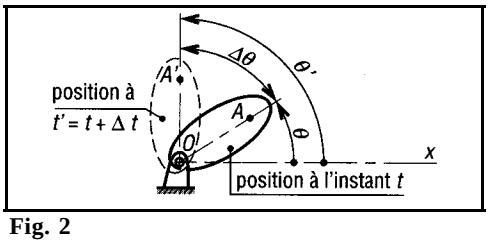


Fig. 2

Vitesse angulaire instantanée

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right) = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

unités : $rad.s^{-1}$

Remarque : si N est la vitesse de rotation en tours par minute, alors

$$\omega = \frac{\pi N}{30}$$

Exemple : N = 1 000 $tr.min^{-1}$ donne $\omega = \frac{1\,000 \times \pi}{30} = 104{,}72\ rad.s^{-1}$.
On remarquera que $\omega \simeq 0{,}1\ N$.

3. Accélération angulaire a

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right) = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$$

ou

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

unités : $rad.s^{-2}$

Remarque :

$$\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta \quad ou \quad \dot{\theta}\, d\,\dot{\theta} = \ddot{\theta}\, d\theta$$

4. Mouvement de rotation uniforme

L'accélération angulaire a est nulle et les équations de mouvement sont :

$$\alpha = \ddot{\theta} = 0 \qquad \omega = \omega_0 = constante \qquad \theta = \theta_0 + \omega t$$

Exemple : équations de mouvement d'un moteur électrique tournant à 1 500 $tr.min^{-1}$. Quel est l'angle parcouru en une heure ?

$\omega = \frac{\pi N}{30} = \frac{\pi \times 1\,500}{30} = 157\ rad.s^{-1}$; à $t = 0, \theta_0 = 0$

Équations : ω = 157 $rad.s^{-1}$; $\theta = 157t$.

$\theta_{1\ heure}$ = 157 x 3 600 = 565 200 rad (≃ 90 000 tours).

5. Mouvement de rotation uniformément accéléré

L'accélération angulaire a est constante.

$$\alpha = constante \qquad \omega = \alpha t + \omega_0 \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

Formule utile : $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Conditions initiales : à t = 0, $\omega = \omega_0$ et $\theta = \theta_0$.

Remarques : si $\alpha > 0$, il y a accélération ; si a < 0 il y a décélération ou freinage.
Les relations précédentes sont analogues à celles établies pour les mouvements de translation rectiligne.

Exemple : un arbre de turbine atteint la vitesse de 4 000 $tr.min^{-1}$ en huit minutes. Déterminons les équations du mouvement si l'accélération est constante.

À $t = 0$, $\theta_0 = 0$ et $\omega_0 = 0$, il résulte que :

$$\omega = \alpha t \text{ et } \theta = \alpha \frac{t^2}{2}$$

À $t = 8 \times 60 = 480$ s, $\omega = \frac{4\,000\pi}{30} = 418{,}9$ rad.s^{-1}

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{418{,}9}{480} = 0{,}873 \text{ rad.s}^{-1}$$

Résultats : $\omega = 0{,}873\ t$ et $\theta = 0{,}436\ t^2$

II - Vitesse et accélération d'un point

1. vitesse

La trajectoire de A, T_A, est le cercle de centre 0 et de rayon $OA = R$.
$\vec{V_A}$ est tangente en A au cercle (T_A) ; elle est également perpendiculaire en A à OA.
L'intensité de $\vec{V_A}$ est égale au produit de OA par la vitesse angulaire ω du solide :

$$V_A = \omega \cdot OA = \omega R$$

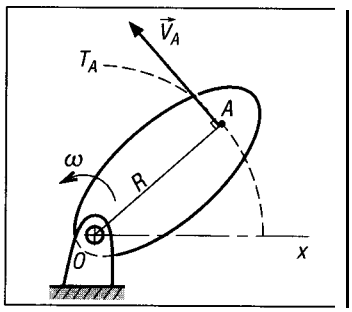


Fig. 3

2. Accélération

L'accélération $\vec{a_A}$ du point A possède une composante normale <(dirigée de A vers 0) et une composante tangentielle <(tangente à T_A ou perpendiculaire à OA).

$$\vec{a_A} = \vec{a_n} + \vec{a_t} \qquad a_t = \alpha R = a.OA \qquad a_n = \omega^2 R = \frac{V_A^2}{R} = \omega.V_A$$

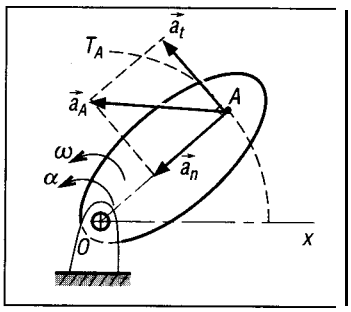


Fig. 4

Différents cas

vitesse constante	accélération	décélération ou freinage
$\vec{V_A}$, A, $\vec{a_n}$, ω, 0 ; $\alpha = 0$, $a_t = 0$, ω = constante	$\vec{V_A}$, $\vec{a_t}$, $\alpha > 0$, $\vec{a_A}$, A, $\vec{a_n}$, α, ω, 0	$\vec{V_A}$, $\alpha < 0$, A, $\vec{a_t}$, $\vec{a_n}$, ω, 0, α, $\vec{a_A}$

Fig. 5

III • Vecteur-rotation $\vec{\omega}$

La représentation vectorielle de la vitesse de rotation ω est nécessaire aux études cinématiques dans l'espace. La démarche est la même que pour le vecteur-moment et le moment scalaire.

1. Vecteur-rotation $\vec{\omega}$

L'axe de rotation (0, *z*) est perpendiculaire au plan du mouvement de rotation (0, x, y).
La vitesse angulaire ω est définie par le vecteur-rotation $\vec{\omega}$ porté par l'axe de rotation et tel que :

$$\vec{V_A} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$$

Remarque : si la rotation se fait de x vers y, $\vec{\omega}$ est positif et est orientée vers les z positifs.

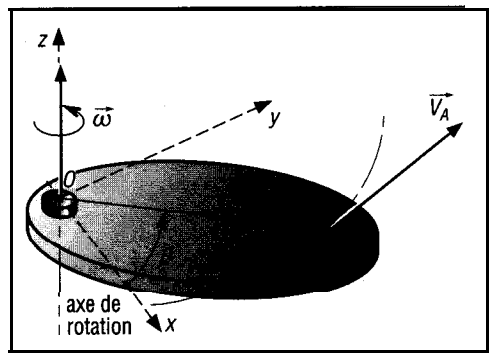


Fig. 6

2, Vecteur-accélération angulaire $\vec{\alpha}$

Comme pour $\vec{\omega}$, le vecteur accélération angulaire a est porté par l'axe de rotation (0, z). L'accélération du point A devient :

$$\vec{a_A} = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OA} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA})$$
$$\vec{a_t} = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OA} \qquad \vec{a_n} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA})$$

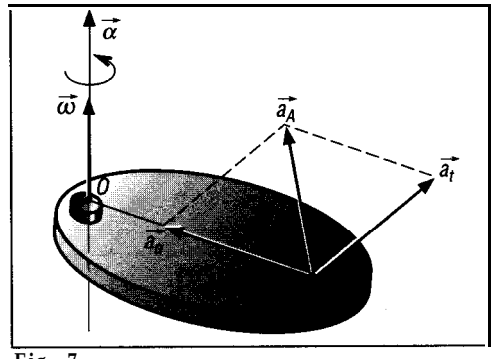


Fig. 7

3. Cas d'un mouvement plan

Si le mouvement est effectué dans le plan (0, x, y), $\vec{\omega}$ est dsont constamment portés par z (vecteur unitaire $\vec{k}$) et s'écrivent $\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}$ et $\vec{\alpha}$ = a . $\vec{k}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs unitaires de $\overrightarrow{OA}$ et de la perpendiculaire à $\overrightarrow{OA}$.

$\overrightarrow{OA}$ =OAù
$\vec{k} \wedge \vec{u} = \vec{v}$ et $\vec{k} \wedge \vec{v} = -\vec{u}$
$\vec{V_A} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA} = \omega\,\vec{k} \wedge OA\,\vec{u} = \omega\,OA\,\vec{v}$
$\vec{a_t} = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OA} = \alpha\,\vec{k} \wedge OA\,\vec{u} = \alpha\,OA\,\vec{v}$
$\vec{a_n} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}) = \vec{\omega} \wedge \vec{V_A}$
$= \omega\vec{k} \wedge \omega\,OA\,\vec{v} = -\omega^2\,OA\,\vec{u}$

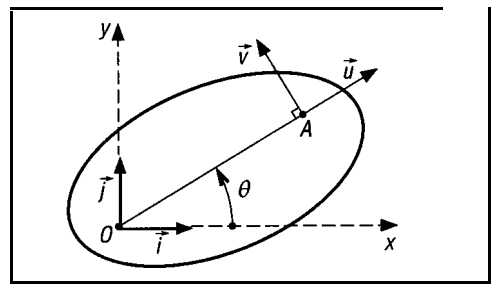


Fig. 8

$$\vec{a_A} = \alpha\,.\,OA\,\vec{v} - \omega^2\,.\,OA\,\vec{u} = \alpha R\,\vec{v} - \omega^2 R\,\vec{u}$$

(0 ; x ; y ; z) = repère de référence,
(0 ; *u* ; *v* ; z) = repère lié au solide.

EXERCICE RÉSOLU

❑ Pour l'hélice d'avion proposée, si la vitesse angulaire est de 1 000 $tr.min^{-1}$, déterminer les vitesses et les accélérations des points A, B et D ($OA = OB =$ 1 m ; OD = 0,5 m ; ω est constante). Dès que le moteur est coupé, l'hélice fait 50 tours avant de s'immobiliser. Déterminer la décélération angulaire, l'accélération tangentielle en A et le temps que le moteur met pour s'arrêter (t,).

Résolution

a) $\frac{V_A}{OA} = \frac{V_B}{OB} = \frac{V_D}{OD} = \omega = \frac{\pi \times 1\,000}{30} = 104{,}7 \text{ rad.s}^{-1}$

$V_B = V_A = 104{,}7 \text{ x } 1 = 104.7 \text{ m.s}^{-1}$; $V_D = 104{,}7 \text{ x } 0{,}5 = 52{,}36 \text{ m.s}^{-1}$

ω est constante : $\alpha = 0$; $a_t = \alpha R = 0$; $a_n = \omega^2 R$; $\vec{a} = \vec{a}_n$

$a_{nB} = a_{nA} = 104{,}7^2 \text{ x } 1 = 10\,966 \text{ m.s}^{-2}$; $a_{nD} = 104{,}7^2 \text{ x } 0{,}5 = 5\,483 \text{ m.s}^{-2}$

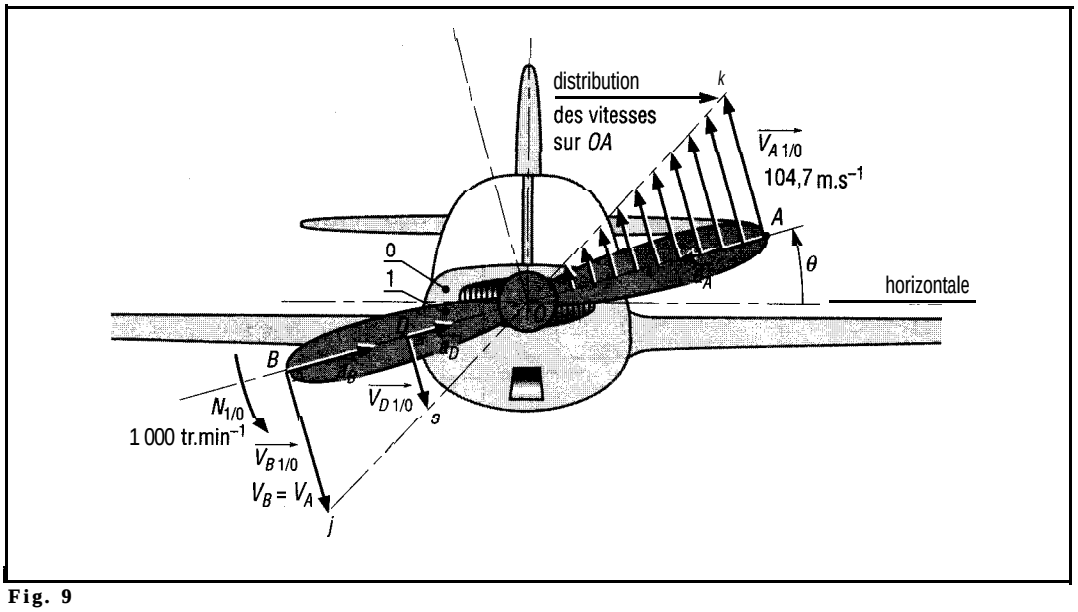


Fig. 9

b) $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) = 0 = 104{,}7^2 + 2\alpha$ **(50 x** 2π**)**

d'où : a = $-17{,}45 \text{ rad.s}^{-2}$

$a_t = \alpha R = -17{,}45 \text{ x } 1 = -17{,}45 \text{ m.s}^{-2}$

Équations de mouvement : $\theta = -8{,}73\,t^2 + 104{,}7\,t$; $\omega = -17{,}45\,t + 104{,}7$.

En fin de mouvement :

$\omega = 0 = -17{,}45\,t_a + 104{,}7$ d'où $t_a = 6$ s

Remarque

V_A et a_{nA} varient au cours de la décélération.

$0 \leqslant V_A \leqslant 104{,}7$; $0 \leqslant a_{nA} \leqslant 10\,966$

Si on suppose qu'au démarrage, l'hélice fait 50 tours pour atteindre la vitesse de 1 000 tr/min, les résultats précédents sont inversés : a = $17{,}45 \text{ rad.s}^2$

$a_t = 17{,}45 \text{ m/s}^2$ et $t_d = 6$s.

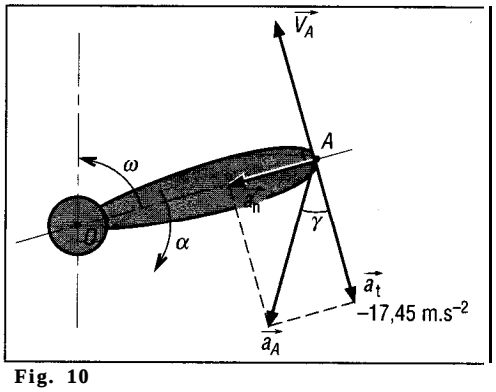


Fig. 10

EXERCICES À RÉSOUDRE

❑ Sur un tour automatique de production, on usine un cylindre de 100 mm de diamètre. La vitesse de rotation de la pièce est de 300 tr.min^{-1}. Le mouvement d'avance de l'outil est négligé. a) Déterminer la vitesse de coupe V_c (vitesse de la pointe de l'outil par rapport à la pièce). b) On envisage d'usiner un cylindre de 70 mm de diamètre. Si on conserve la même vitesse de coupe, quelle doit être la vitesse angulaire de la pièce ?

V_c = 1,57 m.s^{-1} (94,2 m.min^{-1}) ; N = 430 tr.min^{-1}.

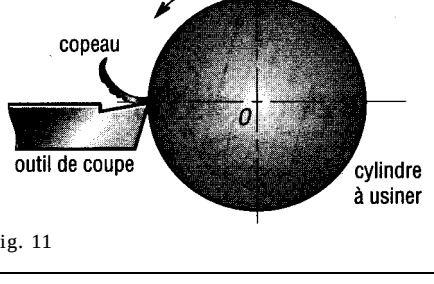


Fig. 11

3 Une meule à tronçonner doit travailler à une vitesse périphérique de 80 m.s^{-1}. Déterminer les vitesses de rotation N des meules, si elles ont les diamètres d suivants : 50 ; 65 ; 75 ; 90 ; 100 ; 115 ; 150 et 200 mm. Tracer le graphe correspondant $N = f(d)$ avec N en tr.min^{-1}.

❑ Un moteur électrique met deux secondes pour atteindre sa vitesse de régime 1 500 tr.min^{-1}. Si l'accélération angulaire est supposée constante, déterminer les équations du mouvement et le -nombre de tours effectués pendant le démarrage.

Réponse

α = 78,54 rad.s^{-2} ; ω = 78,54 t ; θ = 39,27 t^2 ; 25 tours.

❑ Reprendre l'exercice 4 avec une turbine atteignant la vitesse de 5 000 tr.min^{-1} en 10 minutes.

❑ Un arbre de transmission fait 25 tours pendant 5 secondes avant d'atteindre sa vitesse de régime ω_f. Si le mouvement est uniformément accéléré, déterminer les équations du mouvement et ω_f.

Réponse

α = 4 π rad.s^{-2} ; ω = 12,56 t ; θ = 6,28 t^2 ; ω_f = 62,8 rad.s^{-1}.

❑ Reprendre l'exercice 6 avec un arbre de presse faisant 40 tours en 4 secondes.

❑ Dès l'instant où le moteur est coupé, une hélice d'avion qui tournait à 1 200 tr.min^{-1} effectue 80 tours jusqu'à l'arrêt complet. Si la décélération est supposée constante, déterminer les équations de mouvement et le temps que le moteur met pour s'arrêter.

Réponse

a = − 15,7 rad.s^{-2} ;
ω = − 15,7 t + 125,7 ;
θ = − 7,85 t^2 + 125,7 t ; 8 s.

❑ Reprendre l'exercice 8 avec 800 tr.min^{-1} et 60 tours. Si le rayon de l'hélice est de 800 mm, déterminer la vitesse et l'accélération d'un point de la périphérie lorsque la vitesse de rotation est de 400 tr.min^{-1}.

❑ Une automobile aborde un virage de rayon R = 150 m à la vitesse de 90 km.h^{-1}. Si l'accélération du véhicule est de 1,5 m.s^{-2} sur sa trajectoire, déterminer l'accélération supportée par les passagers (en A).

Réponse

a_r = 4,17 m.s^{-2} ; a_t = 1,5 ; a_A = 4,43.

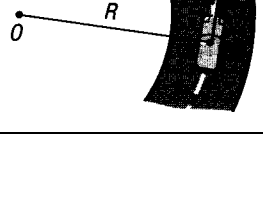


Fig. 12

11 Reprendre l'exercice 10 avec un rayon R de 100 m. a) le véhicule roule à la vitesse constante de 90 $km.h^{-1}$; b) le véhicule a une décélération de 3 $m.s^{-2}$ sur sa trajectoire ; c) le véhicule accélère $(1{,}8\ m.s^{-2})$ sur sa trajectoire.

❑ Un avion de voltige descend en piqué puis redresse selon une trajectoire circulaire (A, B, C) de rayon : R = 250 m (a = 30°). La vitesse de l'appareil est de 450 $km.h^{-1}$ en A et l'accélération tangentielle de 10 $m.s^{-2}$. a) Déterminer l'accélération supportée par le pilote en A. b) Déterminer la vitesse de passage en B si l'accélération tangentielle reste constante.

Réponse

CI, = 62,5 $m.s^{-2}$; a_t = 10 $m.s^{-2}$; a_A = 63,3 $m.s^{-2}$; V_B = 486 $km.h^{-1}$.

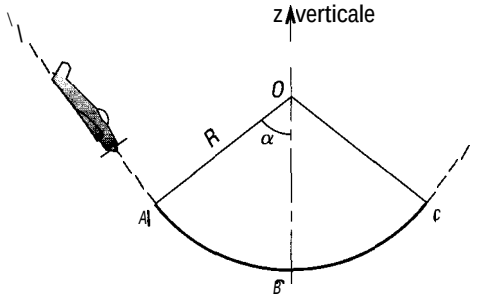


Fig. 13

❑ Une centrifugeuse est utilisée pour entraîner les pilotes et les astronautes à subir de fortes accélérations. a) On impose une accélération maximale de 12 g (g = 9,81 $m.s^{-2}$). En déduire la vitesse de rotation maximale de la centrifugeuse et la vitesse V_A de l'astronaute. b) Le moteur est coupé, le dispositif met 10 tours pour s'arrêter. Si la décélération est constante, déterminer le temps mis jusqu'à l'arrêt.

Réponse

ω = 3,84 $rad.s^{-1}$; V_A = 31 $m.s^{-1}$; a = − 0,12 $rad.s^{-2}$ t = 32,7 s.

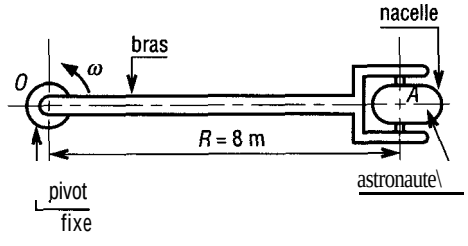


Fig. 14

14 Reprendre l'exercice 12 avec R = 800 m, α = 45° ; 600 $km.h^{-1}$. Déterminer les accélérations en A et B.

❑ Pour le système bielle manivelle propose, β repère l'angle de rotation de la bielle (2). a) Déterminer la valeur de β en fonction de θ l'angle repérant la rotation de la manivelle (vilebrequin). b) En déduire les valeurs de β, la vitesse angulaire et $\ddot{\beta}$, l'accélération angulaire.

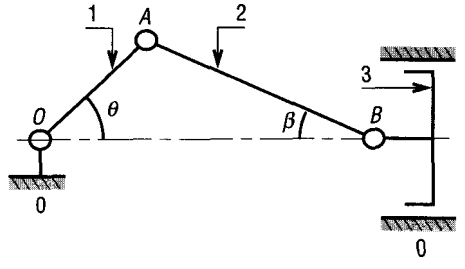


Fig. 15

$OA = R$	$AB = L$
$k = \frac{R}{L}$	$\theta = \omega t$

Réponse

$$\sin\beta = k\sin\theta$$

$$\dot{\beta} = \frac{\omega k\cos\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

$$\ddot{\beta} = \frac{\omega^2 k\sin\theta\left(k^2-1\right)}{\left(1-k^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}$$

❑ Reprendre l'exercice 15 avec le mécanisme de pompe oscillante proposé. Le cylindre (3) est articulé en B (pivot) sur le bâti (0).
$OA = R$; $OB = l$; $k = \dfrac{l}{R}$.

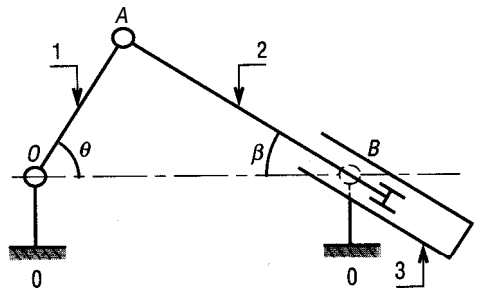


Fig. 16

Réponse

$$\tan\beta = \frac{\sin\theta}{k - \cos\theta}$$

$$\dot{\beta} = \frac{\omega(k\cos\theta - 1)}{(k^2 - 2k\cos\theta + 1)}$$

$$\ddot{\beta} = \frac{\omega^2 k(k^2 - 1)\sin\theta}{(k^2 + 1 - 2k\cos\theta)}$$

❑ Une croix de Malte à 8 faisceaux est utilisée dans un projecteur pour salle de cinéma. La manivelle (1), animée d'un mouvement de rotation uniforme (1 630 tr.min^{-1}), entraîne en A la croix de Malte (2). Celle-ci est animée d'un mouvement de rotation intermittent et fournie la cadence de base des 24 images par seconde.
En utilisant les formules de l'exercice 16, déterminer β_{maxi}, $\dot{\beta}_{maxi}$ et $\ddot{\beta}_{maxi}$.
$OA = 9$ mm, $OB = 24$ mm.

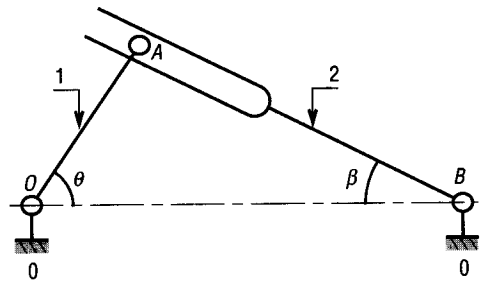


Fig. 17

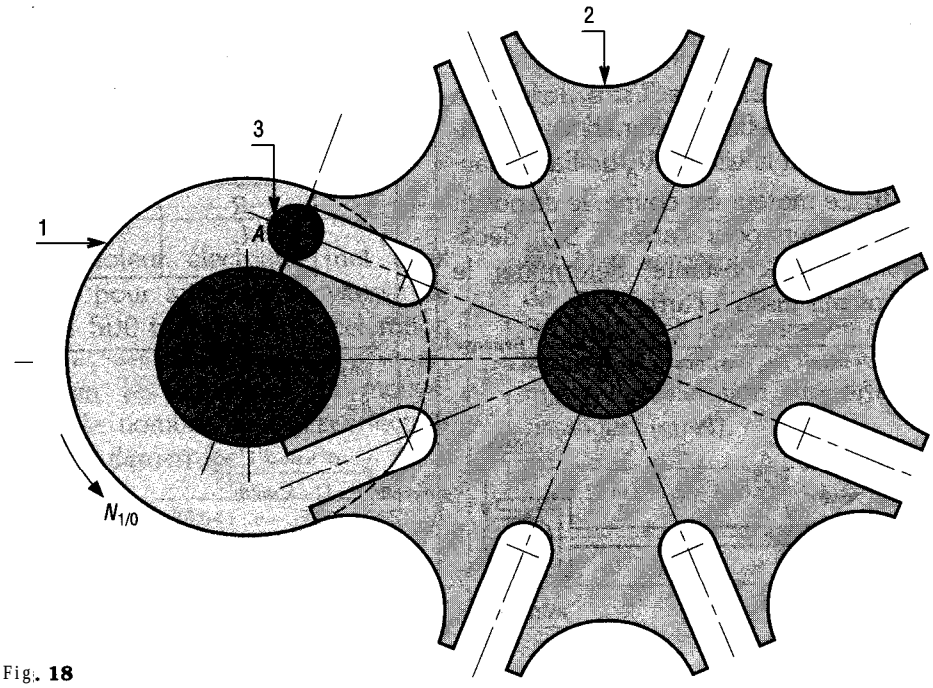


Fig. 18

13 MOUVEMENT PLAN

OBJECTIFS

- Décrire les caractéristiques des mouvements plans.
- Définir et développer les notions d'équiprojectivité et de centre instantané de rotation (CIR).
- Indiquer les relations vectorielles liant les vitesses et les accélérations de deux points appartenant à un même solide.

Un solide est en mouvement plan lorsque tous les points de celui-ci se déplacent dans des plans parallèles à un plan de référence. Une translation (plane) et une rotation d'axe sont des mouvements plans particuliers (voir page 130).
Pour ce chapitre, sauf si une extrême précision est exigée, il ne faut pas hésiter à utiliser des méthodes graphiques pour résoudre les exercices (même démarche qu'en statique plane).

I-Étude générale-Exemples

Un mouvement plan peut être considéré comme l'addition d'une translation et d'une rotation.

Exemple 1 : prenons le cas d'une échelle posée en B sur le sol et appuyée en **A** sur un mur.

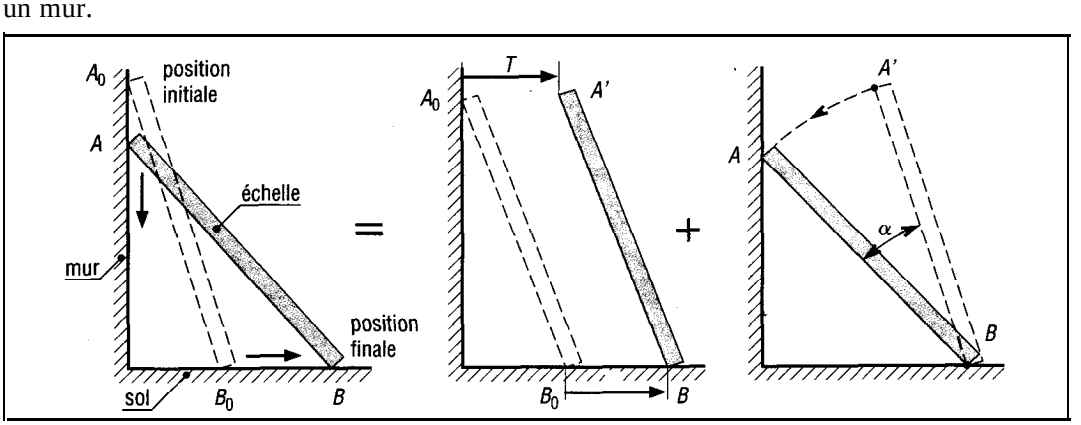


Fig. 1

L'échelle décrit un mouvement plan par rapport à l'ensemble (sol + mur).
Pour passer de la position initiale (A_0B_0) à la position finale (AB), on peut faire une translation (T) amenant B_0 en B et A,, en A' suivie d'une rotation d'axe B, d'angle a, amenant A' en A.
On peut aussi utiliser une translation à partir de A (A_0A) suivie d'une rotation autour de A (amène B' en B).

Remarque : compte tenu de cette propriété, l'étude des mouvements plans se ramène à l'addition ou la combinaison d'une translation et d'une rotation.

Exemple 2 : système bielle manivelle.
Les liaisons en 0, A et B sont des pivots dont les axes sont perpendiculaires au plan de la figure.
Le mouvement du piston (3) par rapport au bâti (0), $M^{vt}_{3/0}$, est une translation rectiligne de direction OB.
Le mouvement de la manivelle (1) par rapport à (0), $M^{vt}_{1/0}$, est une rotation d'axe 0.
Le mouvement de la bielle (2) par rapport à (0), $M^{vt}_{2/0}$, est un mouvement plan général.'

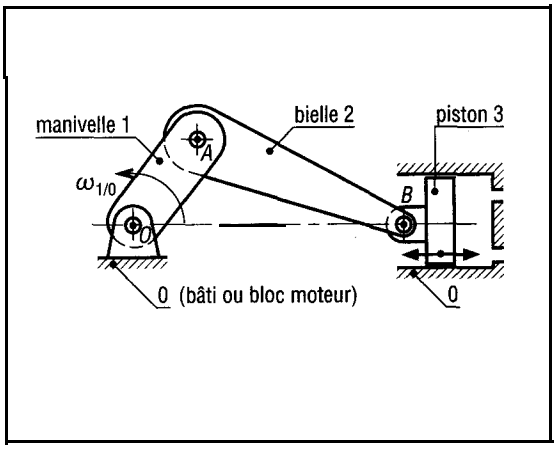


Fig. 2

Remarque : $M^{vt}_{1/0}$ et $M^{vt}_{3/0}$ sont des mouvements plans particuliers.

II - Équiprojectivité

La propriété d'équiprojectivité est l'une des propriétés les plus importantes de la cinématique du solide. Abordée à l'occasion du mouvement plan, elle est également vérifiée pour des mouvements quelconques de solides dans l'espace.

1. Énoncé

Soit deux points A et B appartenant à un même solide et $\vec{V_A}$ et $\vec{V_B}$ les vecteurs-vitesses respectifs, la projection orthogonale de $\vec{V_B}$ sur AB est égale à la projection orthogonale de $\vec{V_A}$ sur AB. Autrement dit, le produit scalaire de $\vec{V_A}$ par $\vec{AB}$ est égal au produit scalaire de $\vec{V_B}$ par $\vec{AB}$.

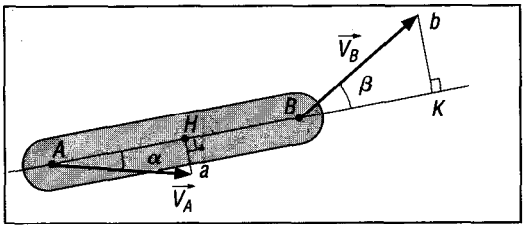


Fig. 3

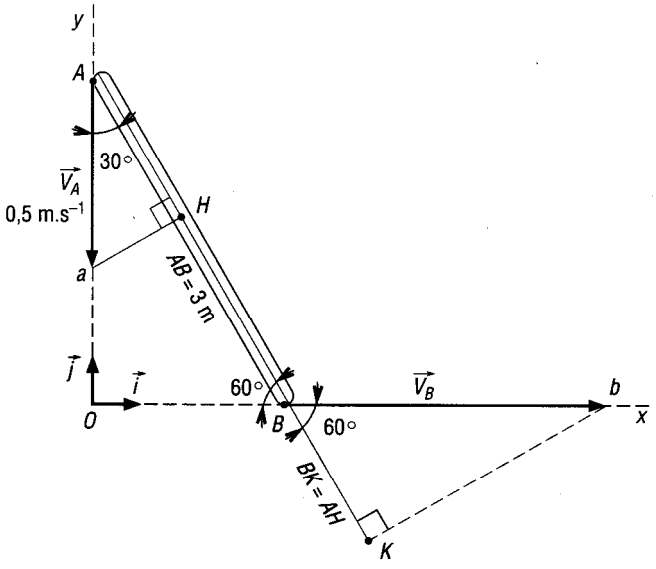
$\vec{V_A} \cdot \vec{AB} = \vec{V_B} \cdot \vec{AB}$
où : $\vec{AH} = \vec{BK}$
où : $V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta$
Project. $\vec{V_A}/AB$ = Project. $\vec{V_B}/AB$

Remarque 1 : aH et bK sont perpendiculaires à AB. H et K sont tous deux situés du même côté par rapport à A et B (à droite sur la figure).
La propriété est vérifiée pour tous les points du solide, pris deux à deux de manière quelconque. De ce fait, on dit que le champ des vitesses est équiprojectif.

Remarque 2 : en pratique, pour tout solide en mouvement plan, il suffit de connaître complètement la vitesse d'un point et la direction d'une autre, pour déterminer la vitesse de tous les points.

Exemple 1 : reprenons l'exemple de l'échelle du paragraphe 1. L'échelle de longueur AB = 3 m, glisse en A, vers le bas à la vitesse de $0{,}5\ m.s^{-1}$. Déterminons la vitesse de glissement en B sachant que celle-ci appartient au plan du sol (direction x).

Méthode de résolution graphique



Par le calcul

$\vec{V_A} = -0{,}5\ \vec{j}$ (en $m.s^{-1}$)

$\vec{V_B} = V_B \cdot \vec{i}$ (direction x)

$\vec{V_A} \cdot \vec{AB} = \vec{V_B} \cdot \vec{AB}$

$V_A \cos 30° = V_B \cos 60°$

$0{,}5 \times 0{,}866 = 0{,}5\ V_B$

d'où : Vs = $0{,}866\ m.s^{-1}$

Fig. 4

Remarque : si on adopte une construction graphique, il faut commencer par tracer la figure à une échelle donnée (exemple : 1 cm pour 0,3 m), en respectant les angles.

Ordre des constructions : choisir une échelle pour tracer les vitesses (exemple : 1 cm pour $0{,}1\ m.s^{-1}$) ; $\vec{V_A}$; point a ; point H de projection ; point K sachant que $\vec{BK}$ = $\vec{AH}$; point b en remarquant que bK est perpendiculaire à AB ; $\vec{V_B}$; mesure de l'intensité de $\vec{V_B}$ à l'échelle choisie.

Exemple 2 : reprenons le système bielle manivelle du paragraphe I avec OA = 35 mm ; AB = 128 ; $\omega_{1/0}$ = 100 $rad.s^{-1}$ ($\simeq$ 1 000 $tr.min^{-1}$) et un angle θ = AOB de 50".
Déterminons les vitesses en A et B.
$V_A = V_{A1/0} = V_{A2/0} = \omega_{1/0} \cdot OA$ = 100 x 0,035 = $3{,}5\ m.s^{-1}$
$\vec{V_{A1/0}}$ est perpendiculaire en A à OA (propriété de la rotation).
$V_B = V_{B3/0} = V_{B2/0}$ a pour direction OB (3 est en translation rectiligne de direction OB).

Remarque, : A étant le centre de la liaison pivot entre 1 et 2, il en résulte que $V_{A1/0} = V_{A2/0}$. Même remarque en B entre 2 et 3 : $\vec{V_{B3/0}} = \vec{V_{B2/0}}$.

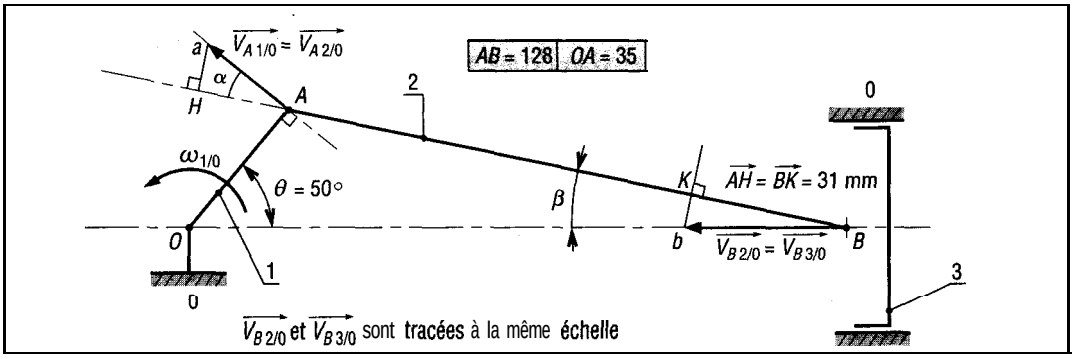


Fig. 5

Résultat graphique : $V_B = 3{,}15$ m.s^{-1}
La bielle 2 est en mouvement plan, $\overrightarrow{V_{A2/0}}$ est connue ainsi que la direction de $\overrightarrow{V_{B2/0}}$. L'intensité de $\overrightarrow{V_{B2/0}}$ est déterminée par équiprojectivité sur AB :
projection de $\overrightarrow{V_{A2/0}}$ sur AB = projection de $\overrightarrow{V_{B2/0}}$ sur AB.

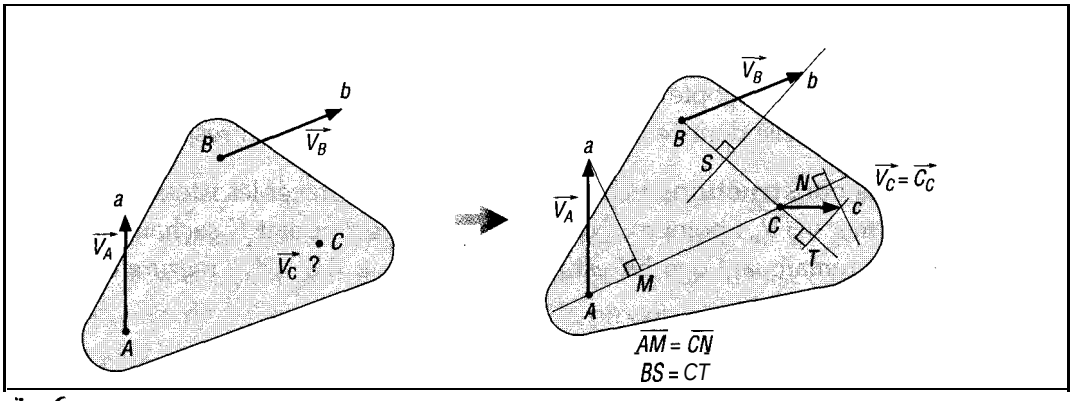
Ordre des constructions graphiques : tracer la figure à l'échelle (exemple : 1 cm pour 1 cm) ; choisir une échelle des vitesses (exemple : 1 cm pour 1 m.s^{-1}) ; tracer $\overrightarrow{V_A}$ perpendiculaire à OA (3,5 m.s^{-1}) ; point H, point K ($\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BK}$) ; extrémité b ; $\overrightarrow{V_{B2/0}}$; mesure de $\overrightarrow{V_B}$ à l'échelle choisie ($V_B = 3{,}15$ m.s^{-1}).

Remarque : si une grande précision est nécessaire, un calcul est possible à partir de ($AB \cdot \sin\beta = OA \cdot \sin\theta$) ; $\alpha = 90° - \theta - \beta$; $V_A \cos\alpha = V_B \cos\beta$.

Résultat : $V_B = 3{,}163$ m.s^{-1}.

2. Détermination d'une vitesse par double équiprojectivité

La détermination d'une vitesse $\overrightarrow{V_C}$, de direction et d'intensité inconnues est possible par double équiprojectivité à partir de deux vitesses $\overrightarrow{V_A}$ et $\overrightarrow{V_B}$ connues.



ig. 6

L'équiprojectivité sur BC donne $\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{CT}$ et celle sur AC, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CN}$. L'extrémité c de $\overrightarrow{V_C}$ est située à l'intersection des perpendiculaires tracées en N et T.

Remarque : si C avait été situé sur AB, il aurait fallu déterminer préalablement la vitesse $\overrightarrow{V_D}$ d'un point D non aligné avec A et B. Deux doubles équiprojectivités sont nécessaires. Pour de tels cas, préférer la méthode du CIR du paragraphe suivant.

III - Centre instantané de rotation (CIR)

1. Définition et propriété

Pour tout solide en mouvement plan, il existe un point I et un seul, ayant une vitesse nulle ($\overrightarrow{V_I} = \overrightarrow{0}$) à l'instant considéré (ou pour la position de la figure) et appelé centre instantané de rotation ou CIR.

Remarque : le CIR a les propriétés d'un centre de rotation à l'instant (t) considéré. À l'instant suivant (t' = t + At), le CIR a changé de position géométrique. Cette position varie au cours du temps et décrit une certaine trajectoire.

2. Détermination et construction du CIR

En tant que centre de rotation, le CIR est situé à l'intersection des perpendiculaires aux vecteurs-vitesses du solide.

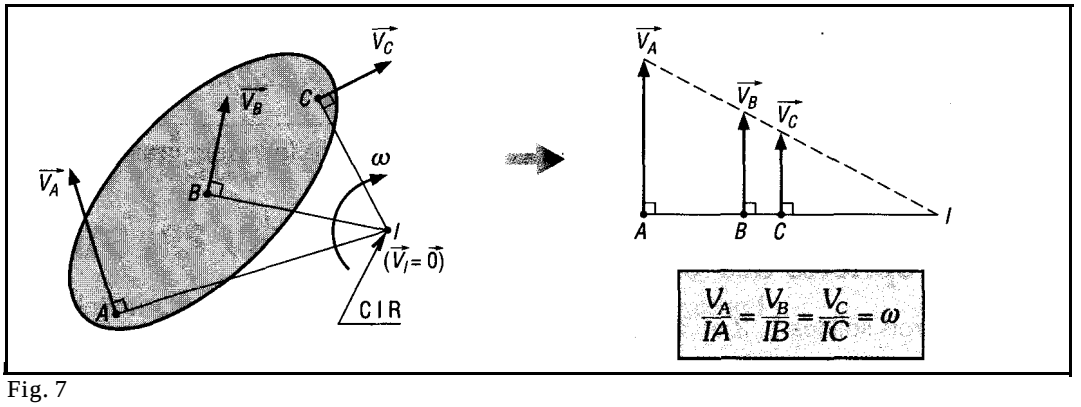


Fig. 7

Exemple 1 : reprenons l'exemple de l'échelle avec les données du paragraphe II1 (AI3 = 3 m ; 60" ; $\overrightarrow{V_A} = -0{,}5\ \vec{j}$ (en m.s^{-1}).
Le CIR, I, est situé à l'intersection des perpendiculaires en A à $\overrightarrow{V_A}$ et en B à $\overrightarrow{V_B}$.

$$\frac{V_B}{IB} = \frac{V_A}{IA} = \frac{V_{A'}}{IA'} = \omega$$

avec $IA = IA' = AB \cos 60" = 1{,}5$ m

$IB = AB \sin 60" = 2{,}6$ m

$$\omega = \frac{V_A}{IA} = \frac{0{,}5}{1{,}5} = 0{,}33\ \text{rad.s}^{-1}$$

$V_B = 0{,}33 \times 2{,}6 = 0{,}866$ m.s^{-1}

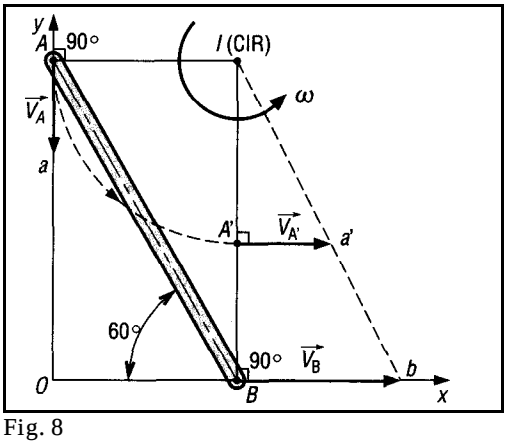


Fig. 8

Ordre des constructions graphiques : CIR(I) ; **A'** tel que $IA = IA'$; $\overrightarrow{V_{A'}}$ perpendiculaire à IA' et tel que $V_{A'} = V_A = 0{,}5$ m.s^{-1} ; droite la' ; extrémité ***b*** de $\overrightarrow{V_B}$; mesure de $\overrightarrow{V_B}$ à l'échelle choisie.

Exemple 2 : reprenons le système bielle manivelle avec les données du paragraphe II1 sauf θ = 18" et $V_{A2/0} = 3$ m.s^{-1}. Déterminons $\overrightarrow{V_{B2/0}}$ et $\overrightarrow{V_{G2/0}}$, G étant le centre de gravité de la bielle ($AG = AB/3$).

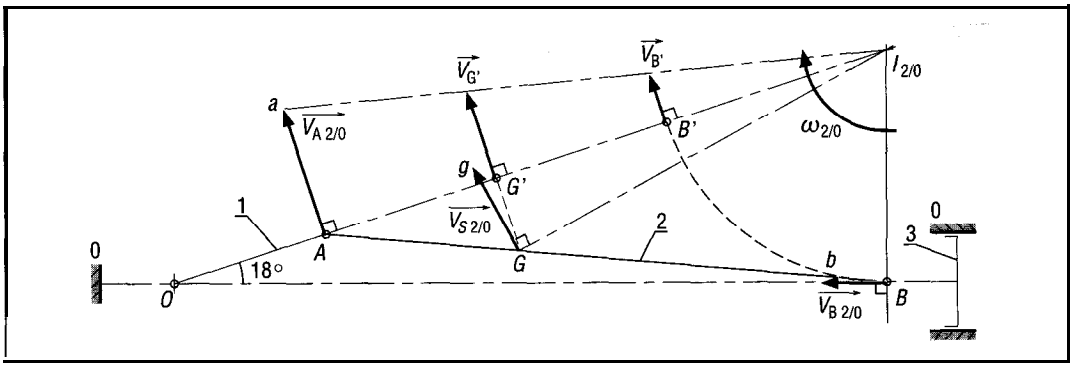


Fig. 9

$I_{2/0}$, CIR de la bielle 2 dan-in mouvement par rapport à 0, est situé à l'intersection des perpendiculaires en A à $V_{A2/0}$ (droite OA) et en B à $\vec{V}_{B2/0}$ de direction OB.
$\vec{V}_{G2/0}$ est perpendiculaire en G au rayon $I_{2/0}G$.

Ordre des constructions : CIR $I_{2/0}$; $I_{2/0}G$; Gg perpendiculaire à $I_{2/0}G$; $I_{2/0}G' = I_{2/0}G$; $I_{2/0}B' = I_{2/0}B$; $I_{2/0}a$; $\vec{V}_{G'}$ et $\vec{V}_{B'}$ perpendiculaires à $I_{2/0}A$; $V_{G2/0} = V_{G'} = 2{,}15\ \text{m.s}^{-1}$; $V_{B2/0} = V_{B'} = 1{,}15\ \text{m.s}^{-1}$; $\vec{V}_{G2/0} = \vec{Gg}$ et $\vec{V}_{B2/0} = \vec{Bb}$.

Remarque : le triangle des vitesses peut être remplacé par le calcul :

$$\frac{V_{A\,2/0}}{I_{2/0}A} = \frac{V_{B\,2/0}}{I_{2/0}B} = \frac{V_{G\,2/0}}{I_{2/0}G} = \omega_{2/0} = \frac{3\ \text{m.s}^{-1}}{0{,}135\ \text{m}} = 22{,}2\ \text{rad.s}^{-1}$$

$I_{2/0}A$, $I_{2/0}B$ et $I_{2/0}G$ sont mesurées à l'échelle de la figure (en vraie grandeur).

3. Propriétés des CIR

Pour trois solides 1, 2 et 3 en mouvements plans les uns par rapport aux autres, les trois centres instantanés de rotation possibles, $I_{1/2}, I_{1/3}$ et $I_{2/3}$ sont alignés. De plus, le rapport des vitesses de rotation $\omega_{3/1}$ sur $\omega_{2/1}$ est égal au rapport des distances entre CIR.

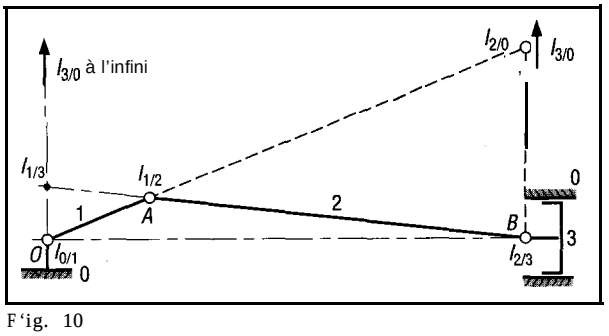
$$\frac{\omega_{3/1}}{I_{3/2}I_{2/1}} = \frac{\omega_{3/2}}{I_{3/1}I_{1/2}} = \frac{\omega_{2/1}}{I_{2/3}I_{3/1}}$$

Exemple : reprenons le système bielle manivelle du paragraphe précédent.

$I_{0/1}$, $I_{1/2}$ et $I_{2/0}$ sont alignés sur OA ; $I_{1/3}$, $I_{1/2}$ et $I_{2/3}$ sont alignés sur AB ; $I_{2/3}$, $I_{2/0}$ et $I_{3/0}$ (situé à l'infini) sont alignés sur la perpendiculaire en B à OB.

Même remarque pour $I_{0/1}$, $I_{1/3}$ et $I_{3/0}$.

$$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{I_{2/1}\ I_{1/0}}{I_{1/2}I_{2/0}} = \frac{OA}{I_{2/0}A}$$



F'ig. 10

Remarque : l'utilisation des CIR offre de multiples possibilités dont la description sort du cadre de cet ouvrage.

4. Notion de base et de roulante

Soit un solide 1 en mouvement plan par rapport à un solide 0, $I_{1/0}$ est le CIR correspondant.

- On appelle base la trajectoire de $I_{1/0}$ par rapport au solide 0.
- On appelle roulante la trajectoire de $I_{1/0}$ par rapport au solide 1.

Propriété : la roulante est une courbe géométrique qui roule sans glisser sur la base au cours du mouvement.

Exemple : Reprenons l'exemple de l'échelle.

$I_{1/0}$ est situé à l'intersection des perpendiculaires en A à (0, y) et en B à (0, x).
L'angle $AI_{1/0}B$ est toujours égal à 90".
La trajectoire de $I_{1/0}$ par rapport à (0) ou base est le quart de cercle de centre 0 et de rayon R = AB.

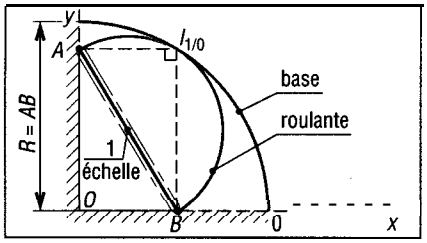


Fig. 11

La trajectoire de $I_{1/0}$ par rapport à l'échelle (1) ou roulante est le demi-cercle de diamètre AB. Ce demi-cercle roule sans glisser en $I_{1/0}$ sur la base.

IV • Relation vectorielle entre les vitesses d'un solide

La relation entre $\overrightarrow{V_B}$ et $\overrightarrow{V_A}$ traduit la propriété du paragraphe I : mouvement plan = translation + rotation.
$\overrightarrow{V_A}$ et $\overrightarrow{V_B}$ sont tangents en A et B à leurs trajectoires respectives T_A et T_B

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Remarque : la relation est également valable dans l'espace.

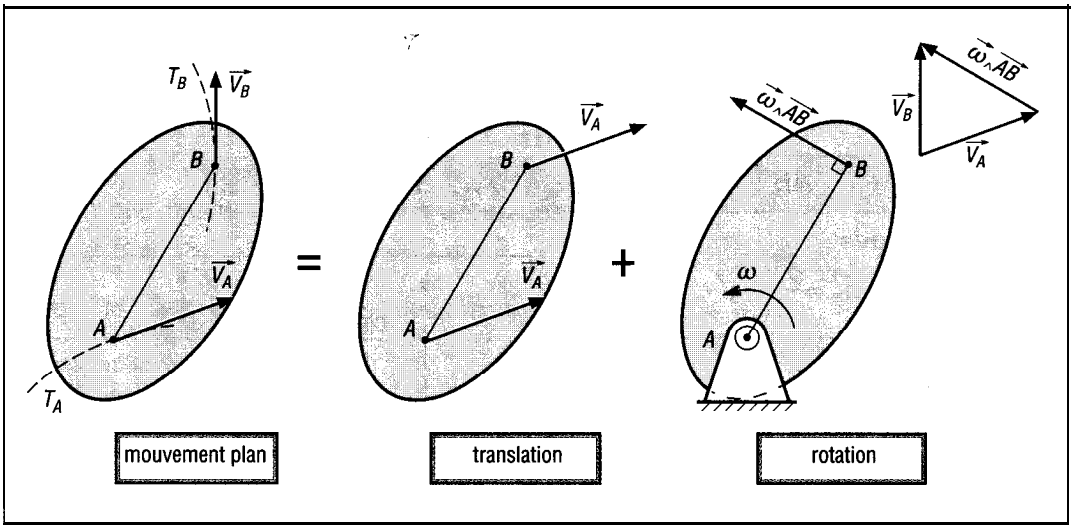


Fig. 12

Remarque : si (0, x, y) est le plan du mouvement, $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}$.
Si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire de la direction AB : $\overrightarrow{AB} = AB \cdot \vec{u}$. Soit $\vec{v}$, un vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\vec{u}$, en remarquant que $\vec{k} \wedge \vec{u} = \vec{v}$, la relation s'écrit :

$$\boxed{\vec{V_B} = \vec{V_A} + \omega \cdot AB\,\vec{v}}$$

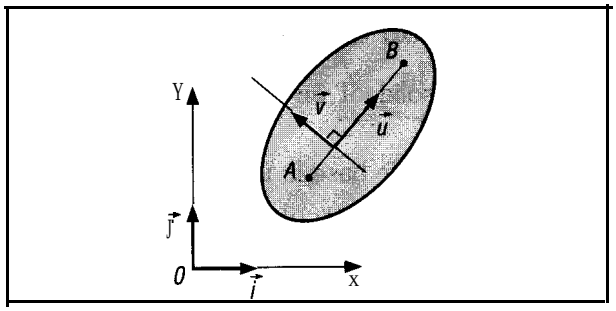


Fig. 13

Exemple : reprenons l'échelle du paragraphe 1 avec AB = 3 m ; $\vec{V_A} = -0,5\,\vec{j}$ (m.s^{-1}) ; θ = 60°. Déterminons V' et $\vec{\omega}$.

a) Coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans (x, y)

$\vec{u}$ = cos 60° $\vec{i}$ − sin 60° $\vec{j}$
= 0,5 $\vec{i}$ − 0,866 $\vec{j}$
$\vec{v}$ = sin 60° $\vec{i}$ + cos 60° $\vec{j}$
= 0,866 $\vec{i}$ + 0,5 $\vec{j}$

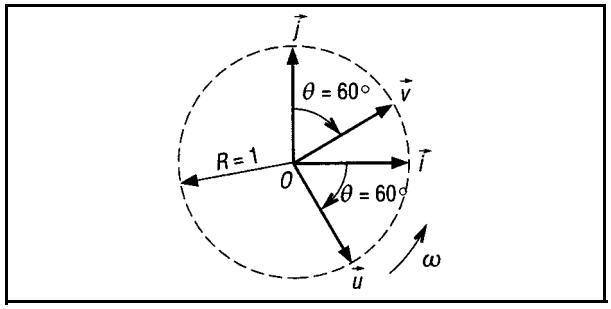


Fig. 14

b) Vitesses

$\vec{V_B} = \vec{V_A} + \omega\,AB \cdot \vec{v}$
$V_B \cdot \vec{i} = -0,5\,\vec{j} + 3\,\omega\,(0,866\,\vec{i} + 0,5\,\vec{j})$
Projection sur (0, x) :
$V_B = 3\omega$ x 0,866
Projection sur (0, y) :
$0 = -0,5 + 3\omega$ x 0,5

Résultats

V_B = 0,866 m.s^{-1} ; ω = 0,33 rad.s^{-1}

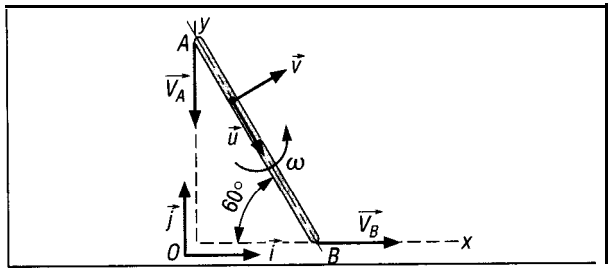


Fig. 15

V- Relation vectorielle entre les accélérations d'un solide

La relation est obtenue en dérivant par rapport au temps celle du paragraphe précédent : $\vec{V_B} = \vec{V_A} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{V_A} + \omega \cdot AB\,\vec{v}$.
En remarquant que $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega\vec{u}$ et $\frac{d\vec{u}}{dt} = \omega \cdot \vec{v}$ on obtient :

$$\boxed{\vec{a_B} = \vec{a_A} + \alpha \cdot AB\,\vec{v} - \omega^2\,AB\,\vec{u} = \vec{a_A} + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB})}$$

Remarques

$\vec{a_B} = \frac{d\vec{V_B}}{dt}$; $\vec{a_A} = \frac{d\vec{V_A}}{dt}$;
$\vec{\alpha} = \alpha\,\vec{k}$; $\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}$.
($a\,AB\,\vec{v} - \omega^2\,AB\,\vec{u}$) est l'accélération de B dans son mouvement de rotation par rapport à A.
$a\,AB\,\vec{v}$ est l'accélération tangentielle et $-\omega^2\,AB\,\vec{u}$ l'accélération normale.

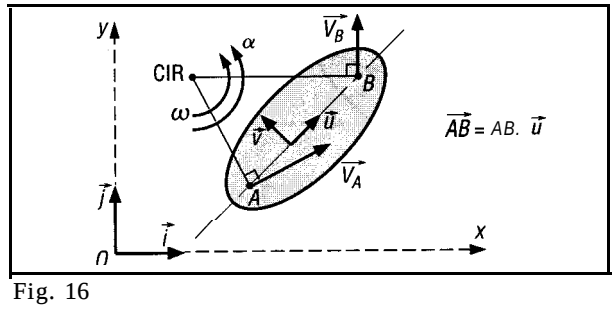


Fig. 16

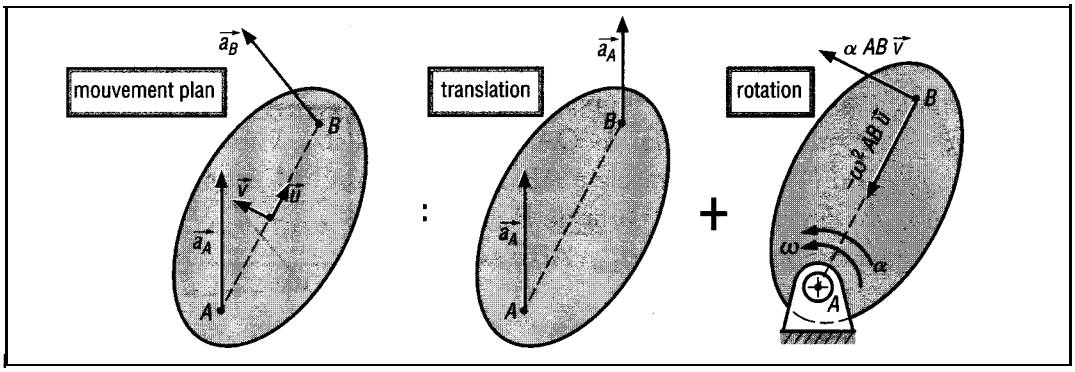


Fig. 17

Le polygone des accélérations
$(\vec{a_B} = \vec{a_A} + \alpha\ AB\ \vec{v} - \omega^2\ AB\ \vec{u})$
permet d'obtenir graphiquement
les accélérations inconnues (fig. 18).

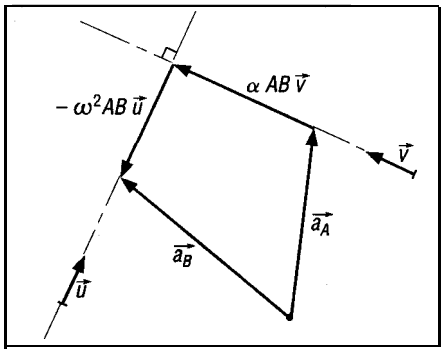


Fig. 18

Exemple : reprenons le système bielle manivelle des paragraphes précédents avec les données suivantes : θ = 45" ; $\omega_{1/0}$ = 100 rad.s^{-1} ;
$V_{A2/0}$ = 3,5 m.s^{-1} ; $V_{B2/0}$ = 2,95 m.s^{-1} ;
$\omega_{2/0}$ = − 18,75 rad.s^{-1} ; OA = 35 ;
AB = 128 mm.
Déterminons l'accélération du point B du piston.

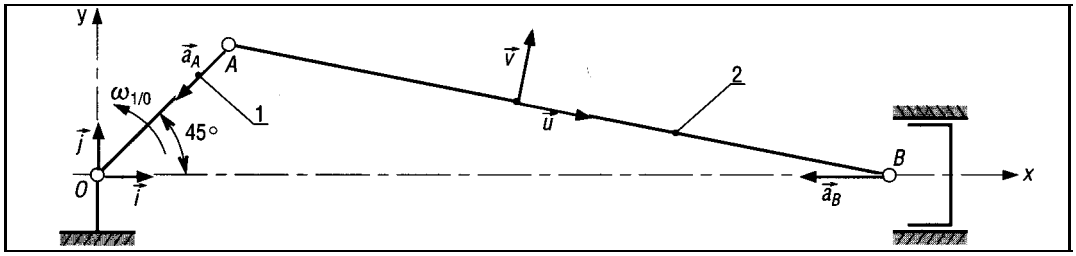


Fig. 19

$\vec{a_A} = \vec{a_{A1/0}} = \vec{a_{A2/0}}$ $\qquad$ $\vec{a_B} = \vec{a_{B2/0}} = \vec{a_{B3/0}}$

La bielle (2) est en mouvement plan par rapport au bâti (0) et les accélérations des points A et B sont liées par la relation :

$\vec{a_{B2/0}} = \vec{a_{A2/0}} + \alpha_{2/0}\ .\ AB\ \vec{v} - \omega_{2/0}^2\ AB\ \vec{u}$

$a_{A1/0} = \omega_{1/0}^2\ .\ OA$ = 100² × 0,035 = 350 m.s^{-2}
$\vec{a_{B3/0}}$ a pour direction OB (3 est en translation rectiligne)
$\omega_{2/0}^2\ .\ AB$ = 18,75² x 0,128 = 45 m.s^{-2}

Faisons le bilan des inconnues sous forme de tableau :

Accélérations	$\vec{a_{A2/0}}$	$-\omega_{2/0}^2\ AB\ \vec{u}$	$\alpha_{2/0}\ AB\ \vec{v}$	$\vec{a_{B2/0}}$
Directions	OA	ii	$\vec{v}$	OB
Intensités	350 m.s^{-2}	45 m.s^{-2}	?	?

On a deux inconnues ($\alpha_{2/0}$ et l'intensité de $\vec{a_{B2/0}}$) pour une relation vectorielle dans le plan. La résolution est possible. Adoptons une solution graphique.

Ordre des constructions : choisir une échelle pour tracer les accélérations (exemple : 1 cm pour 50 $m.s^{-2}$) ; point P ; $\overrightarrow{a_{A2/0}}$ (350 $m.s^{-2}$ parallèle à OA) ; $-\omega_{2/0}{}^2$. AB $\vec{u}$ (45 $m.s^{-2}$ parallèle à AB) ; direction $\vec{v}$; direction OB à partir de P ; point d'intersection k ; $\overrightarrow{a_{B2/0}}$ et $\alpha_{2/0}$. AB $\vec{v}$; mesure des intensités cherchées.

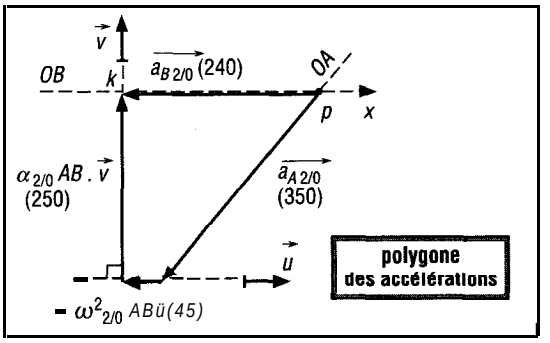


Fig. 20

Résultats

$a_{B2/0}$ = 240 $m.s^{-2}$;

$\alpha_{2/0}$ AB = 250 $m.s^{-2}$;

$\alpha_{2/0} \dfrac{250}{= 0{,}128}$ = 1 953 $rad.s^{-2}$

EXERCICES À RÉSOUDRE

❑ Le skieur proposé, tracté en A par un bateau (AB = 10 m), fait du slalom entre des bouées suivant la trajectoire indiquée. Le câble est parfaitement tendu, la vitesse du bateau est de 50 $km.h^{-1}$. **a)** Déterminer la vitesse du skieur en B. **b)** Déterminer cette vitesse en C.

Réponse

V_B = 57,7 $km.h^{-1}$; V_B (en C) = 50 $km.h^{-1}$.

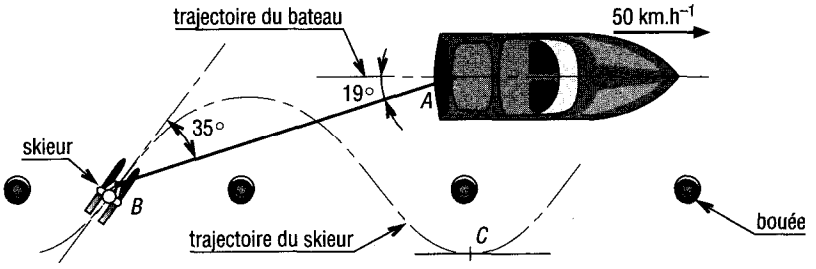


Fig. 21

2 L'ellipsographe décrit sous forme simplifié permet de tracer des ellipses. Il se compose d'une barre porte-plume 2 (plume en M) articulée en A et B sur deux coulisses 1 et 3 pouvant translater dans deux rainures perpendiculaires d'axes x et y. **a)** Déterminer l'équation de l'ellipse. **b)** Si $\overrightarrow{V_{A1/0}} = 3\ \vec{i}$ (cm.s^{-1}), déterminer $V_{B2/0}$ et $\overrightarrow{V_{M2/0}}$ lorsque θ = 55".

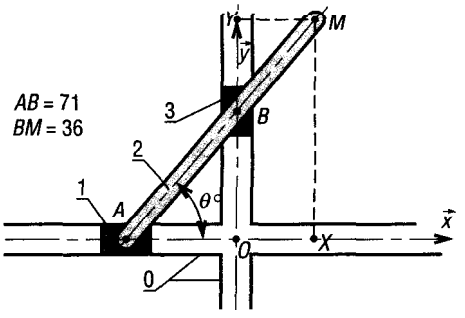


Fig. 22

Réponse

$\frac{x^2}{36^2} + \frac{y^2}{107^2} = 1$; $V_B = \frac{V_A}{\tan\theta} = 2{,}1$ cm.s^{-1} ; $\overrightarrow{V_M} = -1{,}52\,\vec{i} + 3{,}17\,\vec{j}$

3 Une automobile (1) roule à la vitesse stabilisée de 90 $km.h^{-1}$ par rapport à la route (0). a) Déterminer le centre instantané de rotation $I_{2/0}$ de la roue (2) par rapport à la route. b) En déduire $\overrightarrow{V_{A2/0}}$, $\overrightarrow{V_{O2/0}}$, $\overrightarrow{V_{B2/0}}$, $V_{C2/0}$, $V_{D2/0}$, $\omega_{2/1}$ et $\omega_{2/0}$.

Réponse

$I_{2/0} \equiv A$; $\overrightarrow{V_{A2/0}} = \vec{0}$; $\overrightarrow{V_{O2/0}} = 90\,\vec{i}$; $\overrightarrow{V_{B2/0}} = 180\,\vec{i}$;
$\overrightarrow{V_{C2/0}} = 90\,\vec{i} + 90\,\vec{j}$; $\overrightarrow{V_{D2/0}} = 90\,\vec{i} - 90\,\vec{j}$;
$\omega_{2/1} = \omega_{2/0} = 83{,}3$ rad.s^{-1}

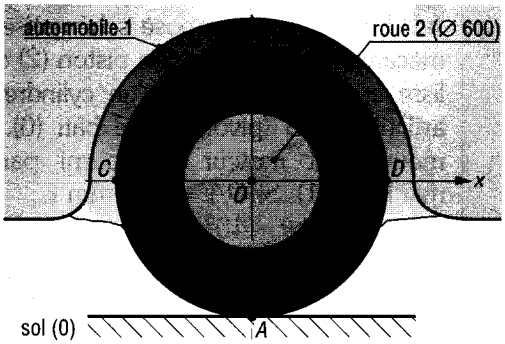


Fig. 23

❑ Pour le système bielle (2), manivelle (1), piston (3), proposé sous forme schématique, déterminer la vitesse du piston $(\overrightarrow{V_{B3/0}})$ et la vitesse angulaire de la bielle $(\omega_{2/0})$. Données : $N_{1/0} = 2\,000$ tr.min^{-1} ; $OA = 30$ mm ; $AB = 80$; $\theta = 40°$.

Réponse

$\overrightarrow{V_{B3/0}} = 5{,}23\,\vec{i}$ (m.s^{-1}) ; $\omega_{2/0} = 62$ rad.s^{-1}.

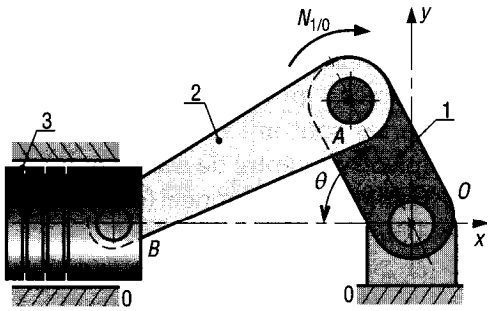


Fig. 24

❑ Reprendre l'exercice 4, déterminer l'accélération du piston $(\overrightarrow{a_{B3/0}})$ et l'accélération angulaire de la bielle $\alpha_{2/0}$.

Réponse

$a_{B3/0} = 1\,115\,\vec{i}$ (m.s^{-2}) ; $\alpha_{2/0} = -9\,940$ rad.s^{-2}.

❑ Reprendre l'exercice 4 avec $N_{1/0} = 750$ tr.min^{-1} ; $OA = 76{,}2$ mm ; AB = 254 mm ; pour les positions $\theta = 0°$, $\theta = 60°$, $\theta = 90°$ et $\theta = 180°$.

❑ Un système bielle manivelle déporté entraîne en B une bague coulissante (3) guidée en translation par une tige (4) fixée sur le bâti (0). Les liaisons en 0, A et B sont des liaisons pivots de centre de même nom. Si $\omega_{1/0} = 50$ rad.s^{-1} ; $OA = 200$ mm ; $AB = 500$; $\theta = 45°$ et $\gamma = 53{,}1°$, déterminer $\overrightarrow{V_{B3/0}}$ et $\omega_{2/0}$.

Réponse

Rép. $V_{B3/0} = 16{,}5$ m.s^{-1} $\omega_{2/0} = 23{,}6$ rad.s^{-1}.

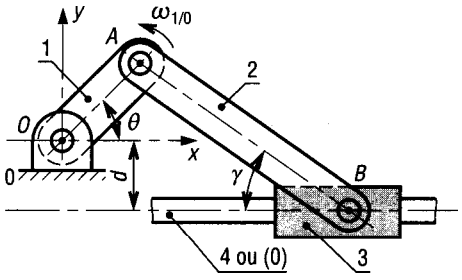


Fig. 25

❑ Reprendre l'exercice 7, déterminer l'accélération $\overrightarrow{a_{B3/0}}$ de la bague et l'accélération angulaire $\alpha_{2/0}$ de la bielle.

❑ Ledtspositif proposé schématise un mécanisme de pompe. Le piston (2) coulisse en translation dans un cylindre (3) articulé en B (pivot) sur le bâti (0). Le mouvement moteur est fourni par la manivelle (1). Si OA = 100 mm ;
OB = 200 ; θ = 40" et $\omega_{1/0}$ = 30 rad.s^{-1}, déterminer $\overrightarrow{V_{B2/0}}$, $\omega_{2/0}$ et $\omega_{3/0}$.

Réponse

$\omega_{2/0} = \omega_{3/0} = 8{,}25$ rad.s^{-1} ; $\overrightarrow{V_{B2/0}} = \overrightarrow{V_{B2/3}}$ (direction AB).

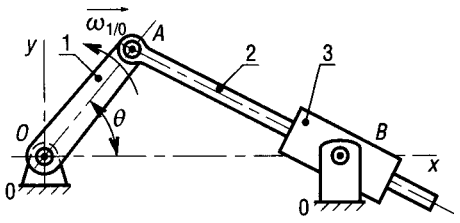


Fig. 26

❑ Le système 4 barres proposé (OA, AB, BC et CO le bâti) sert de principe à de multiples mécanismes : pompes, presses, grues, suspensions, etc. Les barres sont articulées en 0, A, B et C (pivots de centre de même nom). Pour la configuration donnée (θ = 45", $\omega_{1/0}$ = 100 rad.s^{-1}), déterminer $\overrightarrow{V_{A1/0}}$, $\overrightarrow{V_{B2/0}}$, $\omega_{2/0}$ et $\omega_{3/0}$.

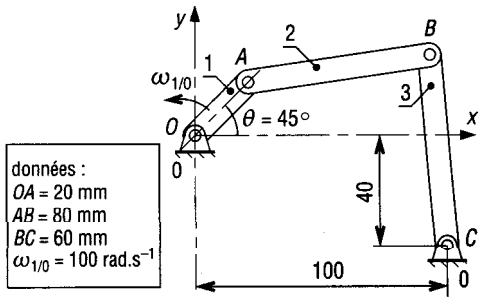


Fig. 27

❑ Reprendre l'exercice 10 ; $\omega_{2/0}$ = − 20 rad.s^{-1}, $\omega_{3/0}$ = 22 rad.s^{-1}, déterminer les accélérations $\overrightarrow{a_{A1/0}}$ et $\overrightarrow{a_{B2/0}}$ des points A et B ainsi que les accélérations angulaires $\alpha_{2/0}$ et $\alpha_{3/0}$.

Réponse

$\alpha_{2/0}$ = 1 250 rad.s^{-2} ; $\alpha_{3/0}$ = 3 166 rad.s^{-2} ; a_A = 200 m.s^{-2} ;
a_{nB} = 29 m.s^{-2} (B *vers* C) ; a_{tB} = 190 m.s^{-2} (perpendiculaire à BC).

❑ Reprendre l'exercice 10 avec la configuration proposée.
Déterminer $\overrightarrow{V_{B1/0}}$, $\overrightarrow{V_{C2/0}}$, $\omega_{2/0}$ et $\omega_{3/0}$ si $\omega_{1/0}$ = 30 rad.s^{-1}.

Réponse

$\omega_{2/0}$ = 15 rad.s^{-1} $\omega_{3/0}$ = 37,5 rad.s^{-1} ;
$\overrightarrow{V_{B1/0}} = 3\ \vec{j}$ (m.s^{-1}) ;
$\overrightarrow{V_{C3/0}} = -2{,}25\ \vec{i} + 3\ \vec{j}$.

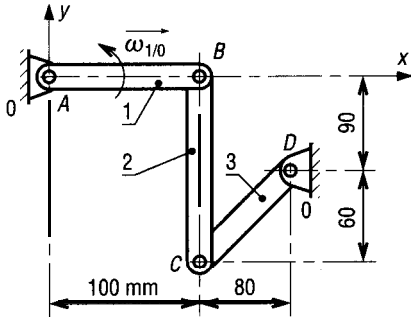


Fig. 28

m Un mécanisme de caméra se compose d'une manivelle 1 (forme en excentrique) entraînée en 0 par le moteur de l'appareil et d'une griffe 2 articulée en B (pivot) sur 1. La griffe est guidée en A par un axe 3 fixé sur le bâti 0. En mouvement, la pointe C de la griffe s'engage dans les perforations du film et le fait avancer d'une image à la cadence de 24 images par seconde. Le dispositif occupe la position de la figure ; 0, A et B sont les centres géométriques des liaisons. a) Sachant que la manivelle 1 tourne à la vitesse $N_{1/0}$ = 1 440 tr.min^{-1}, déterminer $\overrightarrow{V_{B1/0}}$. Comparer $\overrightarrow{V_{B2/0}}$ et $\overrightarrow{V_{B1/0}}$. b) Connaissant $\overrightarrow{V_{B2/0}}$ et si la direction de $\overrightarrow{V_{A2/0}}$ est celle du trou oblong (AZ à 45°), déterminer $\overrightarrow{V_{A2/0}}$, $\overrightarrow{V_{C2/0}}$ et $\omega_{2/0}$.

❑ (suite)

OB	= 7 mm
x_C	= 25,2
y_C	= 7,4
x_A	= – 24,6
y_A	= – 4,7
x_I	= – 19,9

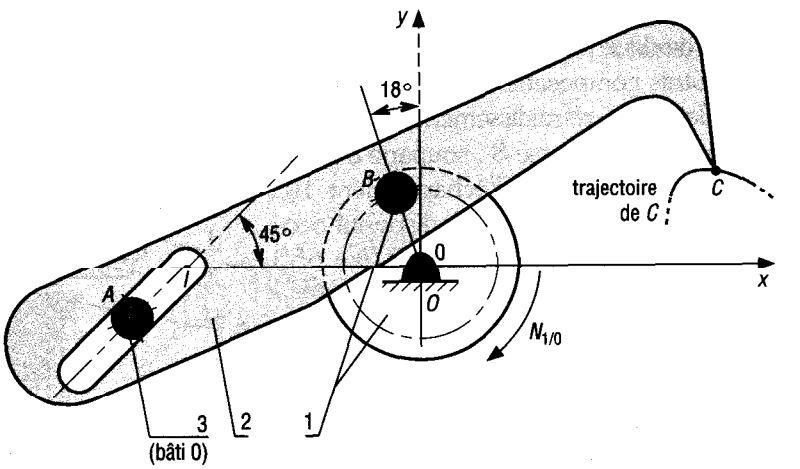


Fig. 29

14 La pompe à pétrole proposée sous forme simplifiée est utilisée lorsque la pression des nappes est insuffisante pour l'extraction. Sa forme particulière justifie son appellation "tête de cheval". Le mouvement moteur est fourni en A à la manivelle 1 par un motoréducteur et se transmet en B à une bielle 2 puis en C à la tête de cheval 3. La tête 3, articulée en D sur une structure fie (0), entraîne un câble 4 fié en N et enroulé sur l'arc NE. Le câble fournit le mouvement de va-et-vient à un piston coulissant dans le cylindre 5, créant ainsi l'aspiration du pétrole. Les liaisons en A, B, C et D sont des liaisons pivots de centre de même nom. L'articulation B est réglable dans une rainure oblongue, ce qui permet d'ajuster le débit de la pompe en fonction des capacités de la nappe. La pompe occupe la position de la figure (θ = 60° ; $N_{1/0}$ = 15 tr.min^{-1}). a) Nature du mouvement $M^{vt}_{1/0}$. Déterminer $\overrightarrow{V_{B1/0}}$. Comparer $\overrightarrow{V_{B1/0}}$ et $\overrightarrow{V_{B2/0}}$. **b)** Nature du mouvement $M^{vt}_{3/0}$. En déduire les directions de $\overrightarrow{V_{C3/0}}$ et $\overrightarrow{V_{E3/0}}$. Comparer $\overrightarrow{V_{C3/0}}$ et $\overrightarrow{V_{C2/0}}$ puis $\overrightarrow{V_{E3/0}}$ et $\overrightarrow{V_{E4/0}}$. c) Nature du mouvement $M^{vt}_{2/0}$. Connaissant $\overrightarrow{V_{B2/0}}$, déterminer $\overrightarrow{V_{C2/0}}$ et $\omega_{2/0}$. **d)** En déduire $\overrightarrow{V_{E4/0}}$, $\omega_{3/0}$ et le débit instantané de la pompe si le diamètre du piston est de 100 mm. e) Déterminer la course du piston, en déduire le débit par aller et retour, puis le débit horaire.

AB	= 570
BC	= 2 620
CD	= 2 300
DE	= 3 400
$N_{1/0}$	= 15 tr.min^{-1}

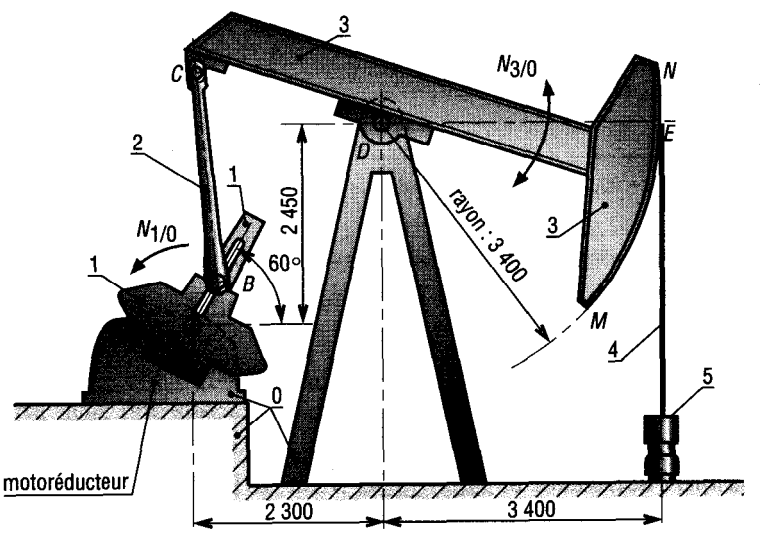


Fig. 30

❑ Un embiellage de moto dispose en Vé à 90" se compose d'une manivelle ou vilebrequin 1, de deux bielles 2 et 3 et de deux pistons 5 et 5'.

Autres composants : axe de piston 4 ; ailettes de refroidissement 6 ; joint de culasse 7 ; culasse 8 ; soupape d'admission 9 ; soupape d'échappement 10 ; chemise 11 ; bloc 0. Le dispositif occupe la position de la figure 20 ($\theta = 65°$), G est le centre de gravité de la bielle 2 ($BG = BC/3$). a) Nature du mouvement $M^{vt}_{1/0}$. Déterminer $\overrightarrow{V_{B1/0}}$. Comparer $\overrightarrow{V_{B1/0}}$, $\overrightarrow{V_{B2/0}}$ et $\overrightarrow{V_{B3/0}}$. **b)** Nature des mouvements $M^{vt}_{5/0}$ et $M^{vt}_{5'/0}$. En déduire les directions de $\overrightarrow{V_{C5/0}}$ et $\overrightarrow{V_{D5'/0}}$. Comparer $\overrightarrow{V_{C5/0}}$ et $\overrightarrow{V_{C2/0}}$ puis $\overrightarrow{V_{D5'/0}}$ et $\overrightarrow{V_{D3/0}}$. **c)** Nature des mouvements $M^{vt}_{2/0}$ et $M^{vt}_{3/0}$. Connaissant $\overrightarrow{V_{B2/0}}$, déterminer $\overrightarrow{V_{C2/0}}$, $\overrightarrow{V_{G2/0}}$ et $\omega_{2/0}$ puis $\overrightarrow{V_{D3/0}}$ et $\omega_{3/0}$. d) La pression des gaz sur le piston 5 est de 20 bars, déterminer la puissance instantanée P fournie ($P = F \cdot V_C$ avec P en W ; F en N ; V_C en $m.s^{-1}$).

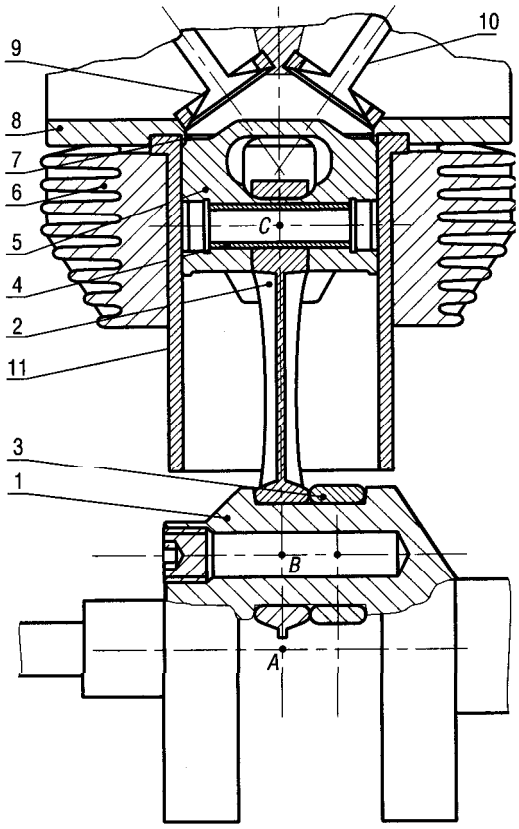
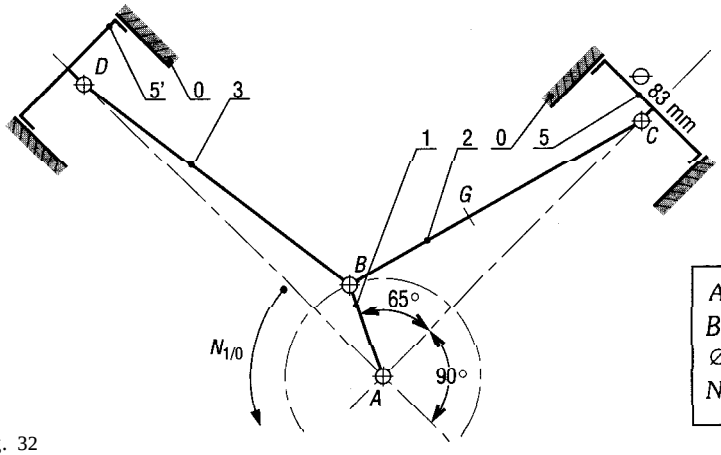


Fig. 31



$AB = 39$
$BC = BD = 140$
Ø alésage = 83
$N_{1/0} = 5\ 000$ tr.min^{-1}

Fig. 32

Réponse

$V_{C5/0} = 20{,}76$ m.s^{-1} ; $V_{D5'/0} = 10{,}82$ m.s^{-1} ; $\omega_{2/0} = 63{,}7$ rad.s^{-1} ; $\omega_{3/0} = 133$ rad.s^{-1}, $P = 225$ kW.

❑ Reprendre l'exercice 15 ; déterminer les accélérations $\overrightarrow{a_{C5/0}}$; $\overrightarrow{a_{D5'/0}}$; $\alpha_{2/0}$ ♏ ♦ $\alpha_{3/0}$ ($N_{1/0}$ est constante).

Réponse

$a_{C5/0} = 2\ 577$ m.s^{-2} ; $a_{D5'/0} = 11\ 653$ m.s^{-2} ;
$\alpha_{2/0} = 70\ 475$ rad.s^{-2} ; $\alpha_{3/0} = 30\ 400$ rad.s^{-2}

17 Une suspension de moto reprend le principe du système 4 barres (voir exercice 9). Elle se compose d'un bras oscillant 1 (forme tubulaire) articulé en A sur le châssis (0) et en B sur le carter d'angle 3. La biellette 2 assure le maintien en D du carter. Le guidage en rotation de la roue est réalisé en E (pivot à roulements) sur le carter et l'amortissement en F par un amortisseur 4.

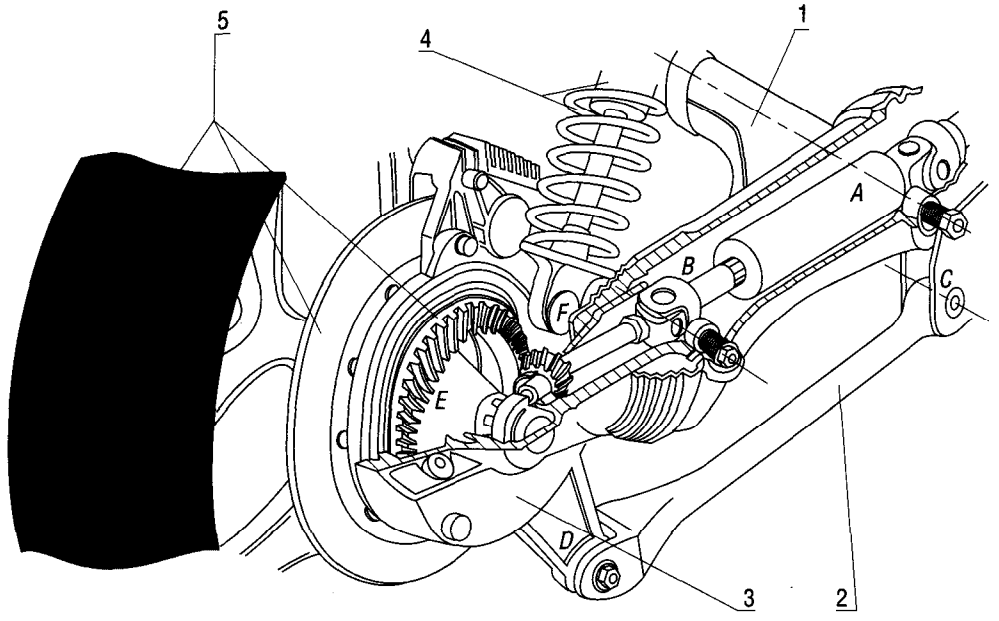


Fig. 33

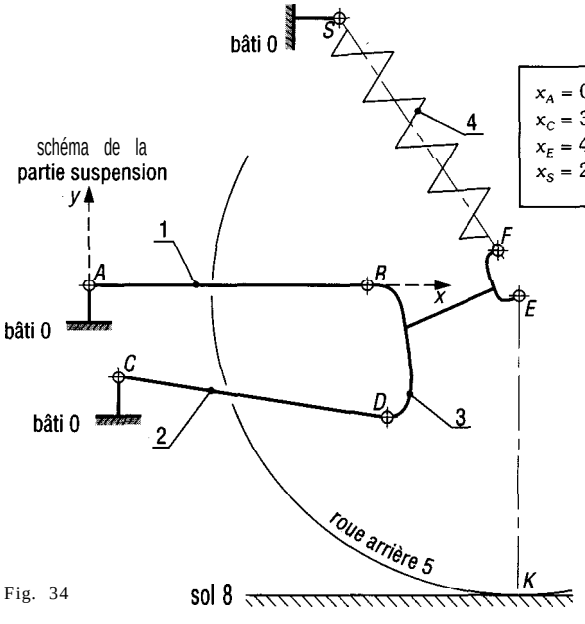


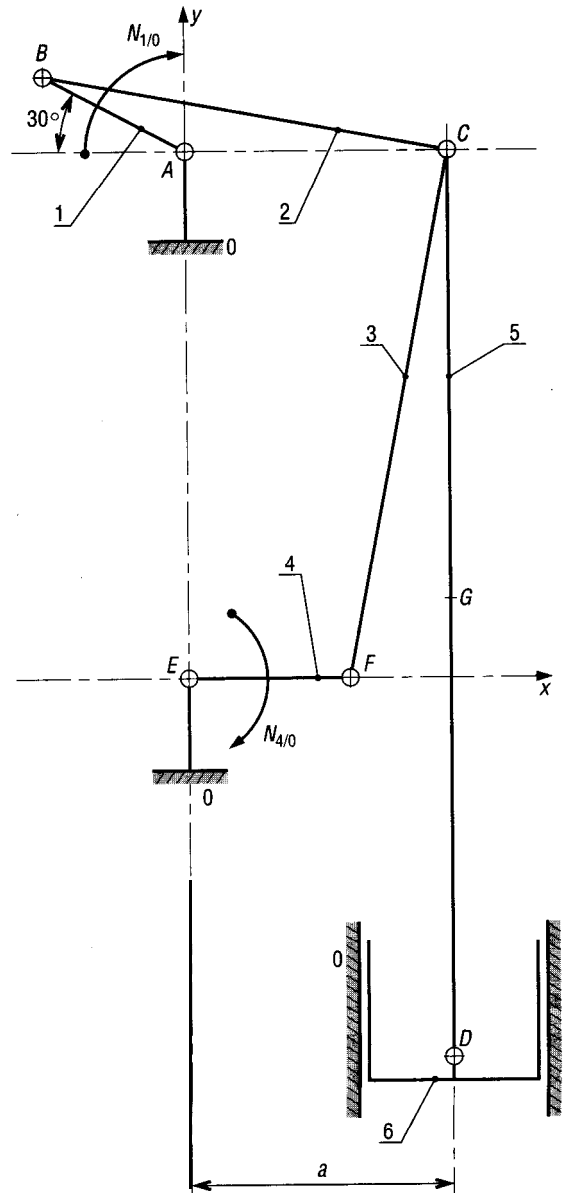
Fig. 34

$x_A = 0$	$y_A = 0$	$x_B = 300$	$y_B = 0$
$x_C = 30$	$y_C = -102$	$x_D = 325$	$y_D = -152$
$x_E = 468$	$y_E = -16$	$x_F = 447$	$y_F = 37$
$x_S = 270$	$y_S = 306$	$x_K = 468$	$y_K = -346$

$AB = 300$	$CD = 300$
$AC = 106$	$BF = 151$
$BD = 154$	$FE = 57$
$BE = 169$	$EK = 330$
$DE = 197$	$AS = 408$

Les liaisons en A, B, C, D, E, F et S sont des liaisons pivots dont les centres de même nom sont supposés appartenir au plan de la figure 27. Le dispositif occupe la position de cette figure : a) Nature des mouvements : $M^{vt}_{1/0}$, $M^{vt}_{2/0}$, $M^{vt}_{5/3}$, $M^{vt}_{3/0}$ et $M^{vt}_{5/0}$. Déterminer et tracer les trajectoires $T_{B1/0}$, $T_{D2/0}$, $T_{E3/0}$ et $T_{F3/0}$. b) Quelle est la particularité de T_E ? Comparer avec une suspension classique. c) Sachant que $V_{E3/0}$ a une intensité de 10 $cm.s^{-1}$, déterminer successivement : $\overrightarrow{V_{B3/0}}$, $\overrightarrow{V_{D3/0}}$ et $\overrightarrow{V_{F3/0}}$. d) Si l'effort de compression de l'amortisseur est de 150 daN, déterminer la puissance instantanée dissipée.

18 Le dispositif proposé sous forme schématique est une presse à deux excentriques utilisée en forgeage. Le système permet d'avoir un temps de pressage suffisamment long. L'énergie motrice est fournie par les excentriques AB (1) et EF (4) tournant à la vitesse de 6 rad.s^{-1}. Le mouvement se transmet en B et F à deux biellettes 2 et 3, puis en C à la bielle 5 qui actionne en D le coulisseau porte matrice 6 de la presse.
Les liaisons en A, B, C, D, E et F sont des liaisons pivots dont les centres portent le même nom. a) Sachant que $\omega_{1/0} = \omega_{4/0} = 6$ rad.s^{-1}, déterminer $\overrightarrow{V_{B1/0}}$ et $\overrightarrow{V_{F4/0}}$. Comnarer $\overrightarrow{V_{B1/0}}$ et $\overrightarrow{V_{B2/0}}$ puis $\overrightarrow{V_{F4/0}}$ et $\overrightarrow{V_{F3/0}}$.
b) Déterminer $\overrightarrow{V_{C5/0}}$ à partir de $\overrightarrow{V_{B2/0}}$ et $\overrightarrow{V_{F3/0}}$.
c) En déduire la vitesse du coulisseau $\overrightarrow{V_{D6/0}}$.
d) Tracer la trajectoire $T_{C5/0}$ du point C de la bielle.



Données :
AB = 495
EF = 495
AE = 1 695
a = 855
BC = 1 305
FC = 1 725
CD = 2 910
CG = *GD*

Fig. 35

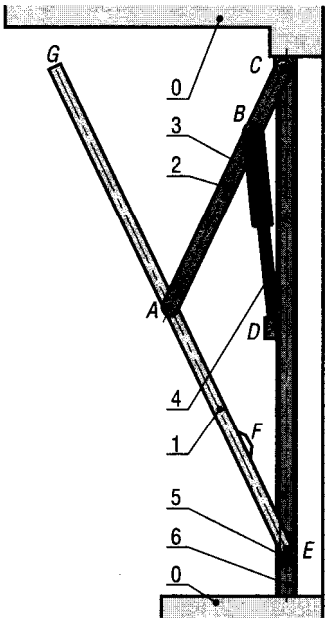
❑ Une porte de garage **basculante** se compose d'un panneau (1) articulé en A sur deux bras (2) disposés symétriquement et en E sur deux patins de guidage (5). Les patins translatent verticalement dans deux rails de guidage (6). Le mouvement de levage est facilité par deux équilibreurs à ressort (3 + 4). Les liaisons en A, B, C, D et E sont des liaisons pivots de centre de même nom. L'étude est réalisée dans le plan de symétrie du dispositif.

a) Déterminer les trajectoires $T_{G1/0}$, $T_{A1/0}$ et $T_{F1/0}$ des points G, A et F.

b) Tracer le centre instantané de rotation $I_{1/0}$ du panneau. En déduire les directions des vitesses en A, G et F.

c) Tracer la base et la roulante de $I_{1/0}$.

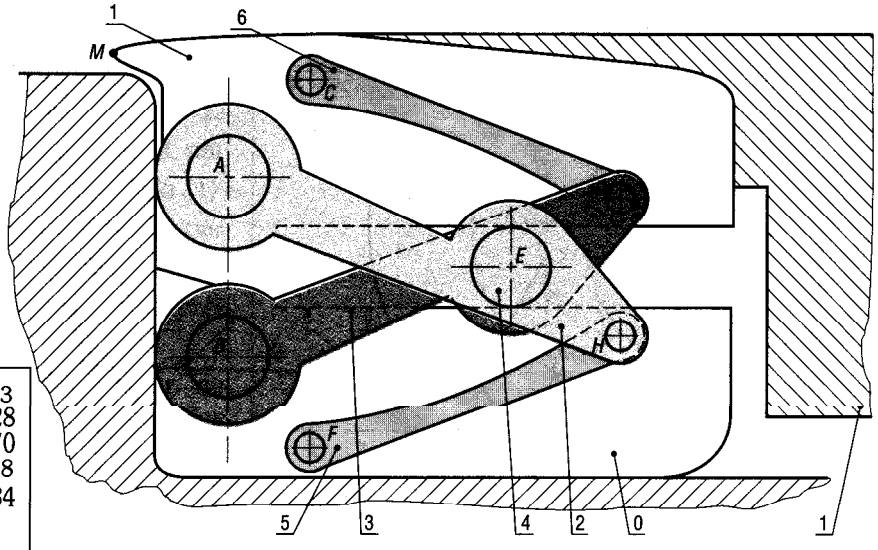
d) Tracer la courbe enveloppe du panneau, de la position ouverte à la position fermée.



$AE = AG = AC = 1\,200$ mm

Fig. 36

❑ Le mécanisme proposé remplace les charnières classiques sur les portières et les capots d'automobiles en permettant des angles d'ouverture plus importants, un meilleur dégagement et une immobilisation en position plus simple (pas de tige de soutien, etc.). Il se compose de deux leviers 2 et 3 articulés entre eux en E *(axe 4)* ; 3 est articulé en B sur l'automobile (0) et en D sur une biellette 6 ; 2 est articulé en A sur la portière 1 et en H sur une biellette 5 ; 6 et 5 sont articulées en C sur 1 et en F sur (0). Les liaisons en A, B, C, D, E, F et H sont des liaisons pivots de centre de même nom. Le dispositif occupe la position de la figure. En utilisant la propriété des trois centres instantanés de rotation alignés (paragraphe III3), déterminer les CIR $I_{3/0}$, $I_{2/1}$ et $I_{1/0}$. En déduire les directions de $\overrightarrow{V_{A1/0}}$, $\overrightarrow{V_{M1/0}}$, $\overrightarrow{V_{C1/0}}$ et $\overrightarrow{V_{D1/0}}$.



$BE = AE = 43$
$ED = EH = 28$
$FH = CD = 70$
$BF = AC = 28$
$AD = BH = 84$
$AB = 36$
$DH = 30$

Fig. 37

❑ La presse à genouillère proposée est utilisée pour fabriquer des pièces de monnaie, circlips, rondelles, couteaux, armes etc. Le principe de la genouillère, mélange de système 4 barres (0 - 1 - 2 - 3) et de système bielle manivelle (3 - 4 - 5), permet d'avoir des presses compactes de hauteur réduite. La partie transmission se compose d'un moteur 6, d'une poulie motrice 7, de courroies 8, d'une poulie réceptrice 9, d'un engrenage (pignon 10 + roue 11) entraînant en 0 un arbre excentré 1 ou OA. La partie genouillère se compose de l'arbre OA entraînant en A une bielle 2 (AB), les biellettes 3 (BC) et 4 (BD) renvoient le mouvement en D au coulisseau 5. Le coulisseau est en translation verticale (direction DC) par rapport au bâti (0). Les liaisons en 0, A, B, C et D sont des liaisons pivots de centre de même nom. Le dispositif occupe la position de la figure 30.

a) Nature du mouvement $M^{vt}_{1/0}$. Si $\omega_{1/0}$ = 6 rad.s^{-1}, déterminer $\overrightarrow{V_{A1/0}}$. Comparer $\overrightarrow{V_{A1/0}}$ et $\overrightarrow{V_{A2/0}}$. b) Nature des mouvements $M^{vt}_{3/0}$, $M^{vt}_{5/0}$. En déduire les directions de $\overrightarrow{V_{B3/0}}$ et $\overrightarrow{V_{D5/0}}$. Comparer $\overrightarrow{V_{B2/0}}$, $\overrightarrow{V_{B3/0}}$ et $\overrightarrow{V_{B4/0}}$ puis $\overrightarrow{V_{D5/0}}$ et $\overrightarrow{V_{D4/0}}$. c) Nature du mouvement $M^{vt}_{2/0}$. Connaissant $\overrightarrow{V_{A2/0}}$, déterminer $\overrightarrow{V_{B2/0}}$, $\overrightarrow{V_{G2/0}}$ (BA = 2BG) et $\omega_{2/0}$. d) Nature du mouvement $M^{vt}_{4/0}$. Connaissant $\overrightarrow{V_{B4/0}}$, déterminer $\overrightarrow{V_{D4/0}}$ et $\omega_{4/0}$. Comparer $\omega_{4/0}$ et $\omega_{3/0}$. e) Déterminer les accélérations $\overrightarrow{a_{A1/0}}$; $\overrightarrow{a_{B2/0}}$; $\overrightarrow{a_{D5/0}}$; $\alpha_{2/0}$; $\alpha_{3/0}$; $\alpha_{4/0}$.

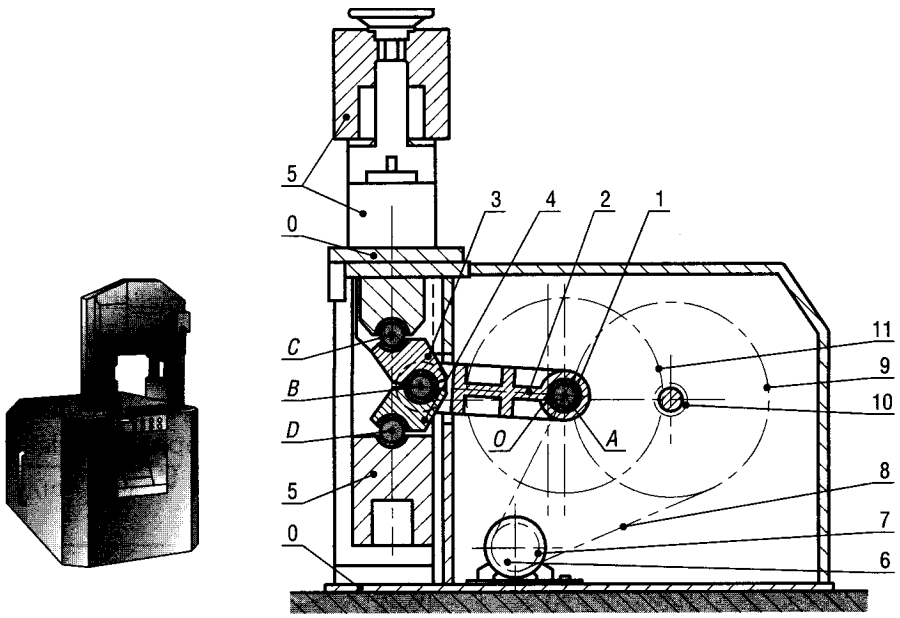


Fig. 38

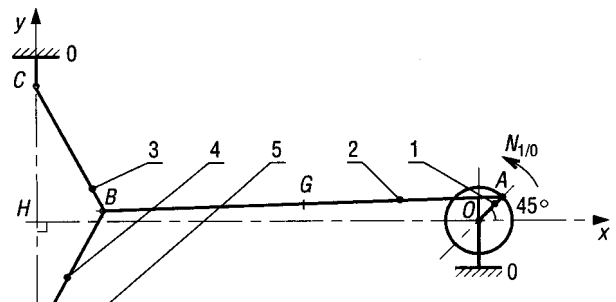


Fig. 39

14 COMPOSITION DE MOUVEMENTS

OBJECTIFS

- Définir et décrire la notion de composition de mouvement.
- Donner et développer les relations concernant la composition des vitesses.
- Traiter les cas du glissement, du roulement et du pivotement.
- Donner la relation de composition des accélérations.

Dans ce chapitre, nous nous limiterons à des études planes (mouvements plans). Cependant, les relations abordées sont utilisables directement ou facilement généralisables aux mouvements dans l'espace. La composition de mouvement s'appelle aussi « mouvements relatifs ».

I - Généralités

1. Définition

Soit un solide (3) en mouvement par rapport à un deuxième solide (2), lui-même en mouvement par rapport à un troisième solide (1). Le mouvement du solide (3) par rapport au solide (1) est le composé des deux mouvements précédents.

On dit qu'il y a composition de mouvement entre les trois solides 1, 2 et 3. Autrement dit :

$$\mathcal{M}^{vt}_{3/1} = \mathcal{M}^{vt}_{3/2} + \mathcal{M}^{vt}_{2/1}$$

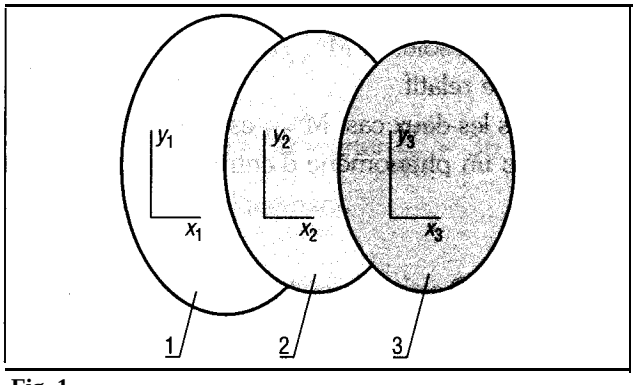


Fig. 1

Exemple 1 : prenons le cas d'un piéton (3) qui marche sur un trottoir roulant (2). (3) et (2) avancent dans le même sens par rapport au sol (1).

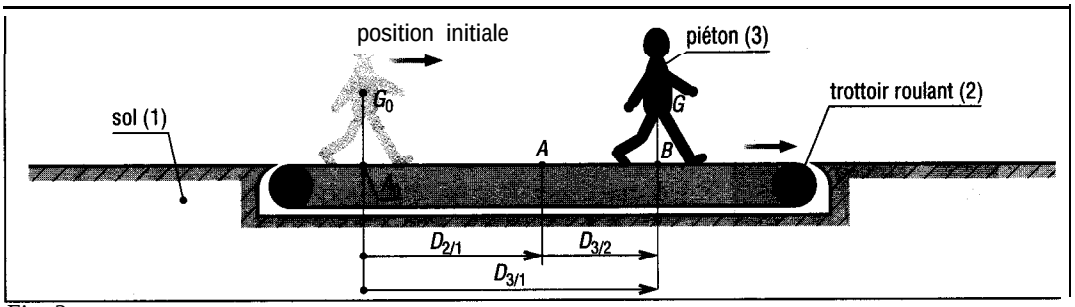


Fig. 2

Il y a composition entre les trois mouvements $M^{vt}_{3/1}$, $M^{vt}_{3/2}$ et $M^{vt}_{2/0}$. Le mouvement du piéton par rapport au sol ($M^{vt}_{3/1}$) est le compose des deux autres : $M^{vt}_{3/1} = M^{vt}_{3/2} + M^{vt}_{2/1}$. Si $D_{2/1} = A_0A$ = 3 m mesure le déplacement du trottoir pendant un intervalle de temps **At** et $D_{3/2} = AB$ = 2 m, le déplacement correspondant du piéton sur le trottoir, le piéton aura parcouru $D_{3/1} = D_{3/2} + D_{2/1}$ = 5 m par rapport au sol.

Exemple 2 : un bateau (3) traverse un fleuve (2) en partant du point A et en visant un point *B* sur l'autre rive (1), perpendiculairement au sens du courant.

Le mouvement du bateau par rapport aux rives ($M^{vt}_{3/1}$) résulte de la composition des mouvements bateau/fleuve ($M^{vt}_{3/2}$) et fleuve/rives ($M^{vt}_{2/1}$) :
$M^{vt}_{3/1} = M^{vt}_{3/2} + M^{vt}_{2/1}$
Dans ce cas, la composition de mouvement s'effectue de façon vectorielle et $\overrightarrow{D_{3/1}} = \overrightarrow{D_{3/2}} + \overrightarrow{D_{2/1}}$.

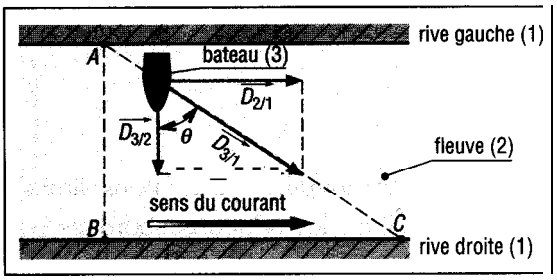


Fig. 3

Si pendant un intervalle de temps **At,** $D_{3/2}$ = 3 m, $D_{2/1}$ = 4 m alors $D_{3/1} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ m et θ = tan-l (4/3) = 53,13°.

2. Remarques

Les mouvements de solides sont parfois classifiés en mouvements absolus, relatifs et d'entraînement (voir définitions chapitre "cinématique · généralités").
Pour les deux exemples précédents, les mouvements $M^{vt}_{2/1}$ et $M^{vt}_{3/1}$ sont des mouvements absolus et $M^{vt}_{3/2}$ un mouvement relatif. (1), la Terre, est un repère absolu et (2) un repère relatif.
Dans les deux cas, $M^{vt}_{2/1}$ est aussi appelé mouvement d'entraînement dans la mesure où il y a un phénomène d'entraînement de 3 par 2.

II · Composition des vitesses

1. Relation entre les vitesses en un point

Soit un point A appartenant à un solide (3) en mouvement par rapport à un solide (2) lui-même en mouvement par rapport au solide (1). Au point A, on peut écrire la relation de composition des vitesses.

$$\overrightarrow{V_{A3/1}} = \overrightarrow{V_{A3/2}} + \overrightarrow{V_{A2/1}}$$

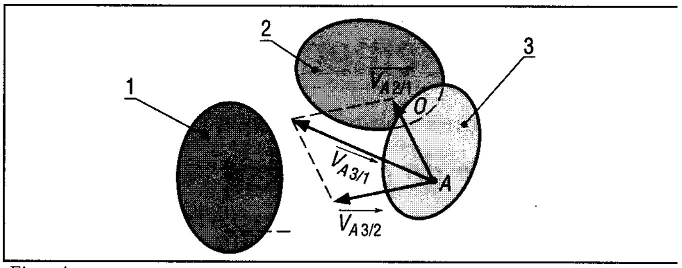


Fig. 4

Remarque 1 : la relation peut être généralisée à autant de solides qu'il est nécessaire. Par exemple, pour cinq solides 1, 2, 3, 4 et 5 en mouvements relatifs :

$$\overrightarrow{V_{A5/1}} = \overrightarrow{V_{A5/4}} + \overrightarrow{V_{A4/3}} + \overrightarrow{V_{A3/2}} + \overrightarrow{V_{A2/1}}$$

Dans l'écriture de la relation, les chiffres se succèdent les uns aux autres,

$$\overrightarrow{V_{A5/1}} = \overrightarrow{V_{A5/4}} + \overrightarrow{V_{A4/3}} + \overrightarrow{V_{A3/2}} + \overrightarrow{V_{A2/1}}$$

t-t 4 3 2
5→1 5→1

Remarque 2 : il est toujours possible de remplacer une vitesse inconnue ($\overrightarrow{V_{A2/1}}$ par exemple) par deux autres vitesses connues, en utilisant un solide intermédiaire K.

$$\overrightarrow{V_{A3/1}} = \overrightarrow{V_{A3/2}} + \overrightarrow{V_{A2/1}} = \overrightarrow{V_{A3/2}} + \overrightarrow{V_{A2/K}} + \overrightarrow{V_{AK/1}}$$

Remarque 3 : en notant que $\overrightarrow{V_{A3/1}} = -\overrightarrow{V_{A1/3}}$, la relation peut aussi s'écrire sous la forme

$$\overrightarrow{V_{A1/3}} + \overrightarrow{V_{A3/2}} + \overrightarrow{V_{A2/1}} = \vec{0} = \overrightarrow{V_{A1/1}}$$

Exemple

Un ballon de démonstration (2) monte verticalement (direction z) par rapport à la masse d'air (1) qui l'entoure et l'entraîne ; vitesse d'ascension 30 $km.h^{-1}$. La masse d'air se déplace par rapport au sol (0), vitesse du vent 40 $km.h^{-1}$, direction x. S'il n'y a pas balancement du ballon, déterminons la vitesse $\overrightarrow{V_{A2/0}}$ de la nacelle par rapport au sol (0), en A.

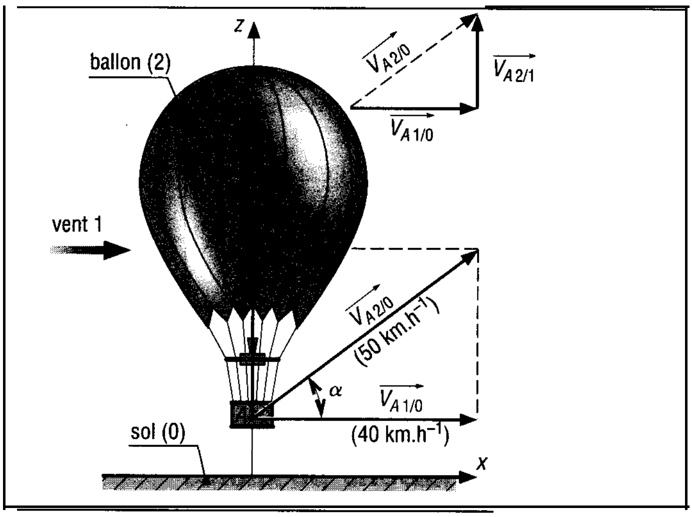


Fig. 5

$$\overrightarrow{V_{A2/0}} = \overrightarrow{V_{A2/1}} + \overrightarrow{V_{A1/0}}$$

$\overrightarrow{V_{A2/1}} = 30\ \vec{k}$ ($km.h^{-1}$) et $\overrightarrow{V_{A1/0}} = 40\ \vec{i}$ d'où :

$$\overrightarrow{V_{A2/0}} = 40\ \vec{i} + 30\ \vec{k}\ ;\ \|\overrightarrow{V_{A2/0}}\| = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50\ km.h^{-1}\ ;\ a = \text{artan}\frac{30}{40} = 36{,}9°$$

Remarque : la détermination peut être réalisée graphiquement.

2. Relation de composition entre les vitesses angulaires

Le raisonnement est identique, si $\omega_{3/1}$, $\omega_{3/2}$ et $\omega_{2/1}$ sont les vitesses angulaires des solides 1, 2 et 3 en mouvements relatifs, on peut écrire la relation de composition :

$$\omega_{3/1} = \omega_{3/2} + \omega_{2/1} \text{ (forme algébrique pour le plan)}$$
$$\text{ou } \overrightarrow{\omega_{3/1}} = \overrightarrow{\omega_{3/2}} + \overrightarrow{\omega_{2/1}} \text{ (forme vectorielle pour l'espace)}$$

Les remarques sont les mêmes qu'au paragraphe précédent, la relation peut être généralisée à ***n*** solides, etc.

III • Glissement • roulement • pivotement

1. Vitesse de glissement

A est le point de contact entre les solides (1) et (2) en glissement relatif. $\vec{t}$ est un vecteur unitaire du plan tangent au contact en A. ***n*** est la normale (vecteur unitaire perpendiculaire à t).

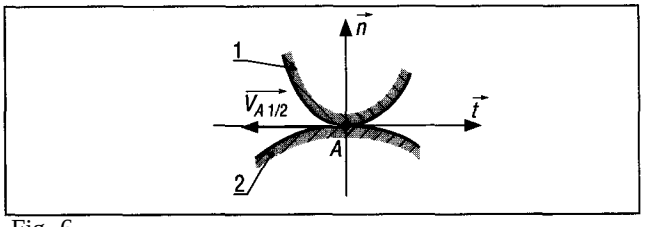


Fig. 6

On appelle vitesse de glissement en A du **solide (1)** par **rapport** au solide **(2)**, la **vitesse relative** $\overrightarrow{V_{A1/2}}$.
$\overrightarrow{V_{A1/2}}$ ou $\overrightarrow{V_{A2/1}}$ est toujours **contenue dans le** 'plan tangent au contact (portée par $\vec{t}$).

2. Roulement et piiotement

$\vec{W}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à ii et $\vec{t}$.

La vitesse angulaire $\omega_{r1/2}$ (ou $\overrightarrow{\omega_{r1/2}} = \omega_{r1/2} \cdot \vec{W}$) caractérise le roulement du solide (1) par rapport au solide (2) autour de l'axe $\vec{W}$.

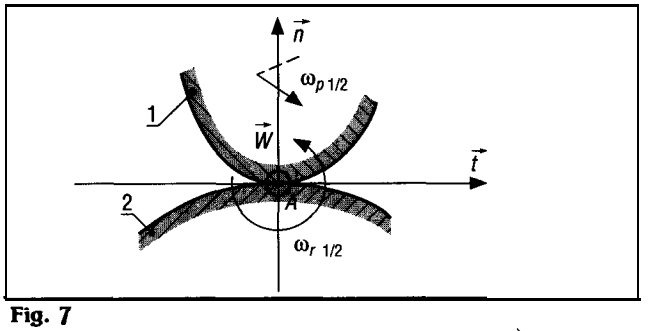


Fig. 7

$\omega_{p1/2}$ ($\overrightarrow{\omega_{p1/2}} = \omega_{p1/2} \cdot \vec{n}$) est le pivotement de (1) par rapport à (2) autour de $\vec{n}$.

3. Combiions possibles

	$\omega_{r1/2} = 0$ $\omega_{p1/2} = 0$	$\omega_{r1/2} = 0$ $\omega_{p1/2} \neq$	$\omega_{r1/2} \neq 0$ $\omega_{p1/2} = 0$	$\omega_{r1/2} \neq 0$ $\omega_{p1/2} \neq 0$
$\overrightarrow{V_{A1/2}} = \vec{0}$	adhérence	pivotement	roulement	roulement avec pivotement
$\overrightarrow{V_{A1/2}} \neq \vec{0}$	glissement	glissement avec pivotement	glissement avec roulement	glissement avec roulement et pivotement

IV • Composition des accélérations

Le solide ou repère (0) est un repère absolu ou galiléen, la terre par exemple (voir chapitre « cinématique-généralités »). En dérivant par rapport au temps t, la relation de composition des vitesses $\overrightarrow{V_{A2/0}} = \overrightarrow{V_{A2/1}} + \overrightarrow{V_{A1/0}}$, on obtient :

$\overrightarrow{a_{A2/0}} = \overrightarrow{a_{A2/1}} + \overrightarrow{a_{A1/0}} + \overrightarrow{a_{AC}}$ avec $\overrightarrow{a_{AC}} = 2\ \overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{A2/1}}$ = **accélération** de Coriolis

$\overrightarrow{a_{AC}}$ est appelée accélération complémentaire ou accélération de Coriolis. Elle résulte du mouvement relatif du solide 2 par rapport au solide 1.

Remarque 1 : si le mouvement de 1 par rapport à 0 est une translation, $\omega_{1/0} = 0$ et $a_{,,'} = \overrightarrow{0}$.

Remarque 2 : les accélérations $\overrightarrow{a_{A2/0}}$ et $\overrightarrow{a_{A1/0}}$ (accélération d'entraînement) sont des accélérations absolues, $a_{A2/1}$ est une accélération relative.

EXERCICES RÉSOLUS

❑ La benne 2 du camion, articulée en B sur le châssis 1, est levée en A par un vérin hydraulique 3 + 4 (3 = corps, 4 = tige télescopique). Le vérin est articulé en C sur le châssis. Les liaisons en A, B et C sont des liaisons pivots de centre de même nom. Le dispositif occupe la position de la figure. Si la tige 4 sort du corps 3 à la vitesse de 5 $cm.s^{-1}$, déterminer les vitesses $\overrightarrow{V_{A2/1}}$, $\overrightarrow{V_{A3/1}}$ et $\omega_{2/1}$.

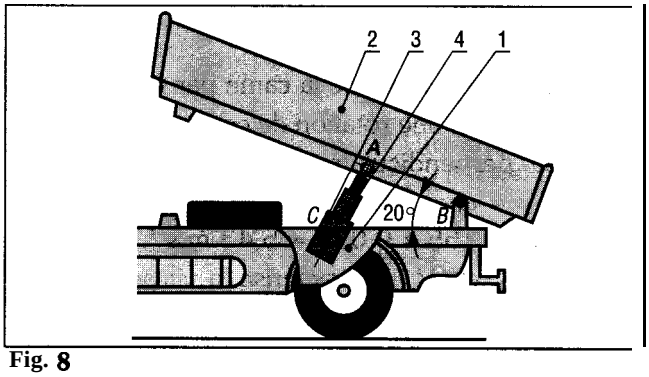


Fig. 8

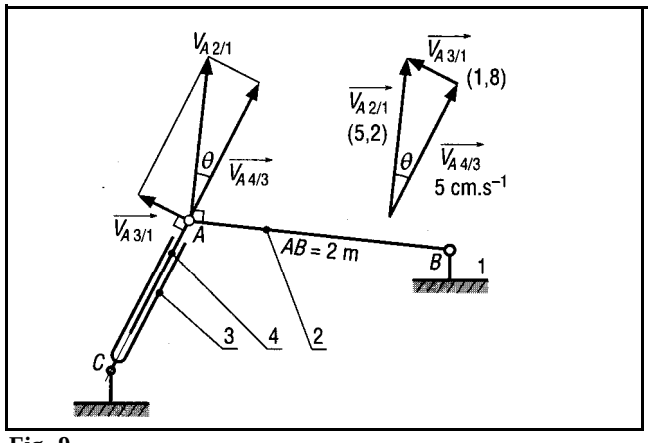


Fig. 9

Résolution

Les mécanismes ou machines utilisant des vérins hydrauliques ou pneumatiques sont très nombreux. Au cours du mouvement de sortie de la tige, il se produit un phénomène de composition de mouvement entre les solides en présence (1 - 2 - 3 et 4).

Les mouvements $M^{vt}_{3/1}$ et $M^{vt}_{2/1}$ sont des rotations de centres C et B. Il en résulte que $\overrightarrow{V_{A3/1}}$ est perpendiculaire en ***A à CA*** et $\overrightarrow{V_{A2/1}}$ perpendiculaire en A à AB. A est le centre de la liaison pivot entre 2 et 4, il en résulte que $\overrightarrow{V_{A4/2}} = \overrightarrow{0}$.

Composition des vitesses en A

$$\overrightarrow{V_{A2/1}} = \overrightarrow{V_{A2/4}} + \overrightarrow{V_{A4/3}} + \overrightarrow{V_{A3/1}}$$
$$= \overrightarrow{0} + \overrightarrow{V_{A4/3}} + \overrightarrow{V_{A3/1}}$$

Bilan	$\overrightarrow{V_{A2/1}}$	$\overrightarrow{V_{A4/3}}$	$\overrightarrow{V_{A3/1}}$
Direction	$\perp$ à AB	AC	$\perp$ à AC
Module	?	5 cm.s^{-1}	?

La résolution peut se faire graphiquement ou par calcul, après avoir déterminé l'angle θ.

Résultats $V_{A2/1} = 5{,}2\ cm.s^{-1}$; $V_{A3/1} = 1{,}8\ cm.s^{-1}$

$$\omega_{2/1} = \frac{V_{A2/1}}{AB} = \frac{0{,}052}{2} = 0{,}026\ rad.s^{-1}$$

2 Une came 1, entraînée en B par un arbre moteur, pousse en A un poussoir 2 en liaison glissière par rapport au bâti (0). La liaison en B entre 1 et (0) est une liaison pivot de centre B. Le dispositif occupe la position de la figure, $\theta = 70°$, AB = 35 mm et $\omega_{1/0} = 155$ rad.s^{-1}.

a) Déeiner la vitesse de levée du poussoir $V_{A2/0}$.

b) Déterminer la vitesse de glissement $\overrightarrow{V_{A2/1}}$ en A.

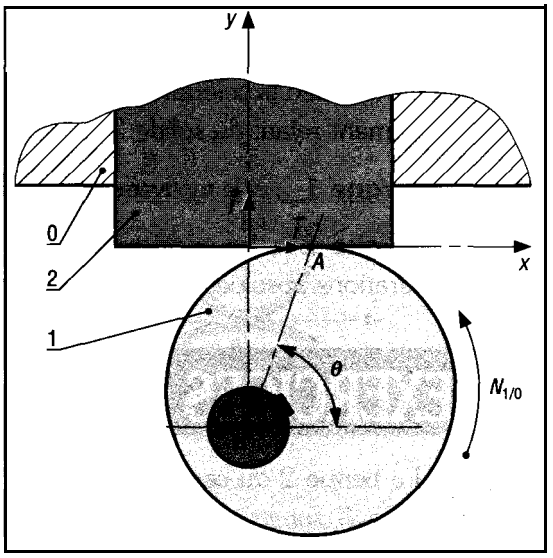


Fig. 10

Résolution

a) étude des vitesses

• Le mouvement de la came par rapport au bâti est une rotation de centre B, $\overrightarrow{V_{A1/0}}$ est perpendiculaire en A à AB et

$V_{A1/0} = \omega_{1/0} \cdot AB$

$= 155 \times 0{,}035 = 5{,}43$ m.s^{-1}.

• $\overrightarrow{V_{A2/1}}$ ou $\overrightarrow{V_{A1/2}}$ caractérise la vitesse de glissement en A entre la came et le poussoir.

$\overrightarrow{V_{A2/1}}$ appartient au plan tangent en A entre 1 et 2 et est portée par (x).

$\overrightarrow{V_{A2/0}}$ suit la translation du poussoir et est portée par (y).

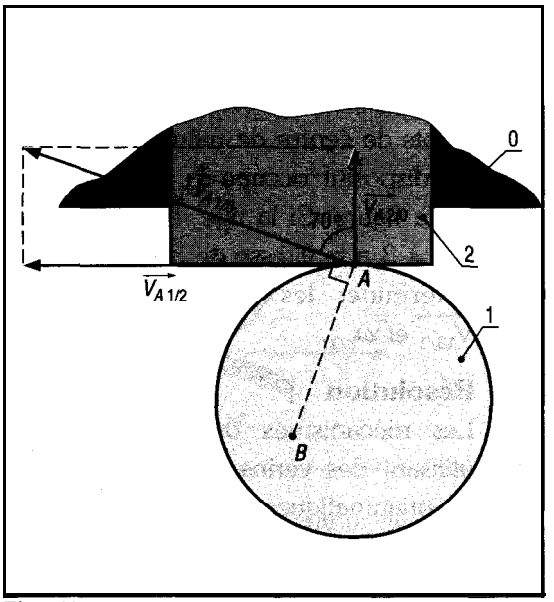


Fig. 11

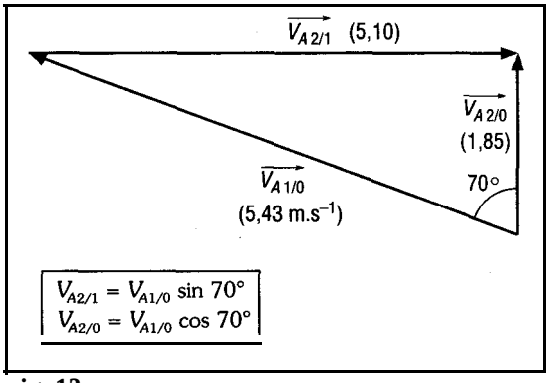
Composition des vitesses en A :

$\overrightarrow{V_{A2/0}} = \overrightarrow{V_{A2/1}} + \overrightarrow{V_{A1/0}}$

Bilan	$\overrightarrow{V_{A2/0}}$	$\overrightarrow{V_{A2/1}}$	$\overrightarrow{V_{A1/0}}$
Direction	y	x	$\perp$ à AB
Intensité	?	?	5,43 m.s^{-1}

Résultats

$\overrightarrow{V_{A2/0}} = 1{,}86\,\vec{j}$ (m.s^{-1}) ; $\overrightarrow{V_{A2/1}} = 5{,}10\,\vec{i}$



ig. 12

Remarque

La résolution peut-être réalisée graphiquement (règle du parallélogramme) ou par calcul, en remarquant que $\overrightarrow{V_{A2/0}}$ est perpendiculaire à $V_{A2/1}$ et en appliquant les propriétés des triangles rectangles :

$V_{A2/0} = V_{A1/0} \cos 70° = 5{,}43 \cos 70° = 1{,}86$ m.s^{-1}

$V_{A2/1} = V_{A1/0} \sin 70° = 5{,}43 \sin 70° = 5{,}10$ m.s^{-1}

b) Étude des accélérations

• $a_{A1/0} = \omega^2 R = \omega_{1/0}^2 \cdot OA$
$= 155^2 \times 0{,}035 = 840 \ m.s^{-1}$

• $\overrightarrow{a_{A1/0}}$ est dirigée de A vers B.

• $\overrightarrow{a_{A2/1}}$ appartient au plan tangent en A au contact, direction x.

• $\overrightarrow{a_{A2/0}}$ a même direction que la translation du poussoir, direction y.

Relation de composition des accélérations

$\overrightarrow{a_{A2/0}} = \overrightarrow{a_{A2/1}} + \overrightarrow{a_{A1/0}} + \overrightarrow{a_{AC}}$

avec : $\overrightarrow{a_{AC}} = 2\overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{A2/1}}$

$= 2 \times 155 \ \vec{k} \wedge 5{,}10 \ \vec{i} = 1\,581 \ \vec{j} \ (m.s^{-2})$

Bilan	$\overrightarrow{a_{A2/0}}$	$\overrightarrow{a_{A2/1}}$	$\overrightarrow{a_{A1/0}}$	$\overrightarrow{a_{AC}}$
Direction	y	x	AB	Y
Intensité	?	?	*840*	1 581

Deux inconnues pour une relation vectorielle dans le plan, la résolution est possible. Ordre des constructions : point P ; $\overrightarrow{a_{A1/0}}$; $\overrightarrow{a_{AC}}$; direction x de $\overrightarrow{a_{A2/1}}$ en n ; direction y de $\overrightarrow{a_{A2/0}}$ en P ; intersection m ; $\overrightarrow{a_{A2/1}}$ et $\overrightarrow{a_{A2/0}}$; mesure des intensités à l'échelle choisie.

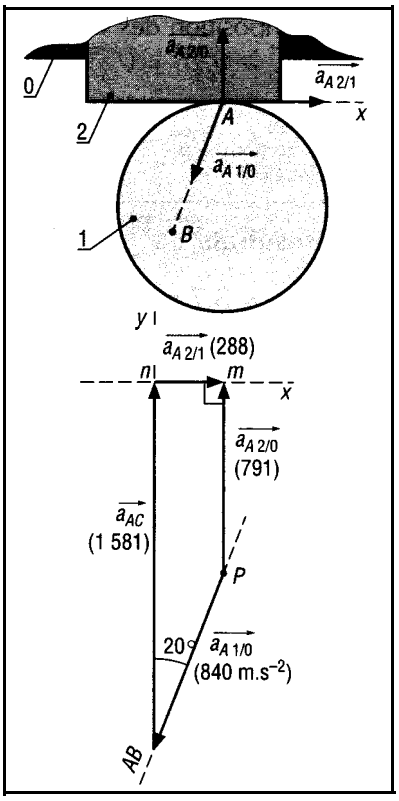


Fig. 13

Résultats

$\overrightarrow{a_{A2/1}} = 288 \ \vec{i} \ (m.s^{-2})$; $\overrightarrow{a_{A2/0}} = 791 \ \vec{j} \ (m.s^{-2})$

3 Le mécanisme à coulisse et manivelle tournante sert de principe à de nombreux mécanismes divers (croix de Malte, mortaiseuse, etc.). II se compose d'une manivelle 1 (AC) entraînée en C par un moteur, un balancier 2 articulé en B sur le bâti (0) et une coulisse 3 articulée en A sur 1 et libre de translater dans une rainure oblongue de 2. Les liaisons en A (entre 1 et 3), en B et en C sont des liaisons pivots de centre de même nom. Le dispositif occupe la position de la figure 14. Déterminons $\omega_{2/0}$ si :
CA = 250 ; CB = 600 ; $\omega_{1/0} = 20 \ rad.s^{-1}$; $\theta = 65°$; AB = 388 mm

Résolution

a) étude des vitesses en A

• $M^{vt}_{1/0}$ = rotation centre C :
$V_{A1/0} = \omega_{1/0} \cdot CA = 20 \times 0{,}25 = 5 \ m.s^{-1}$

. $M^{vt}_{2/0}$ = rotation centre B :
$V_{A2/0} = \omega_{2/0} \cdot AB$.

• $M^{vt}_{3/2}$ = translation rectiligne de direction AB

• A est le centre de l'articulation entre 1 et 3
d'où $\overrightarrow{V_{A1/3}} = 8$.

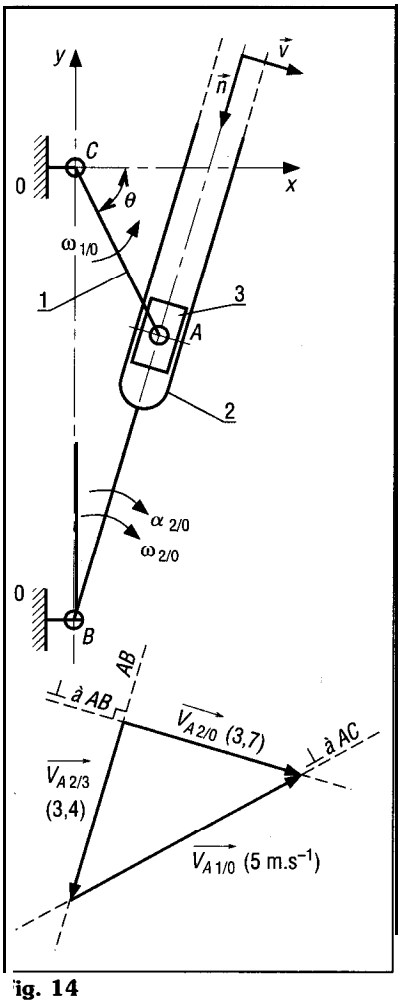


Fig. 14

Composition des vitesses en A :

$$\overrightarrow{V_{A2/0}} = \overrightarrow{V_{A2/3}} + \overrightarrow{V_{A3/1}} + \overrightarrow{V_{A1/0}} = \overrightarrow{V_{A2/3}} + \overrightarrow{V_{A1/0}}$$

Bilan	$\overrightarrow{V_{A2/0}}$	$\overrightarrow{V_{A2/3}}$	$\overrightarrow{V_{A3/1}}$	$\overrightarrow{V_{A1/0}}$
Direction	$\perp$ à AB	AB	–	$\perp$ à CA
Intensité	?	?	0	5 m.s^{-1}

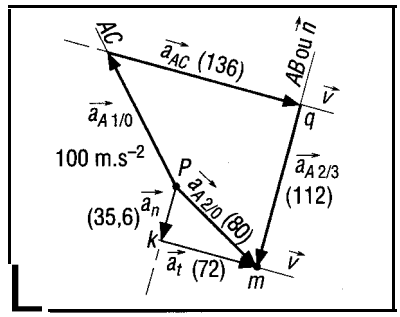


Fig. **15**

Résultats : $V_{A2/3} = 3{,}4$ m.s^{-1} ;

$V_{A2/0} = 3{,}7$ m.s^{-1} ; $\omega_{2/0} = \dfrac{3{,}7}{AB} = \dfrac{3{,}7}{0{,}388} = 9{,}5$ rad.s^{-1}

b) Étude des accélérations

- $a_{A1/0} = \omega^2 R = \omega_{1/0}{}^2 . CA = 20^2 \times 0{,}25 = 100$ m.s^{-2} (dirigée de A vers C) ;
- $\overrightarrow{a_{A2/3}}$ est dirigée suivant AB (direction de la translation) ;
- $\overrightarrow{a_{A3/1}} = \vec{0}$ (A centre de la liaison pivot entre 1 et 3) ;
- $\overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{a_t}$; <composante. normale et $\overrightarrow{a_t}$ composante tangentielle qui existe du fait que $\omega_{2/0}$ n'est pas constante.

Composition des accélérations en A : $\overrightarrow{a_{A2/0}} = \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{a_t} = \overrightarrow{a_{A2/3}} + \overrightarrow{a_{A1/0}} + \overrightarrow{a_{AC}}$

avec : $\overrightarrow{a_{AC}} = 2\overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{A2/3}} = 2 \times 20\ \vec{k} \wedge 3{,}4\ \vec{n} = 136\ \vec{v}$.

Bilan	$\overrightarrow{a_n}$	$\overrightarrow{a_t}$	$\overrightarrow{a_{A2/3}}$	$\overrightarrow{a_{A1/0}}$	$\overrightarrow{a_{AC}}$
Direction	$\vec{n}$	$\vec{v}$	$\vec{n}$ (AB)	AC	$\vec{v}$
Intensité	$\omega_{2/0}{}^2 . AB$ (35,6)	$\alpha_{2/0} . AB$	?	100 m.s^{-2}	136 m.s^{-2}

Nous avons deux inconnues, la résolution (graphique ou calculée) est possible **(fig. 15)**.

Ordre des constructions : point P ; $\overrightarrow{a_{A1/0}}$; $\overrightarrow{a_{AC}}$ direction $\vec{n}$ de $\overrightarrow{a_{A2/3}}$ en q ; $\overrightarrow{a_n}$ en P ; direction $\vec{v}$ de $\overrightarrow{a_t}$ en k ; point d'intersection m ; $\overrightarrow{a_t}$ et $\overrightarrow{a_{A2/3}}$; mesure des intensités à l'échelle choisie.

Résultats : $a_{A2/0} = 80$ m.s^{-2} ; $a_{A2/3} = 112$ m.s^{-2} ; $\alpha_{2/0} = \dfrac{72}{AB} = 186$ rad.s^{-2}.

EXERCICES À RÉSOUDRE

4 Un avion de transport 1 vole dans le sens sud/nord (axe y) à la vitesse de 700 km.h^{-1} lorsqu'un avion 2, plus rapide (1 400 km.h^{-1}), le croise dans la direction à 60° (θ = 60°). Déterminer la vitesse relative $\overrightarrow{V_{B2/1}}$ de 2 par rapport à 1 en B.

Réponse

$\overrightarrow{V_{B2/1}} = 1\,212\ \vec{i}$ (km.h^{-1}).

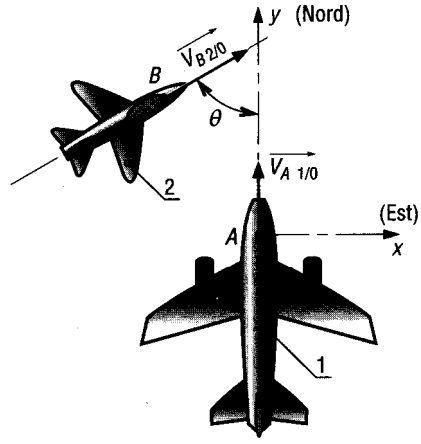


Fig.16

5 Un porte-avions 1 avance à la vitesse de 35 nœuds (1 nœud = 1,852 km.h^{-1}) et catapulte un avion 2 avec une accélération constante de 40 m.s^{-2} sur une distance de 90 m.

Déterminer la vitesse de décollage de l'avion par rapport à l'océan (θ = 16").

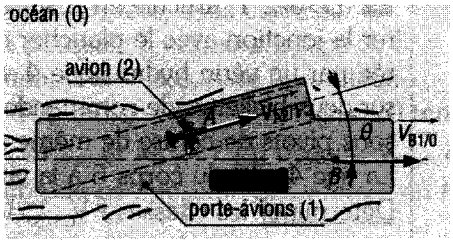


Fig. 17

6 Une automobile 2 prend un virage de rayon R = 80 m à la vitesse constante de 60 km.h^{-1} (6 = 45"). Une deuxième automobile (1) roule à la vitesse de 90 km.h^{-1}, avec une décélération de 1,5 m.s^{-2}, sur un tronçon droit (0, y). Déterminer la vitesse relative $\overrightarrow{V_{B2/1}}$ du véhicule 2 par rapport au véhicule 1 et $\overrightarrow{a_{B2/1}}$.

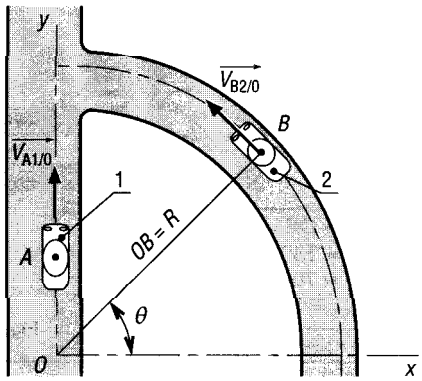


Fig. 18

Réponse

$\overrightarrow{V_{B2/1}} = -42{,}4\,\vec{i} - 47{,}6\,\vec{j}$; $V_{B2/1}$ = 63,7 km.h^{-1}.

$\overrightarrow{a_{B2/1}} = -2{,}45\,\vec{i} - 0{,}96\,\vec{j}$

7 Le dispositif proposé représente incomplètement une commande de soupape d'admission d'un moteur à essence de moto. L'arbre à cames 1 entraîne en D un culbuteur 2 qui pousse en B une soupape 5. La pièce 9 assure le maintien latéral et les ressorts 7 + 8 le rappel de la soupape. Les liaisons en 0 et A sont (ou sont équivalentes) à des liaisons pivots de centre de même nom ; les plans tangents au contact en B et D sont supposés horizontaux ; θ = 65" ; $\omega_{1/0}$ = 200 rad.s^{-1} (≃ 2 000 tr.min^{-1}).

a) Nature des mouvements : $M^{vt}_{1/0}$; $M^{vt}_{2/0}$, $M^{vt}_{5/0}$; $M^{vt}_{2/1}$ et $M^{vt}_{2/5}$.
En déduire $\overrightarrow{V_{D1/0}}$ et les directions de $\overrightarrow{V_{D2/1}}$; $\overrightarrow{V_{D2/0}}$; $\overrightarrow{V_{B2/0}}$; $\overrightarrow{V_{B5/0}}$ et $\overrightarrow{V_{B5/2}}$.

b) Écrire la relation de composition des vitesses en D. Déterminer $\overrightarrow{V_{D2/0}}$, $\overrightarrow{V_{D2/1}}$ et $\omega_{2/0}$.

c) Écrire la relation de composition des vitesses en B. Déterminer $\overrightarrow{V_{B5/0}}$ et $\overrightarrow{V_{B5/2}}$.
En déduire $\overrightarrow{V_{C5/0}}$.

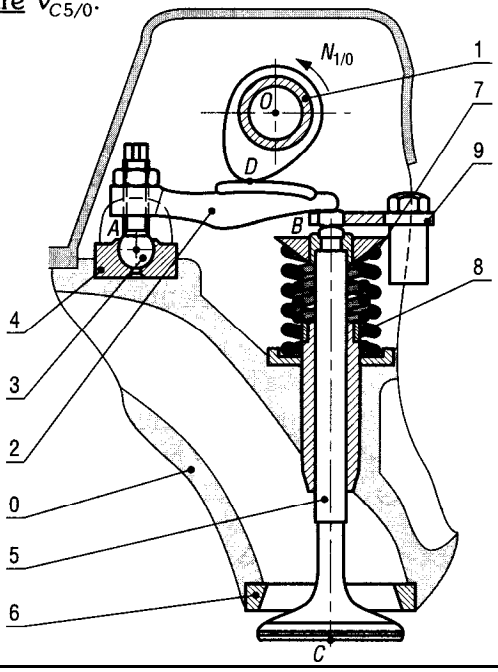
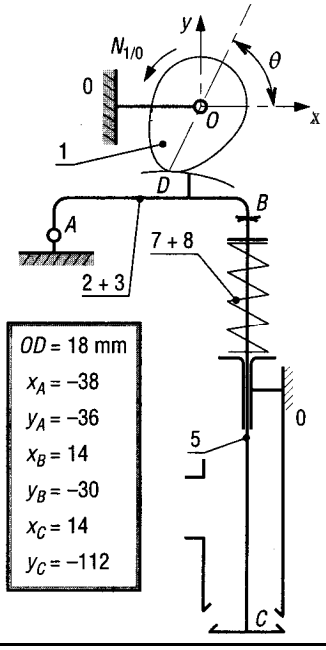


Fig. 19



OD = 18 mm
x_A = −38
y_A = −36
x_B = 14
y_B = −30
x_C = 14
y_C = −112

❑ Le bec 1, articulé en E sur une plate-forme de table élévatrice 0, permet d'assurer la jonction avec le plancher de chargement d'un camion. La manoeuvre est assurée par un vérin hydraulique 4 + 5 (4 = tige, 5 = corps) articulé en D sur 0 et en C sur deux biellettes de commandes 2 et 3. Les liaisons en A, B, C, D et E sont des liaisons pivots de centre de même nom.
La tige 4 sort du corps 5 à la vitesse de 5 cm.s^{-1}, $\theta = 45°$.
Déterminer les vitesses : $\overrightarrow{V_{C3/0}}$, $\overrightarrow{V_{C2/0}}$, $\overrightarrow{V_{A1/0}}$ et $\omega_{1/0}$.

Réponse

$\overrightarrow{V_{C3/0}} = \overrightarrow{V_{C2/0}} = -5\,\vec{i} + 5\,\vec{j}$ (cm.s^{-1}) ; $\overrightarrow{V_{A1/0}} = 5\,\vec{i} + 5\,\vec{j}$; $\omega_{1/0} = 0.54$ rad.s^{-1}.

$OA = OB = OC = 280$
$EA = 130$
$CD = 700$
$V_{C4/5} = 5$ cm.s^{-1}

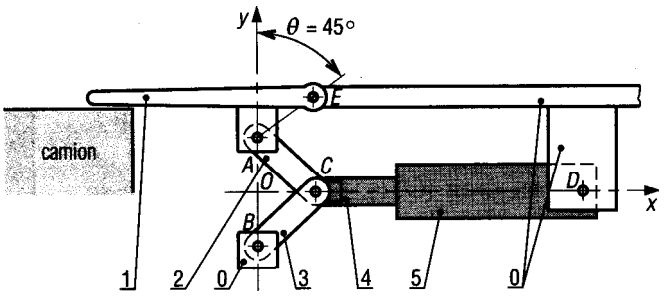


Fig. 20

9 Un four électrique 1 est articulé en C sur un socle fixe 0. Le basculement est réalisé par deux vérins hydrauliques 2 + 3 (2 = tige, 3 = corps) disposés symétriquement. Les liaisons en A, B et C sont des liaisons pivots de centre de même nom. $\theta = 20°$; BC = 930 mm, $x_A = -720$ et y, = − 1 950 mm.
Si la tige 2 sort du corps 3 à la vitesse de 10 cm.s^{-1}, déterminer $\overrightarrow{V_{B1/0}}$ et $\omega_{1/0}$.

Réponse

$\overrightarrow{V_{B1/0}} = 10{,}33\,\vec{v}$ (cm.s^{-1}) ; $\omega_{1/0} = 0{,}11$ rad.s^{-1}.

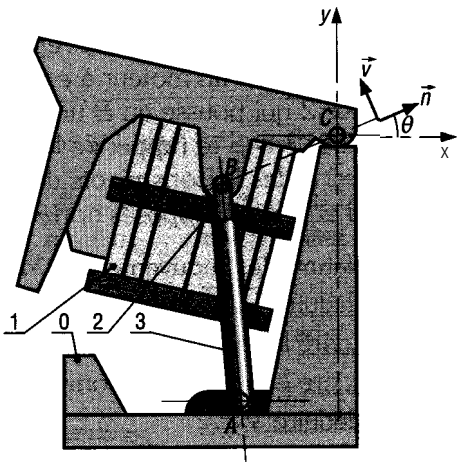


Fig. 21

❑ Une croix de Malte à six faisceaux est entraînée en A par une manivelle 1 tournant à la vitesse uniforme $\omega_{1/0} = 20$ rad.s^{-1}. Les liaisons en B et 0 sont des pivots de centre de même nom, $\theta = 20°$. a) Nature des mouvements $M^{vt}_{1/0}$ et $M^{vt}_{3/0}$. En déduire $\overrightarrow{V_{A1/0}}$ et les directions de $\overrightarrow{V_{A3/0}}$ et $\overrightarrow{V_{A2/3}}$ si 2 est axe cylindrique solidaire de la manivelle 1. b) Écrire la relation de composition entre les vitesses en A. Déterminer $\overrightarrow{V_{A3/0}}$, $\overrightarrow{V_{A3/2}}$ et $\omega_{3/0}$.

$AB = R = 40$ mm
$OB = L = 75$ mm
$\omega_{1/0} = 20$ rad.s^{-1}
$\theta = 20°$

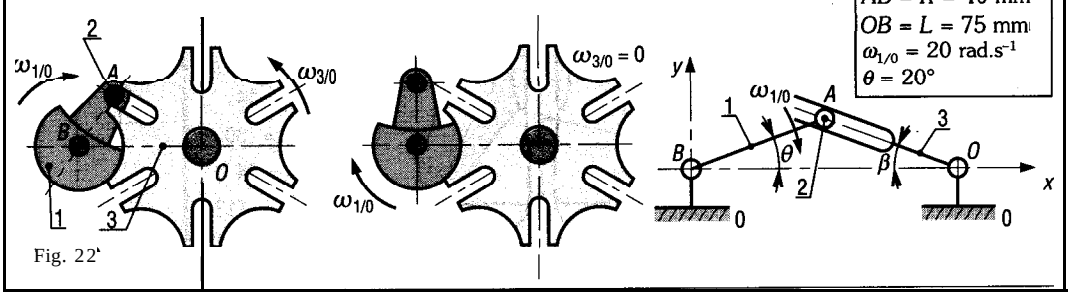


Fig. 22

❑ Une commande de soupape à arbres à cames en tête, sans culbuteur, se compose d'une came 1 agissant directement sur un poussoir 2 et une soupape 3. 5 et 6 sont des ressorts de rappel, 4 le siège de la soupape et 0 la culasse du moteur.
Le pivotement du poussoir est négligé ; $\omega_{1/0} = 400$ rad.s^{-1} ; $\theta = 30°$; AB = 20 mm.
a) Quelle est la nature des mouvements $M^{vt}_{1/0}$, $M^{vt}_{2/0}$ et $M^{vt}_{1/2}$? En déduire $\overrightarrow{V_{B1/0}}$ et les directions de $\overrightarrow{V_{B2/0}}$ et $\overrightarrow{V_{B2/1}}$. **b)** Écrire la relation de composition des vitesses en B. Déterminer $\overrightarrow{V_{B2/0}}$ et $\overrightarrow{V_{B2/1}}$. En déduire $\overrightarrow{V_{C2/0}}$.

Réponse

$\overrightarrow{V_{B2/0}} = -4\vec{i} = \overrightarrow{V_{C2/0}}$; $\overrightarrow{V_{B2/1}} = 6{,}93\ \vec{j}$ (m.s^{-1}) ; $\overrightarrow{V_{B1/0}} = -4\vec{i} - 6{,}93\ \vec{j}$.

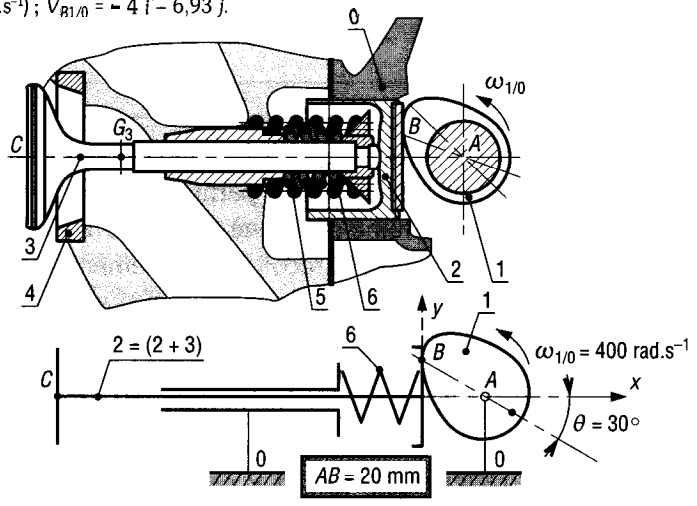


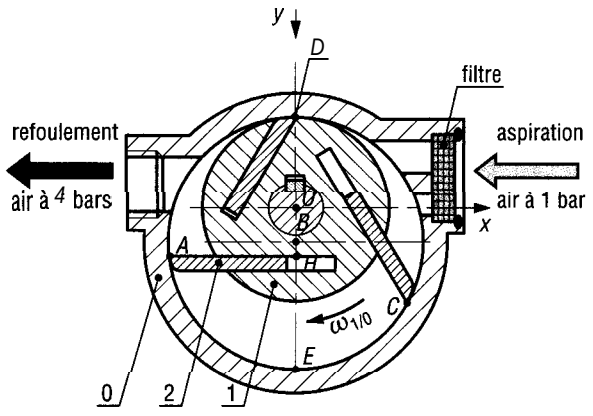
Fig. 23

12 Reprendre l'exercice 11, écrire la relation de composition des accélérations en B, déterminer $\overrightarrow{a_{B1/0}}$, $\overrightarrow{a_{B2/1}}$ et $\overrightarrow{a_{BC}}$ (accélération de Coriolis) ; en déduire $\overrightarrow{a_{C2/0}}$.

Réponse

$\overrightarrow{a_{B2/0}} = \overrightarrow{a_{C2/0}} = -2\,770\ \vec{i}$ (m.s^{-1}) ; $\overrightarrow{a_{BC}} = -5\,540\ \vec{i}$; $\overrightarrow{a_{B2/1}} = 1\,600\ \vec{j}$; $\overrightarrow{a_{B1/0}} = 2\,770\ \vec{i} - 1\,600\ \vec{j}$.

13 Un compresseur à palettes, proposé sous forme simplifiée en coupe transversale, se compose d'un rotor ou cylindre 1 entraîné en 0 par un moteur et de trois palettes 2 disposées à 120°. Les palettes assurent la compression de l'air et peuvent coulisser librement dans des rainures du cylindre. Sous l'effet de la force centrifuge, les palettes restent toujours en contact avec le stator ou le bâti 0. Le dispositif occupe la position de la figure (contact en A, C et D) ; $\omega_{1/0} = 150$ rad.s^{-1}.
a) Quelle est la nature des mouvements $M^{vt}_{1/0}$, $M^{vt}_{2/0}$ et la nature de la trajectoire $T_{A2/0}$? En déduire $\overrightarrow{V_{A1/0}}$ et les directions de $\overrightarrow{V_{A2/1}}$ et $\overrightarrow{V_{A2/0}}$. b) Écrire la relation de composition des vitesses en A. En déduire $\overrightarrow{V_{A2/0}}$, $\overrightarrow{V_{A2/1}}$ et $\omega_{2/0}$.



OA = 54 mm
OH = 19
$BA = BC = BD = R$ = 50
excentricité = $e = OB$ = 14

Fig. 24

❑ Reprendre l'exercice 13. $\overrightarrow{V_{A2/1}} = 2{,}1\ \vec{i}\ (\text{m.s}^{-1})$. Écrire la relation de composition des accélérations en A. Déterminer $\overrightarrow{a_{A1/0}}$, $\overrightarrow{a_{A2/1}}$, $\overrightarrow{a_{A2/0}}$ et $\overrightarrow{a_{AC}}$ (accélération de Coriolis).

❑ Reprendre l'exercice 10 avec une croix de Malte à quatre faisceaux (à 90°) ; R = 50 ; L = 71 mm ; 19 = 30" et $\omega_{1/0}$ = 10 rad.s^{-1}. Déterminer également $\overrightarrow{a_{A1/0}}$, $\overrightarrow{a_{A3/0}}$, $\overrightarrow{a_{A3/2}}$, a_{AC} et $\alpha_{3/0}$.

Réponse

$V_{A1/0}$ = 0,5 m.s^{-1} ; $\omega_{3/0}$ = 4,08 rad.s^{-1} ; $a_{A1/0}$ = 5 m.s^{-2} ; a_{AC} = 3,89 m.s^{-2} ; $\alpha_{3/0}$ = 233 rad.s^{-2}.

16 Un variateur mécanique réalise une plage de variation de sa vitesse de sortie comprise entre 0 et 300 tr.min^{-1} à partir d'un moteur tournant à 1 450 tr.min^{-1} (constante). Le moteur entraîne en 0 une manivelle 1 qui transmet le mouvement en A à une bielle 2. Une coulisse 3 reçoit le mouvement et le transmet en C à une roue libre 6 + 7 qui entraîne l'arbre de sortie 8 d'axe D. L'articulation B entre 3 et 4 + 5 est réglable entre 0 et D. Les liaisons en 0, A, B, C et D sont des liaisons pivots de centre de même nom, les liaisons 2/3 et 3/4 sont des pivots glissants d'axe AC. Le dispositif occupe la position de la figure θ = 90" ; OB = 55 mm. Afin de déterminer la vitesse de sortie $\omega_{6/0}$, on demande : a) Quelle est la nature des mouvements : $M^{vt}_{1/0}$ et $M^{vt}_{2/0}$? Déterminer $\overrightarrow{V_{A1/0}}$ et $\overrightarrow{V_{A2/0}}$. Compte tenu de la liaison en B, déterminer $\overrightarrow{V_{B2/0}}$ et $\omega_{2/0}$. En déduire $\overrightarrow{V_{C2/0}}$. Comparer $\omega_{2/0}$, $\omega_{3/0}$ et $\omega_{4/0}$. b) Quelle est la nature des mouvements : $M^{vt}_{3/0}$, $M^{vt}_{6/0}$ et $M^{vt}_{3/2}$? En déduire des éléments de $\overrightarrow{V_{C6/0}}$, $\overrightarrow{V_{C3/0}}$, $\overrightarrow{V_{C3/2}}$ et $\overrightarrow{V_{C6/3}}$. Comparer $\overrightarrow{V_{C3/2}}$ et . c) Écrire la relation de composition des vitesses en C entre $\overrightarrow{V_{C2/0}}$, $\overrightarrow{V_{C6/0}}$, $\overrightarrow{V_{C3/2}}$ et $\overrightarrow{V_{C6/3}}$. En déduire $\overrightarrow{V_{C6/0}}$ et $\omega_{6/0}$.

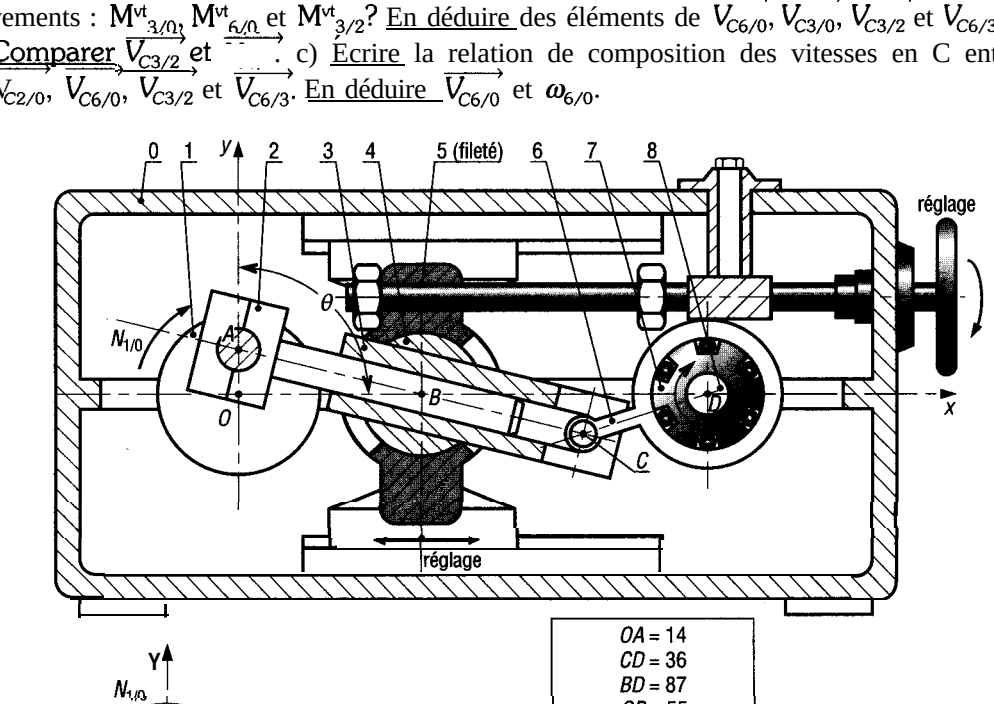


Fig. 25

15 CINÉMATIQUE DANS L'ESPACE

OBJECTIFS

- Définir la dérivée d'un vecteur dans différents repères.
- Donner les principales relations de la cinématique du solide (vitesses et accélérations).
- Définir le torseur cinématique et indiquer les torseurs correspondant aux liaisons normalisées. Traiter la composition de mouvement.
- Décrire les paramétrages utilisés dans l'espace (angles d'Euler, etc.). Fournir des notions sur la théorie des mécanismes.

1 • Dérivée par rapport au temps d'un vecteur dans différents repères

1, Dérivée d'un vecteur de base

a) Cas du plan

$\vec{i}_0$, $\vec{j}_0$, $\vec{k}_0$ sont les vecteurs de base du repère de référence $R_0 = (x_0, y_0, z_0)$. $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont les vecteurs de base du repère en mouvement $R = (x, y, z)$. $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}_0 = \dot{\theta}\, \vec{k}_0$ est le vecteur rotation de R par rapport à R_0.

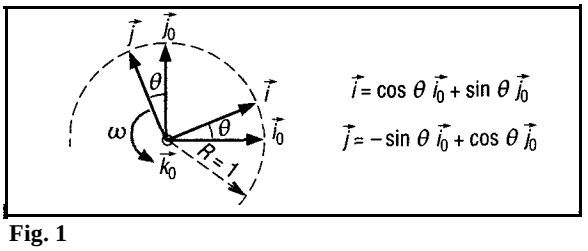


Fig. 1

Remarque : $\left(\frac{d\vec{i}_0}{dt}\right)_{R_0} = \vec{0}$; $\left(\frac{d\vec{j}_0}{dt}\right)_{R_0} = \vec{0}$; $\vec{i}_0$ et $\vec{j}_0$ sont des vecteurs fies de R_0.

$$\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0} = -\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{i}_0 + \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{j}_0 + \cos\theta\left(\frac{d\vec{i}_0}{dt}\right)_{R_0} + \sin\theta\left(\frac{d\vec{j}_0}{dt}\right)_{R_0} = \dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\vec{i}_0 + \cos\theta\,\vec{j}_0\right)$$

$$\left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{R_0} = -\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{i}_0 - \dot{\theta}\sin\theta\,\vec{j}_0 - \sin\theta\left(\frac{d\vec{i}_0}{dt}\right)_{R_0} + \cos\theta\left(\frac{d\vec{j}_0}{dt}\right)_{R_0} = \dot{\theta}\left(-\cos\theta\,\vec{i}_0 - \sin\theta\,\vec{j}_0\right)$$

Résultats : $\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0} = \dot{\theta}.\vec{j} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}$ et $\left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{R_0} = -\dot{\theta}.\vec{i} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}$

b) Cas général

On généralise le cas précédent ; $\overrightarrow{\omega(R/R_0)} = \vec{\omega}$ est la vitesse de rotation de R par rapport à R_0 :

$\left(\frac{d\vec{i}_0}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{j}_0}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{k}_0}{dt}\right)_{R_0} = \vec{0}$		$\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_R = \vec{0}$
$\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}$	$\left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}$	$\left(\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}$

2. Dérivée d'un vecteur $\vec{Q}$ dans des repères différents

a) Cas de repères R et R_0 en translation

x est constamment parallèle à x_0, y à y, et z à z_0. La dérivée du vecteur $\vec{Q}$ fonction du temps ($\vec{Q} = \overrightarrow{Q(t)}$) est dans ce cas particulier la même dans les deux repères.

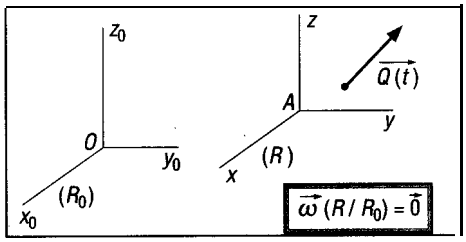


Fig. 2

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_R \quad \text{si R et } R_0 \text{ en translation } (\overrightarrow{\omega(R/R_0)} = \vec{0})$$

b) Cas de repères R et R_0 en mouvement quelconque :

$\overrightarrow{Q(t)}$ est en mouvement par rapport aux deux repères. $\vec{\omega}(R/R_0)$ définit la vitesse angulaire de R par rapport à R_0.

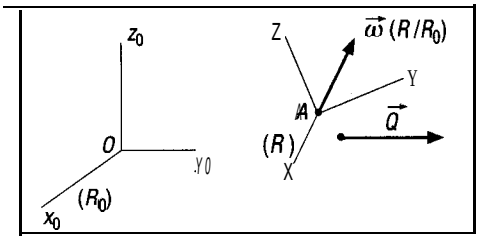


Fig. 3

$$\vec{Q} = Q_x\vec{i} + Q_y\vec{j} + Q_z\vec{k} \quad ; \quad \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_R = \dot{Q}_x\vec{i} + \dot{Q}_y\vec{j} + \dot{Q}_z\vec{k}$$

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{R_0} = \dot{Q}_x\vec{i} + \dot{Q}_y\vec{j} + \dot{Q}_z\vec{k} + Q_x\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0} + Q_y\left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{R_0} + Q_z\left(\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_{R_0}$$

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_R + Q_x\left(\vec{\omega} \wedge \vec{i}\right) + Q_y\left(\vec{\omega} \wedge \vec{j}\right) + Q_z\left(\vec{\omega} \wedge \vec{k}\right)$$

$$= \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_R + \vec{\omega} \wedge \left(Q_x\vec{i} + Q_y\vec{j} + Q_z\vec{k}\right)$$

d'où la formule fondamentale : $\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_R + \vec{\omega}(R/R_0) \wedge \vec{Q}$

II - Relation entre les vitesses des points d'un solide

1. Formule générale

R_0 est le repère (ou solide) de référence ; **R** est lié au solide et $\overrightarrow{\omega(R/R_0)}$ définit la vitesse angulaire du solide par rapport à R_0.

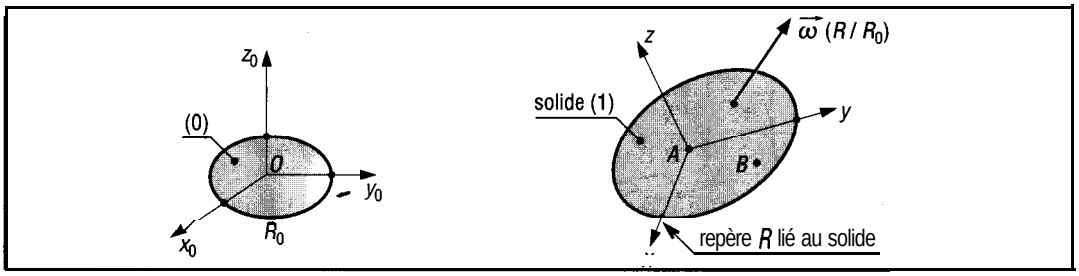


Fig. 4

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R_0} = \left[\frac{d\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)}{dt}\right]_{R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_{R_0} - \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

Utilisons la formule fondamentale du paragraphe 1 3 :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R} + \overrightarrow{\omega_{(R/R_0)}} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0} + \overrightarrow{\omega_{(R/R_0)}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

En rassemblant les deux résultats, on obtient

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$
ou $$\overrightarrow{V_{B(R/R0)}} = \overrightarrow{V_{A(R/R0)}} + \overrightarrow{\omega_{(R/R0)}} \wedge \overrightarrow{AB}$$
ou $$\overrightarrow{V_{B1/0}} = \overrightarrow{V_{A1/0}} + \overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

2. Propriété dëquiprojectivité

Cette propriété est la généralisation à l'espace de l'équiprojectivité abordée dans le chapitre « mouvement plan ».

En multipliant scalairement par $\overrightarrow{AB}$ les deux membres de la formule précédente et en remarquant que $(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, on obtient :

$$\overrightarrow{V_{B1/0}} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_{A1/0}} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Autrement dit, pour deux points A et B appartenant à un même solide (1), en mouvement par rapport à un solide (ou repère) (0), la projection de $\overrightarrow{V_{B1/0}}$ sur la droite AB est égale à la projection de $\overrightarrow{V_{A1/0}}$ sur AB.

Remarque : on obtient une relation analogue en multipliant scalairement les deux membres par $\overrightarrow{\omega_{1/0}}$.

$$\overrightarrow{V_{B1/0}} \cdot \overrightarrow{\omega_{1/0}} = \overrightarrow{V_{A1/0}} \cdot \overrightarrow{\omega_{1/0}}$$

III • Torseur cinématique

1. Définition

Compte tenu des propriétés des paragraphes II 1 et II 2, l'ensemble des vecteurs-vitesses des points d'un même solide à une structure de torseur, appelé torseur cinématique. Ce torseur possède les propriétés générales des autres torseurs.

Exemple de notation (solide 1 en mouvement par rapport à 0)

$$\{v_{1/0}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{A\,1/0}} \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \omega_x & V_{Ax} \\ \omega_y & V_{Ay} \\ \omega_z & V_{Az} \end{matrix} \right\}_A \qquad \begin{matrix} \overrightarrow{\omega_{1/0}} = \omega_x \vec{i}_0 + \omega_y \vec{j}_0 + \omega_z \vec{k}_0 ; \\ \overrightarrow{V_{A1/0}} = V_{Ax} \vec{i}_0 + V_{Ay} \vec{j}_0 + V_{Az} \cdot \vec{k}_0 \end{matrix}$$

Remarques : $\overrightarrow{\omega_{1/0}}$ **ou** $\overrightarrow{\omega_{(R/R0)}}$ est la résultante générale du torseur et a même valeur en tout point. $\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\omega}$ est analogue à la relation $\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}$ du chapitre « torseurs d'actions mécaniques ».

2. Propriétés

L'axe central du torseur est aussi appelé axe de viration. Pour tous les points P appartenant à cet axe, $\overrightarrow{V_P}$ est colinéaire à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ du solide, leur mouvement peut être comparé à celui d'un tournevis lors d'une opération de vissage ou de dévissage (fig. 5 : système vis-écrou).

Si le torseur est un glisseur, la vitesse $\overrightarrow{V_P}$ des points de l'axe central est nulle ; seule $\vec{\omega}$ existe et l'axe de viration devient axe instantané de rotation, analogie avec les CIR des mouvements plan (fig. 6 : cône roulant sur un plan).

Dans le cas le plus général, la position géométrique de l'axe de viration varie dans l'espace au cours du temps (analogie avec les CIR).

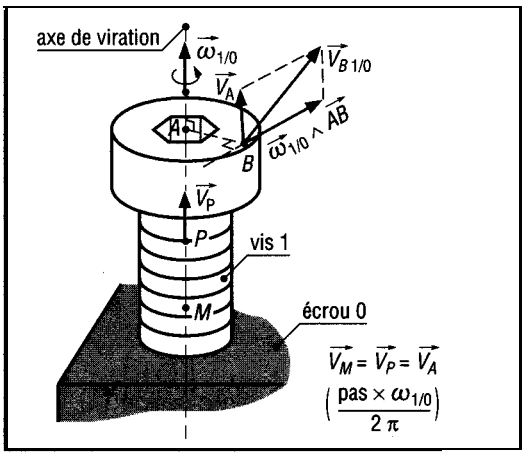


Fig. 5

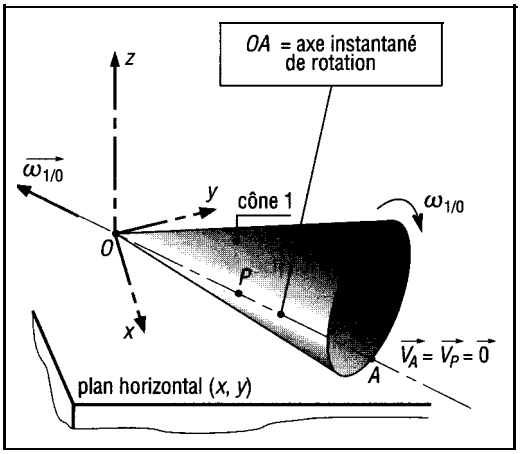
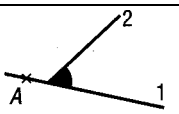
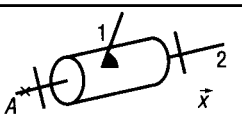
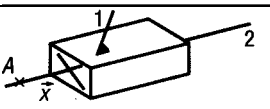
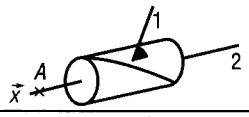
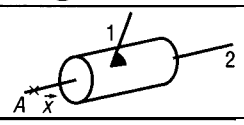
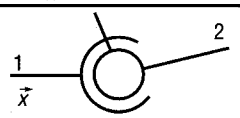
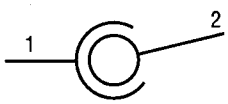
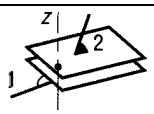
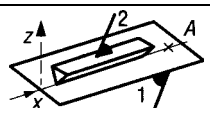
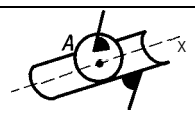
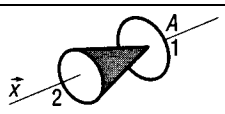


Fig. 6

3. Torseurs cinématiques des liaisons mécaniques usuelles

Nom de la liaison	Degré de liberté	Représentation en perspective	Torseur cinématique $\{V_{2/1}\}_A$
Encastrement ou liaison fixe	0		$\left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_A$
Pivot (axe $\vec{x}$)	1		$\left\{ \begin{matrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_A$
Glissière (axe $\vec{x}$)	1		$\left\{ \begin{matrix} 0 & V_{Ax} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_A$

Nom de la liaison	**Degré** de liberté	Représentation en perspective	**Torseur** cinématique $\{V_{2/1}\}_A$
Hélicoïdale (axe $\vec{x}$)	1		$\begin{Bmatrix} \omega_x & k\omega_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$ k dépend du pas
Pivot **glissant** (axe $\vec{x}$)	2		$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_{Ax} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$
Sphérique ou rotule à doigt (centre A)	2		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_A$
Rotule ou sphérique (centre A)	3		$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_A$
Appui plan (normale $\vec{z}$)	3		$\begin{Bmatrix} 0 & V_{Ax} \\ 0 & V_{Ay} \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_A$
Linéaire rectiligne ($\vec{x}, \vec{z}$)	4		$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_{Ax} \\ 0 & V_{Ay} \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_A$
Sphère cylindre ou linéaire annulaire (axe $\vec{x}$)	4		$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_{Ax} \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_A$
Sphère plan ou ponctuelle (direction $\vec{x}$)	5		$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & V_{Ay} \\ \omega_z & V_{Az} \end{Bmatrix}_A$

'ig. 7

IV - Relation entre les accélérations des points d'un solide

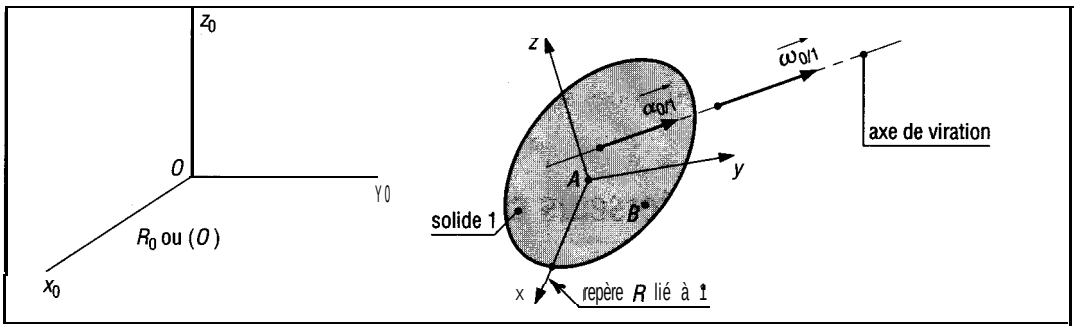


Fig. **8**

$\overrightarrow{\omega_{(R/R0)}} = \overrightarrow{\omega_{1/0}} = \vec{\omega}$ est la vitesse de rotation du solide 1 et $\overrightarrow{\alpha_{(R/R0)}} = \overrightarrow{\alpha_{1/0}} = \vec{\alpha}$ l'accélération angulaire du mouvement.

Remarque : $\overrightarrow{\alpha_{1/0}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\omega_{1/0}}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\omega_{1/0}}}{dt}\right)_R + \overrightarrow{\omega_{(R/R_0)}} \wedge \overrightarrow{\omega_{1/0}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\omega_{1/0}}}{dt}\right)_R$

En dérivant par rapport au temps et dans R_0, la relation des vitesses du paragraphe II 1, on obtient :

$$\overrightarrow{a_{B1/0}} = \overrightarrow{a_{A1/0}} + \overrightarrow{\alpha_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge (\overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB})$$
$$\text{ou } \overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB})$$

Remarque : cette relation généralise celle abordée dans le chapitre « mouvement plan ». $\overrightarrow{a_B} \cdot \overrightarrow{AB}$ est différent de $\overrightarrow{a_A} \cdot \overrightarrow{AB}$; il n'y a pas équiprojectivité des accélérations sur $\overrightarrow{AB}$ et, de ce fait, il n'existe pas de torseur des accélérations.

V-Compositiondemouvements

Les relations sont les mêmes que celles abordées dans le chapitre « composition de mouvements » (se reporter à ce chapitre pour des détails complémentaires).

1. Rappels des formules fondamentales

$$\overrightarrow{V_{B2/0}} = \overrightarrow{V_{B2/1}} + \overrightarrow{V_{B1/0}}$$
$$\overrightarrow{\omega_{2/0}} = \overrightarrow{\omega_{2/1}} + \overrightarrow{\omega_{1/0}}$$
$$\overrightarrow{a_{B2/0}} = \overrightarrow{a_{B2/1}} + \overrightarrow{a_{B1/0}} + \overrightarrow{a_{BC}} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{a_{BC}} = 2\,\overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{B2/1}}$$

Cas des accélérations angulaires

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{\omega_{2/0}}}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\omega_{2/1}}}{dt}\right)_0 + \left(\frac{d\,\overrightarrow{\omega_{1/0}}}{dt}\right)_0$$
$$\overrightarrow{\alpha_{2/0}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\omega_{2/1}}}{dt}\right)_1 + \overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{\omega_{2/1}} + \overrightarrow{\alpha_{1/0}}$$

$$\overrightarrow{\alpha_{2/0}} = \overrightarrow{\alpha_{2/1}} + \overrightarrow{\alpha_{1/0}} + \overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{\omega_{2/1}}$$

Remarques : dans les relations précédentes, $\overrightarrow{V_{B1/0}}$ et $\overrightarrow{a_{B1/0}}$ peuvent être remplacées par les formules des paragraphes II 1 et IV permettant de passer par un point A, autre point du solide, dont les caractéristiques seraient connues.

2. Composiion des **torseurs** cinématiques

Cette composition résulte de la composition des vitesses.

$$\{v_{2/0}\}_A = \{v_{2/1}\}_A + \{v_{1/0}\}_A$$
$$\text{ou} \quad \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\omega_{2/0}} \\ \overrightarrow{V_{A2/0}}\end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{A2/1}}\end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{A1/0}}\end{matrix}\right\}_A$$

VI - Paramétrages utilisés dans l'espace

Pour repérer la position d'un solide (S ou 1) dans l'espace par rapport à un solide ou repère de référence (0 ou R_0), on commence généralement par lier un repère R_S (A, x_S, y,, z_S) ou R_1 au solide. La position du solide est définie par la position de R_S par rapport à R,. Mêmes remarques pour les mouvements et les grandeurs cinématiques liées au solide. Dans le cas le plus général, six paramètres seront nécessaires pour définir avec exactitude la position de R_S par rapport à R_0 :

- trois paramètres pour définir l'origine (A) de R_S ;
- trois paramètres pour définir la position angulaire de R_S.

1. Paramètres utilisables pour repérer la position d'un point

a) Coordonnées cartésiennes dans l'espace (x, y, z).

b) Coordonnées cylindriques (r, θ, z).

c) Coordonnées sphériques (ρ, θ, ψ).

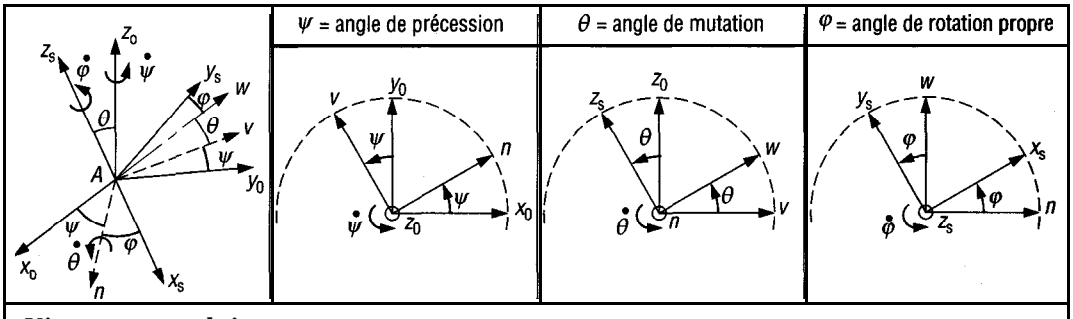
Remarques : dans le premier cas, on dispose de trois distances, dans le second de deux distances plus un angle, dans le troisième de deux angles plus une distance (voir formulaires).

2. Paramètres utilisés pour repérer la **position** angulaire du **solide**

Un ou deux angles judicieusement choisis suffisent pour un grand nombre d'applications courantes. Pour les cas les plus complexes, les angles d'Euler sont régulièrement utilises (robots, avions, gyroscopes, etc.).

Remarque : le choix et la position des angles d'Euler peuvent varier sensiblement d'un pays à l'autre et d'un ouvrage à l'autre ; cependant, le principe reste le même.

Angles d'Euler : on passe de R_0 (x,, y,, z_0), le repère de référence, à R_S (x_S, $y_,$, z_S), le repère lié au solide, par trois rotations d'axe successives, et inversement.



Vitesse angulaire

$$\overrightarrow{\omega_{(S/R0)}} = \dot{\psi}\,\overrightarrow{z_0} + \dot{\varphi}\,\overrightarrow{z_S} + \dot{\theta}\,\overrightarrow{n}$$

$$\overrightarrow{\omega_{(S/R0)}} = (\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\,\overrightarrow{x_0} + (\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi)\,\overrightarrow{y_0} + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\,\overrightarrow{z_0}$$

$$\overrightarrow{\omega_{(S/R0)}} = (\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi)\,\overrightarrow{x_S} + (\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi)\,\overrightarrow{y_S} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\,\overrightarrow{z_S}$$

Remarques : $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$; $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$; $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$

ig. 9

VII - Notions sur la théorie des mécanismes

1. Chaînes cinématiques et mécanismes

Un mécanisme se différencie d'une machine par le fait qu'il ne réalise pas de transformation de l'énergie, comme par exemple un moteur (électrique, thermique, etc.). Une boîte de vitesse d'automobile et le système bielle-manivelle sont des mécanismes.

Une chaîne cinématique est un ensemble de solides en liaison les uns avec les autres, Plusieurs cas sont possibles :

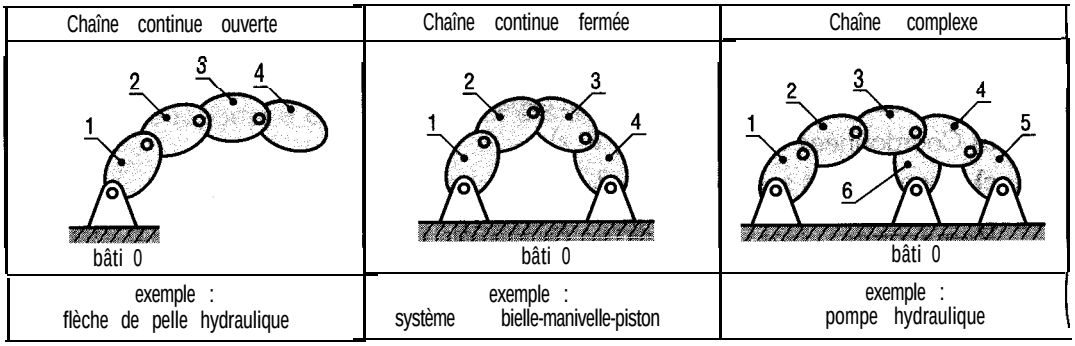


Fig. 10

Une chaîne complexe est constituée de plusieurs chaînes continues fermées, imbriquées les unes avec les autres.

Si n est le nombre de solides du mécanisme et L le nombre de liaisons entre solides, le nombre N_C de chaînes fermées indépendantes qu'il est possible d'étudier est :

$$N_C = L - n + 1$$

Remarque : une chaîne continue ouverte ne constitue pas un mécanisme, au sens de la théorie des mécanismes, dans la mesure où elle ne réalise pas de transformation de mouvement (il n'existe pas de loi entrée/sortie).

2. Relation fondamentale

$$h = m_u + m_i + \Sigma n_s - 6(n - 1)$$

n : nombre de solides du mécanisme, bâti compris

m_u : mobilité du mécanisme ou mobilité utile

m_i : mobilités internes d'éléments particuliers

Σn_s : nombre des inconnues statiques dues aux liaisons

h : degré d'hyperstatisme du mécanisme ; si $h = 0$, le système est isostatique ; si $h \geqslant 1$, le système est hyperstatique d'ordre h.

Remarques : si n_C est le nombre des inconnues cinématiques d'une liaison et n_S le nombre des inconnues statiques, alors $n_S + n_C = 6$. Par exemple, pour une liaison pivot, $n_S = 5$ et $n_C = 1$.

L'exploitation de la relation dépend de l'identification et de la schématisation retenue pour les liaisons du mécanisme étudié ; un grand soin doit donc y être apporté.

3. Exemple : moteur hydraulique

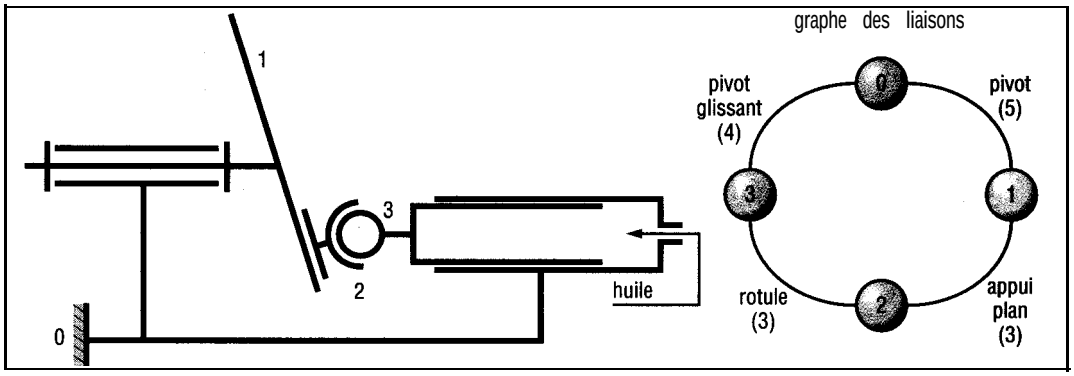


Fig. 11

$n = 4$; $m_u = 1$; $m_i = 2$; $n_S = 5 + 3 + 3 + 4 = 15$;
$h = 1 + 2 + 15 - 18 = 0$ (système isostatique).
Les mobilités internes correspondent aux rotations propres des solides 2 et 3 autour de leur axe de révolution.

EXERCICE RÉSOLU

1 Le mécanisme proposé sous forme schématique se compose d'une bague coulissante 1 liée en A (pivot) à une bielle 2 entraînant en B (rotule centre B) une tige coulissante 3.
Si la bague se déplace par rapport à la tige fixe (0) à la vitesse constante $\overrightarrow{V_{A1/0}} = -3\,\vec{j}$ (m.s^{-1}), déterminer $\overrightarrow{V_{B3/0}}$, $\overrightarrow{\omega_{2/0}}$, $\overrightarrow{a_{B3/0}}$ et $\overrightarrow{\alpha_{2/0}}$.

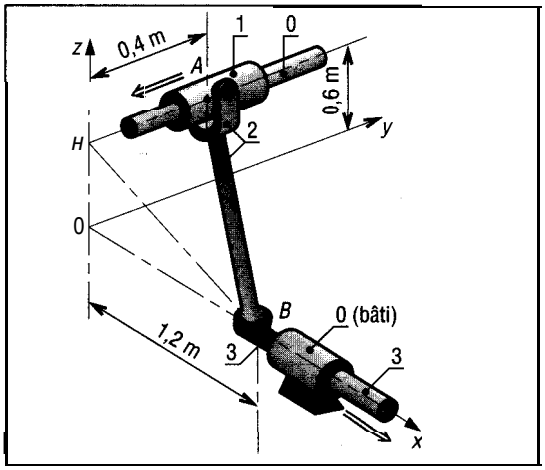


Fig. 12

Résolution

a) Étude des vitesses : $\overrightarrow{AB} = 1{,}2\,\vec{i} - 0{,}4\,\vec{j} - 0{,}6\,\vec{k}$
Pour la bielle 2, nous avons : $\overrightarrow{V_{B2/0}} = \overrightarrow{V_{A2/0}} + \overrightarrow{\omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{V_{B2/0}} = \overrightarrow{V_{B3/0}} = V$, $\vec{i}$ ($\overrightarrow{V_B}$ est portée par l'axe des x)
$\overrightarrow{V_{A2/0}} = \overrightarrow{V_{A1/0}} = -3\,\vec{j}$; $\overrightarrow{\omega_{2/0}} = \omega_x\,\vec{i} + \omega_y\,\vec{j} + \omega_z\,\vec{k}$.
L'équation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} V_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ -0{,}4 \\ -0{,}6 \end{pmatrix}$$

On obtient les trois équations de projection :

$-0{,}6\,\omega_y + 0{,}4\,\omega_z = V_B$ (1)
$0{,}6\,\omega_x + 1{,}2\,\omega_z = 3$ (2)
$0{,}4\,\omega_x + 1{,}2\,\omega_y = 0$ (3)

Nous avons trois équations à quatre inconnues (V_B, ω_x, ω_y, ω_z); une équation supplémentaire est fournie en remarquant que $\overrightarrow{\omega_{2/0}}$ = y/; + $\overrightarrow{\omega_{1/0}}$. Sachant que $\overrightarrow{\omega_{2/1}}$ est perpendiculaire au plan (AH, HB) et que $\overrightarrow{\omega_{1/0}}$ est porté par AH, il en résulte que $\overrightarrow{\omega_{2/0}}$ est perpendiculaire à BH. Autrement dit :

$\overrightarrow{\omega_{2/0}} \cdot \overrightarrow{HB} = 0 = (\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) \cdot (1{,}2\,\vec{i} - 0{,}6\,\vec{k}) = 1{,}2\,\omega_x - 0{,}6\,\omega_z$

Résultat : $\overrightarrow{V_{B3/0}} = 1\ \vec{i}\ (\text{m.s}^{-1})$ et $\overrightarrow{\omega_{2/0}} = 1\ \vec{i} - 0{,}33\ \vec{j} + 2\ \vec{k}$

Remarque : des vérifications sont possibles avec $\overrightarrow{V_B} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_A} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{V_B} \cdot \vec{\omega} = \overrightarrow{V_A} \cdot \vec{\omega}$.

b) Étude des accélérations

$\overrightarrow{a_{B2/0}} = \overrightarrow{a_{A2/0}} + \overrightarrow{\alpha_{2/0}} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\omega_{2/0}} \wedge (\overrightarrow{\omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{a_{A2/0}} = \overrightarrow{a_{A2/1}} = \vec{0}$ ($\overrightarrow{V_{A1/0}}$ = constante) ; $\overrightarrow{a_{B2/0}} = \overrightarrow{a_{B3/0}} = a_B \cdot \vec{i}$;

$\overrightarrow{\alpha_{2/0}} = a_x \cdot \vec{i} + \alpha_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$

L'équation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ -0{,}4 \\ -0{,}6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}33 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient les équations de projection :

$-0{,}6\alpha_y + 0{,}4\,a_z = a_x + 6$ (1)

$0{,}6\,a_x + 1{,}2\,a_z = 2$ (2)

$0{,}4\,a_x + 1{,}2\,\alpha_y = 3{,}33$ (3)

Une équation supplémentaire est fournie par

$a_{x,y} = \overrightarrow{\alpha_{2/1}} + \overrightarrow{\chi_{1,0}} + \overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge Y_{/}$;

$\overrightarrow{\alpha_{2/0}} - \overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{\omega_{2/1}} = \overrightarrow{\alpha_{2/1}} + \overrightarrow{\alpha_{1/0}}$ est perpendiculaire à HB.

Le raisonnement est analogue à celui du paragraphe 1 avec $\overrightarrow{\omega_{2/0}}$.

$(\overrightarrow{\alpha_{2/0}} - \overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{\omega_{2/1}}) \cdot \overrightarrow{HB} = 0 = 1{,}2\,a_x - 0{,}6\,a_z + 1$

en remarquant que : $\overrightarrow{\omega_{2/1}} = 1\ \vec{i} + 2\ \vec{k}$ et $\overrightarrow{\omega_{1/0}} = -0{,}33\ \vec{j}$.

Résultats : $\overrightarrow{a_{B2/0}} = -8{,}33\ \vec{i}\ (\text{m.s}^{-2})$; $\overrightarrow{\alpha_{2/0}} = -1{,}33\ \vec{i} + 3{,}86\ \vec{j} - 1\ \vec{k}\ (\text{rad.s}^{-2})$

EXERCICES À RÉSOUDRE

2 Le mécanisme ci-contre se compose d'une manivelle (1) entraînant en A (rotule centre A) une bielle (2) qui transmet le mouvement en B (rotule centre B) à une manivelle (3) en liaison pivot (axe 0, x) par rapport au bâti (0). (1) est en liaison pivot (axe C, z) par rapport au bâti : ACH // à y ; $\omega_{1/0} = 30\ \text{rad.s}^{-1}$; $\overrightarrow{\omega_{2/0}}$ et $\overrightarrow{\alpha_{2/0}}$ sont perpendiculaires à la direction AB.

Déterminer $\overrightarrow{V_{A1/0}}$; $\overrightarrow{V_{B3/0}}$, $\overrightarrow{\omega_{2/0}}$, $\overrightarrow{a_{A1/0}}$, $\overrightarrow{a_{B3/0}}$ et $\overrightarrow{\alpha_{2/0}}$.

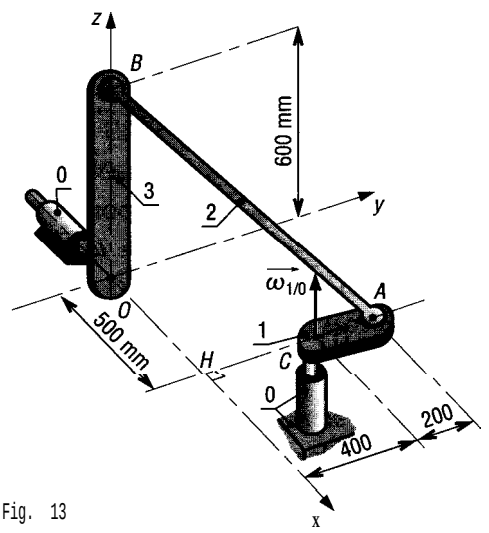


Fig. 13

Réponse

$\overrightarrow{V_{A1/0}} = -6\ \vec{i}\ (\text{m.s}^{-1})$;
$\overrightarrow{V_{B3/0}} = -5\ \vec{j}$; $\overrightarrow{a_{A1/0}} = -180\ \vec{j}\ (\text{m.s}^{-2})$;
$\overrightarrow{a_{B3/0}} = -120\,\vec{j} + 41{,}6\ \vec{k}$; $\omega_{2/0} = 7{,}9\ \text{rad.s}^{-1}$;
$\alpha_{2/0} = 39{,}3\ \text{rad.s}^{-2}$.

3 Une antenne parabolique (3) est entraînée en rotation (axe A, u) par un moteur (2). Le moteur est lui aussi animé d'un mouvement de rotation (axe A, y) par rapport à la tourelle (1). L'ensemble peut pivoter autour de l'axe (0, z).
$\omega_{3/2} = 3$ rad.s^{-1} ; $a_{3/2} = 4$ rad.s^{-2} ;
$\omega_{2/1} = 2$ rad.s^{-1} ; $\alpha_{2/1} = 0$;
$\omega_{1/0} = 6$ rad.s^{-1} ; $\alpha_{1/0} = 5$ rad.s^{-2}.
Déterminer $\overrightarrow{\omega_{3/0}}$ et $\overrightarrow{\alpha_{3/0}}$.

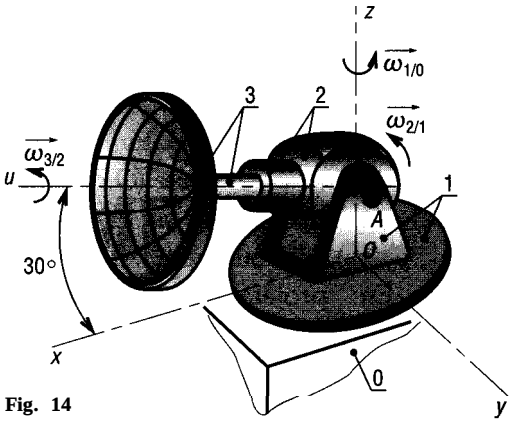


Fig. 14

Réponse

$\overrightarrow{\omega_{3/0}} = 2{,}6\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 7{,}5\,\vec{k}$ (rad.s^{-1}) ;
$\overrightarrow{\alpha_{3/0}} = -5{,}54\,\vec{i} + 15{,}6\,\vec{j} + 1{,}8\,\vec{k}$ (rad.s^{-2}).

4 Une machine d'entraînement aux accélérations pour astronautes se compose d'une nacelle (3), entraînée en rotation (axe A, u) par une chape motorisée (2). La chape est elle aussi animée d'un mouvement de rotation (axe B, x,) par rapport au bras (1). L'ensemble peut pivoter autour de l'axe (0, z). Les liaisons $L_{0/1}$, $L_{1/2}$ et $L_{2/3}$ sont des liaisons-pivots.
$\omega_{1/0} = 0{,}5$ rad.s^{-1} ; $\alpha_{1/0} = 0$;
$\omega_{2/1} = 0{,}2$ rad.s^{-1} ; $\alpha_{2/1} = 0$;
$\omega_{3/2} = 0{,}6$ rad.s^{-1} ; $\alpha_{3/2} = 0$; l'axe (A, u) est orthogonal à (B, x_1).
Déterminer $\overrightarrow{\omega_{3/0}}$ et $\overrightarrow{\alpha_{3/0}}$ si x_1 est supposé parallèle à x et u variable.

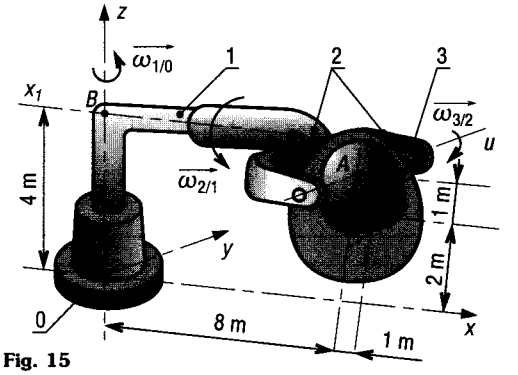


Fig. 15

Réponse

$\overrightarrow{\omega_{3/0}} = 0{,}2\,\vec{i} + 0{,}6\cos 0{,}2\,t\,\vec{j} + (0{,}5 + 0{,}6\sin 0{,}2\,t)\,\vec{k}$;
$\overrightarrow{\alpha_{3/0}} = -0{,}3\cos 0{,}2\,t\,\vec{i} + (0{,}1 - 0{,}12\sin 0{,}2\,t)\,\vec{j} + 0{,}12\cos 0{,}2\,t\,\vec{k}$.

❑ Renrendre l'exercice 4, u est supposé parallèle à y. Déterminer $\overrightarrow{V_{G3/0}}$ et $\overrightarrow{a_{G3/0}}$ supportées par l'astronaute.

❑ Le fonctionnement et l'analyse d'un certain nombre de mécanismes se ramènent à l'étude du mouvement d'un cône 2 sur un plan horizontal (0). On suppose qu'il n'y a pas glissement entre le cône et le plan le long de la droite de contact OA. R_1 (0, x_1, y,, z_1) ou 1 est un repère intermédiaire, x_1 est l'axe du cône ; z_0 est perpendiculaire au plan et a le demi-angle du cône. Si la vitesse $\overrightarrow{V_{B2/0}} = \overrightarrow{V_B}$ est supposée constante, déterminer $\overrightarrow{\omega_{2/1}}$, $\overrightarrow{\omega_{2/0}}$, $\overrightarrow{\omega_{1/0}}$ et $\overrightarrow{\alpha_{2/0}}$ en fonction de V_B, R et a.

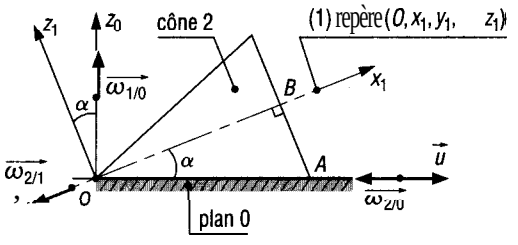


Fig. 16

Réponse

$\overrightarrow{\omega_{2/0}} = -\frac{V_B}{R\cos\alpha}\vec{u}$; $\overrightarrow{\omega_{1/0}} = -\frac{V_B\tan\alpha}{R\cos\alpha}\vec{z_0}$; $\overrightarrow{\omega_{2/1}} = -\frac{V_B}{R\cos^2\alpha}\vec{x_1}$; $\overrightarrow{\alpha_{2/0}} = -\frac{V_B^2\sin\alpha}{R^2\cos^3\alpha}\vec{y_1}$.

7 La transmission par cardan proposée schématiquement se compose d'une fourche (1) tournant à la vitesse constante $\omega_{1/0}$ par rapport au bâti (0) (axe 0, x_0). La fourche (1) transmet son mouvement à une fourche (2) (axe 0, x_2) par l'intermédiaire d'un croisillon (3). Nature des liaisons : $L_{0/1}$ pivot d'axe (0, x_1) ; $L_{1/3}$ pivot d'axe (0, z_1) ; $L_{3/2}$ pivot d'axe (0, y_2) ; $L_{2/0}$ pivot d'axe (0, x_2) ; OA est perpendiculaire à OB ; R_0 (0, x_0, y,, z_0) est lié au bâti ; R_1 (0, x_1, y,, z_1) est lié à la fourche 1 et R_2 (0, x_2, y,, z_2) à la fourche (2).

a) En projetant la relation de composition des vitesses angulaires $\overrightarrow{\omega_{2/0}} = \overrightarrow{\omega_{2/3}} + \overrightarrow{\omega_{3/1}} + \overrightarrow{\omega_{1/0}}$ sur les axes x_0, y,, z_0 et en remarquant que : $\left\| \overrightarrow{y_2} \right\| = \dfrac{\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_2}}{\left\| \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_2} \right\|}$, montrer que $\dfrac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \dfrac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta_1}$.

b) En déduire que $\tan \theta_1 = \tan \theta_2 . \cos a$.

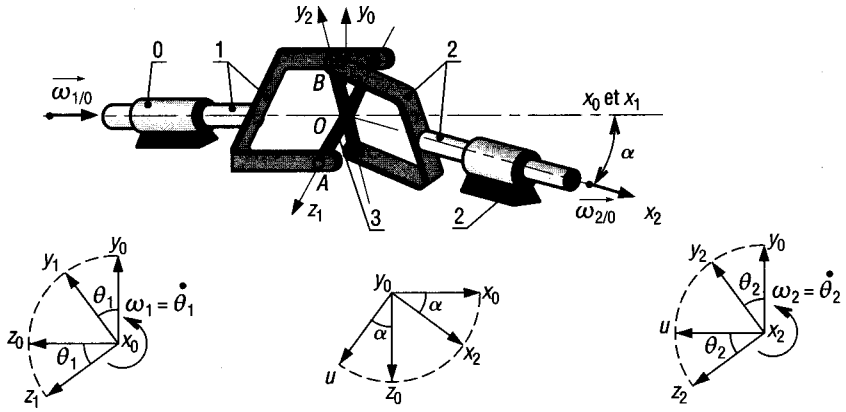


Fig. 17

❑ Un variateur mécanique est réalisé à partir de deux roues de friction coniques (1) et (3) en contact en A et B avec une série de sphères (2) identiques dont l'axe de rotation (0, z) est réglable angulairement (a) par rapport au bâti (0), non représenté. Les liaisons $L_{1/0}$, $L_{3/0}$ et $L_{4/2}$ sont des liaisons pivots, $L_{4/0}$ est un encastrement réglable (- 30" ⩽ a ⩽ 30"). Si la vitesse d'entrée $\omega_{1/0}$ est constante et s'il n'y a pas de glissement en A entre (1) et (2), en B entre (2) et (3), déterminer le rapport des vitesses $(\omega_{3/0} / \omega_{1/0})$ et la plage de variation de l'appareil.

$-30° < \alpha < 30°$
$\omega_{1/0} = 150$ rad.s^{-1}
$a = b = 25$
$R = 60$
$r = 35$

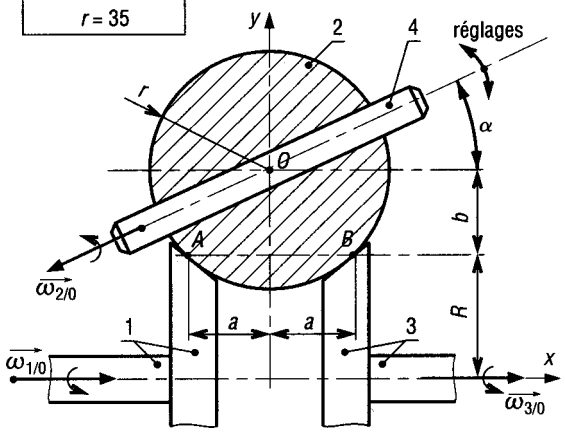


Fig. 18

Réponse

$\dfrac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = \dfrac{b + a \tan \alpha}{b - a \tan \alpha}$

$\dfrac{1}{3{,}73} \leqslant \dfrac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} \leqslant 3{,}73.$

16 DYNAMIQUE MOUVEMENTS PLANS

OBJECTIFS

- Énoncer le principe fondamental de la dynamique pour les mouvements de translation rectiligne, mouvements de rotation d'axe et mouvements plans généraux.
- Indiquer l'alternative du principe de d'Alembert en définissant la notion de force d'inertie.
- Traiter les ensembles de solides, les centres de percussions, les mouvements pendulaires et les systèmes dynamiquement équivalents.

La dynamique est le chapitre de la mécanique qui étudie les mouvements des solides en relation avec les forces qui les produisent. L'étude et la compréhension de ce chapitre suppose l'acquisition des connaissances abordées en statique et en cinématique.

Sur un plan historique, les découvertes des principes de la dynamique sont plus récentes que celles relatives à la statique. Galilée (1564-1642), le premier, effectua une approche scientifique des phénomènes. Ses travaux, déterminants, sont à l'origine des résultats de Huygens et Newton. Newton fut le premier à formuler correctement le principe fondamental de la dynamique et la loi de la gravitation universelle. Par la suite, Euler, d'Alembert, Lagrange, Laplace, Poinsot, Coriolis, Einstein et d'autres apportèrent une contribution importante au développement de cette science essentielle.

En ce qui concerne la technologie et ses applications, la dynamique est plus récente et se développe avec l'ère industrielle et la construction des machines travaillant aux vitesses élevées avec ou sans chocs.

Remarque : Il y a trois méthodes possibles pour traiter un même problème de dynamique, chacune ayant ses avantages et ses inconvénients :

1 - par application directe de la loi de Newton ou du principe fondamental ;

2 - par utilisation des théorèmes relatifs au travail et à l'énergie (voir le chapitre « énergétique ») ;

3 - à partir des théorèmes portant sur les quantités de mouvement et le moment cinétique.

Les équations de Lagrange, non abordées dans cet ouvrage, offrent également des possibilités.

1 - Principe fondamental : cas d'une translation rectiligne

'1. Énoncé

L'énoncé proposé s'applique indifféremment à un point matériel de masse m ou à un solide en translation rectiligne de masse m et de centre de gravité G.

1re loi

La première loi correspond au principe fondamental de la statique (voir partie statique). Elle s'applique aussi bien à un solide en équilibre qu'à un solide évoluant à vitesse constante.

2e loi

L'accélération $\vec{a_G}$ du centre de gravité G d'un solide en translation rectiligne par rapport à un repère (ou solide) absolu est proportionnelle à la résultante $(\Sigma \vec{F_{ext}})$ des forces ou actions extérieures agissant sur le solide et a même direction et même sens que celle-ci.

$$\Sigma \vec{F_{ext}} = m \cdot \vec{a_G}$$

- $\vec{a_G}$: accélération (absolue) du solide en $m.s^{-2}$
- m : masse du solide en kg
- $\Sigma \vec{F_{ext}}$: résultante des forces extérieures en N.

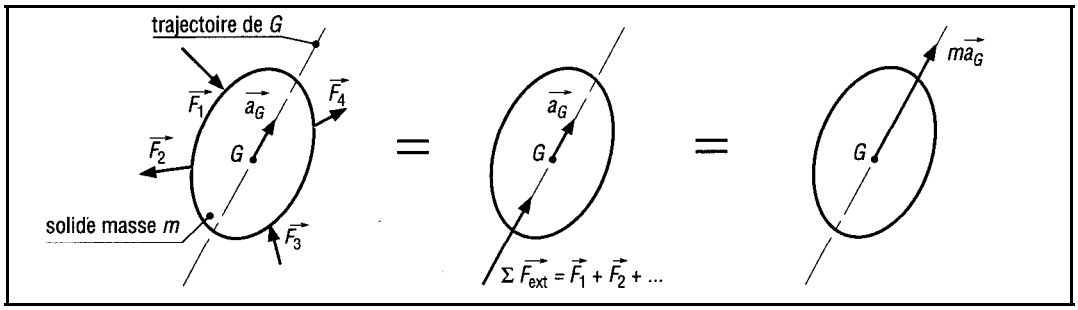


Fig. 1

Remarque : la résultante $\Sigma \vec{F_{ext}}$ doit passer par G, sinon il y a mouvement plan.

3e loi

En statique et en dynamique, les actions mutuelles entre deux solides sont égales et opposées.

2. Remarques

a) Repère absolu ou galiléen

Pour que l'application du principe fondamental soit correcte, l'accélération $\vec{a_G}$ doit être une accélération absolue.

Par commodité, l'accélération $\vec{a_G}$ est généralement repérée ou déterminée par rapport à un repère lié à la terre prise comme référence absolue. Cependant, la terre n'est pas un référentiel absolu ou galiléen rigoureux mais approché.

Pour la plupart des problèmes de mécanique usuels, cette approximation'suffit et amène des erreurs négligeables.

Pour un certain nombre de problèmes faisant intervenir des avions, fusées, missiles et autres, il est parfois nécessaire de faire intervenir les accélérations engendrées par le mouvement de la terre.

Exemple : pour un corps en chute libre, la rotation de la terre engendre une légère accélération dirigée vers l'est (accélération de Coriolis) créant une perturbation du mouvement de chute libre. Le solide ne tombe pas exactement verticalement mais subit une légère déviation vers l'est égale à :

$$d = \frac{2\omega}{3} \cos\theta \sqrt{\frac{2h^3}{g}}$$

$\omega = 0{,}729 \times 10^{-4}$ rad.s^{-1} (vitesse rotation terre)
$g = 9{,}81$ m.s^{-2}
h : hauteur de chute en m
θ : latitude nord ou sud

Pour $h = 250$ m ; $\theta = 45$" (France), on obtient d = 61,3 mm.

b) Temps relatif et temps absolu

Dans l'équation de Newton, le temps est considéré comme une grandeur absolue, s'écoulant inexorablement d'arrière en avant au rythme régulier indiqué par les pendules et les calendriers.

D'après Einstein, le temps n'est pas absolu mais relatif et dépend de la vitesse propre de l'observateur et de la position finale de celui-ci. Cependant, la notion de temps relatif n'est vraiment sensible que pour des particules se déplaçant à de très hautes vitesses (proches de celle de la lumière : 300 000 km.s^{-1}).

Exemple : si on place une pendule dans un satellite à 644 km d'altitude évoluant à 27 080 km.h^{-1}, celle-ci prend un retard de 0,000 001 85 s à chaque orbite par rapport à une pendule identique située au pôle.

3. Exemples

a) Exemple 1

Sphère de 1 kg en chute libre, résistance de l'air négligé.

$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{P}$ = vecteur-poids

$\overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{g}$ = [accélération de la pesanteur : $g = 9{,}81$ m.s^{-2}]

$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = m\,\overrightarrow{a_G}$ donne $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$.

En projection sur la verticale z :

$P = mg = 1 \times 9{,}81 = 9{,}81$ N.

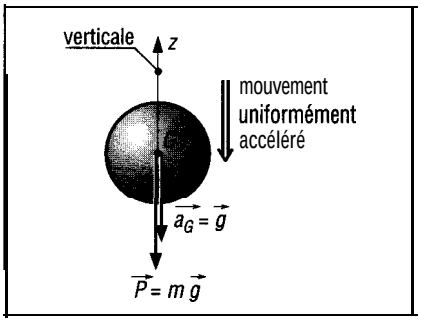


Fig. 2

b) Exemple 2

Une navette spatiale est supposée à l'arrêt dans l'espace. Les trois moteurs sont allumés, la poussée de chaque moteur est de 2 300 kN, les trois poussées sont parallèles et leur action résultante ($\Sigma \overrightarrow{F_{ext}}$) passe par G. Déterminons l'accélération supportée par les astronautes si la masse de la navette est de 100 tonnes.

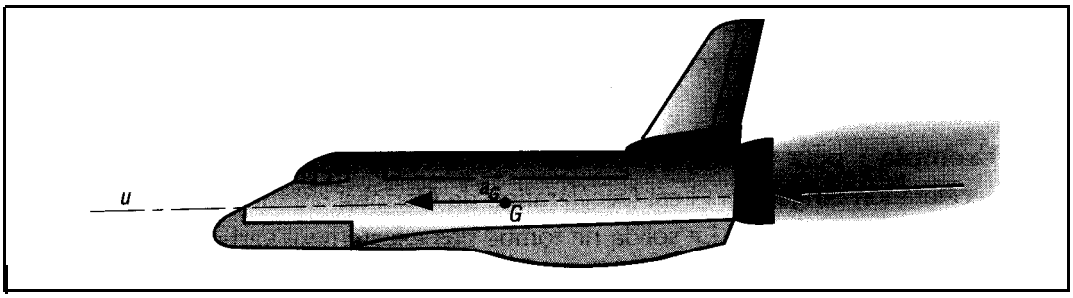


Fig. 3

$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$ donne en projection sur la direction du mouvement (u)

$\Sigma F_{ext} = 3 \times 230\,000 = m\,a_G = 100\,000\,a_G$

$a_G = \dfrac{230\,000 \times 3}{100\,000} = 69 \text{ m.s}^{-2} \simeq 7\,g$

L'accélération supportée est 7 fois supérieure à l'accélération de la pesanteur g.

4. Principe de d'Alembert

La 2^e loi du principe fondamental peut aussi s'écrire sous la forme du principe de d'Alembert :

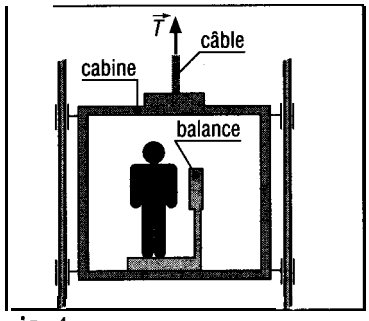
$$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} - m \cdot \overrightarrow{a_G} = \Sigma \overrightarrow{F_{ext}} + \overrightarrow{F_I} = \overrightarrow{0}$$

$\overrightarrow{F_I} = (- m \cdot \overrightarrow{a_G})$ est appelée force d'inertie, cette force est opposée à l'accélération $\overrightarrow{a_G}$.

Remarque : écrit sous cette forme, l'exploitation du principe se ramène aux cas abordés en statique, la force d'inertie étant assimilée à une force extérieure. Toutes les méthodes et théorèmes abordés en statique sont utilisables : isolement du solide, etc.

Exemple : cabine d'ascenseur

Un homme de 80 kg se tient debout sur une balance dans une cabine d'ascenseur à l'arrêt. Le moteur est mis en marche et la tension $\overrightarrow{T}$ du câble de levage atteint la valeur de 900 daN pendant les trois premières secondes. Si l'accélération est supposée constante, quelle lecture peut-on lire sur la balance ? Les frottements sont négligés, la masse de l'ensemble (cabine + balance) est de 720 kg.



ig. 4

Résolution

a) Isolons l'ensemble cabine + homme + balance

Afin de simplifier l'étude, supposons que le centre de gravité G de l'ensemble est situé sur la verticale commune à $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{P}$.

L'action des rails, perpendiculaires aux autres forces, n'est pas prise en compte.

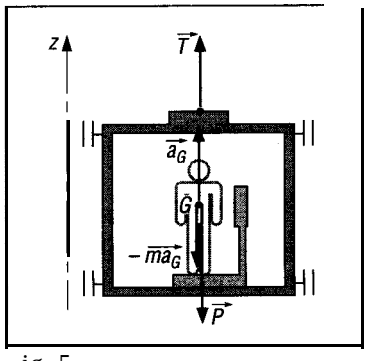
Le principe de d'Alembert s'écrit $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} - m \cdot \overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{0}$.

En projection sur la verticale z :

$-P + T - m \cdot a_G = 0$

$-(720 + 80)\,9{,}81 + 9\,000 - (720 + 80)\,a_G = 0$

d'où $a_G = 1{,}44 \text{ m.s}^{-2}$.



ig. 5

b) Isolons l'homme seul

L'homme est soumis à 3 actions : son poids $\vec{P_h}$, l'action exercée par la balance $\vec{B}$ et la force d'inertie $(- m_h . \vec{a_G})$.

$\vec{P_h} + \vec{B} - m_h \vec{a_G} = \vec{0}$

en projection sur z, on obtient :

$- P_h + B - m_h a_G = 0$

$B = m_h g + m_h a_G = m_h (g + a_G)$

$= 80 (9{,}231 + 1{,}44) = 900$ N.

Masse fictive mesurée par la balance :

$m'_h = 900 / 9{,}81 = 91{,}74$ kg.

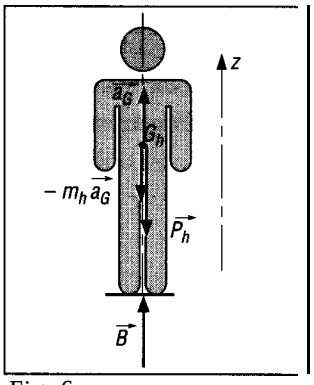


Fig. 6

Remarque : pour le mouvement inverse $(a_G = -1{,}44$ m.s$^{-2})$, avec freinage, la masse fictive de l'individu serait $80 - 11{,}74 = 68{,}26$ kg.

II ▪ Principe fondamental : solide en rotation

On ne considérera que des rotations par rapport à un axe fie.

1. Cas où le centre de gravité est situé sur l'axe de rotation

Le solide tourne à la vitesse angulaire ω autour de l'axe de rotation (A, z), le centre de gravité G est sur cet axe et a est l'accélération angulaire du mouvement.

A, et A, sont les actions exercées par la liaison pivot sur le solide. J_G est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (G, z) qui est aussi l'axe de rotation.

a) Énoncé

La première et la troisième loi restent identiques à celles du paragraphe Il.

La deuxième loi s'énonce :

$\Sigma \vec{F_{ext}} = \vec{A_x} + \vec{A_y} + \vec{F_1} + \vec{F_2} + \ldots = \vec{0}$	ΣF_{ext} en N $\Sigma M_G(F_{ext})$ en Nm J_G en m^2.kg α en rad.s^{-2}
$\Sigma M_G(\vec{F_{ext}}) = \Sigma M_A(\vec{F_{ext}}) = J_G . \alpha$	

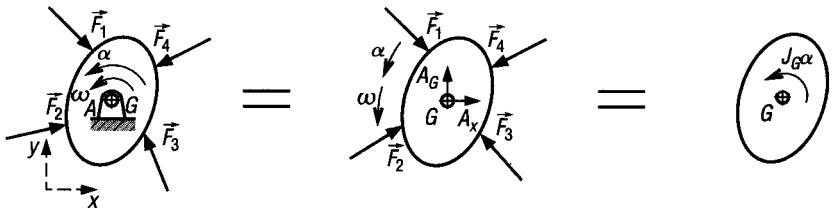


Fig. 7

Remarques : $\Sigma M_G(\vec{F_{ext}}) = M_G(\vec{F_1}) + M_G(\vec{F_2}) + \ldots$

Pour un système de forces planes, on dispose de trois équations de projection :

$\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$; $\Sigma M_G(\vec{F_{ext}}) = J_G\alpha$; J_G est défini en fin d'ouvrage.

b) Exemple

Dans un laboratoire d'essai, pour tester les accélérations d'un véhicule, on utilise un dispositif avec tambour. Les roues motrices sont posées en A sur la partie haute du tambour (rayon R = 1 m, longueur 2,5 m, moment d'inertie J_G variable ou ajustable) libre de tourner autour de son axe de rotation (G, z). La masse totale du véhicule en charge est de 2 000 kg. La charge supportée par les roues avant, au repos, est de 1 200 daN.

Quelle doit être la valeur du moment d'inertie J_G pour que le tambour se comporte comme le véhicule au démarrage ou au freinage (accélération tangentielle tambour a, = accélération du véhicule *a) ?*

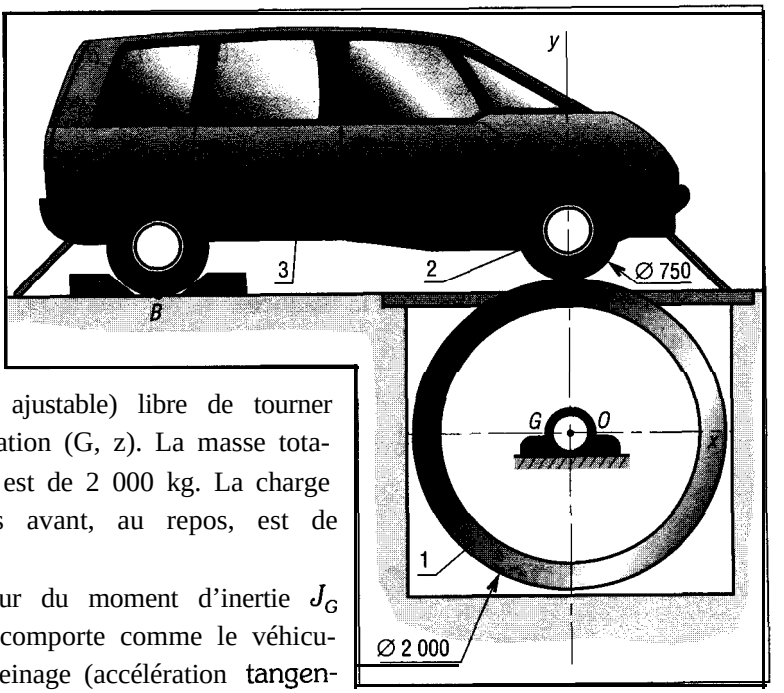


Fig. 8

Résolution

a) Isolons le véhicule.

Supposons que l'automobile démarre sur une route horizontale avec une accélération $\vec{a}$.

$\vec{P_3}$ est le poids du véhicule, $\vec{A_{1/2}}$ et $\vec{B}$ les actions sur les roues.

$-\ m_3\vec{a}$ est la force d'inertie au démarrage.

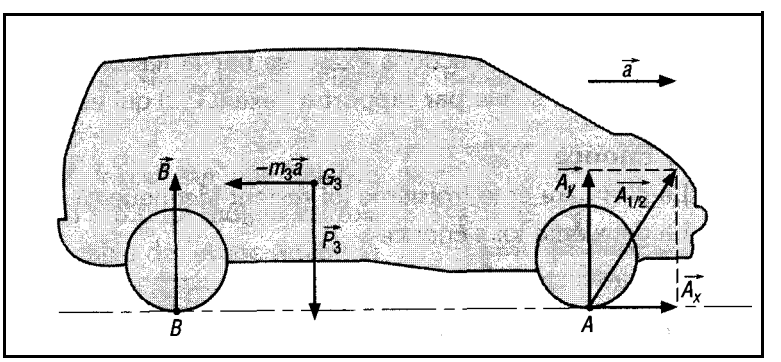


Fig. 9

D'Alembert :

$$\vec{P_3} + \vec{B} + \vec{A_{1/2}} - m_3\vec{a} = \vec{0}$$

Projection sur l'axe x : A, $-\ m_3 a = 0$

b) Isolons le tambour.

$$\Sigma\, \vec{F_{ext}} = \vec{P_1} + \vec{O_x} + \vec{O_y} - \vec{A_x} - \vec{A_y} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\Sigma\, M_G(\vec{F_{ext}}) = M_G(-\vec{A_x}) = J_G \,.\, a \quad (2)$$

toutes les forces, sauf $(-\vec{A_x})$ passent par G et ont un moment nul.

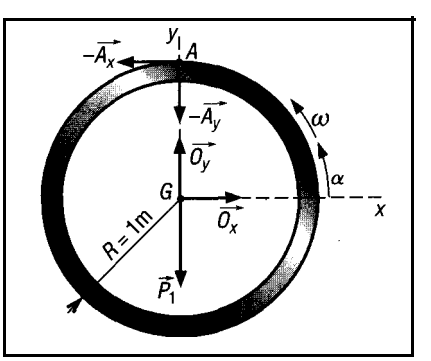
$$\alpha = \frac{a_{tA}}{R} = \frac{a}{R} = \frac{A_x}{m_3 \,.\, R}$$

a, $_A$ est l'accélération tangentielle de A.

L'équation (2) devient :

$$A_x \,.\, R = \frac{A_x}{m_3 \,.\, R} \cdot J_G$$

d'où $J_G = m_3 \,.\, R^2$ avec m_3 = masse du véhicule.



ig. 10

2, Cas où le centre de gravité G n'est pas sur l'axe de rotation

$\overrightarrow{a_G}$ est l'accélération du point G (a, est l'accélération normale et a, l'accélération tangentielle) ; a est l'accélération angulaire du mouvement ; J_G et J_A sont les moments d'inertie en G et A (voir définitions et formules chapitre moments d'inertie).

a) Énoncé

La deuxième loi du principe fondamental devient :

$$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \ldots = m\,\overrightarrow{a_G}$$
avec $\overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{a_t}$; $a_n = \omega^2 r$; $a_t = \alpha r$

$$\Sigma M_G(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_G \alpha$$

ΣF_{ext} en N
$\Sigma M_G(F_{ext})$ en Nm
a en m.s^{-2}
m en kg
J_G en m^2.kg
$r = AG$ en m

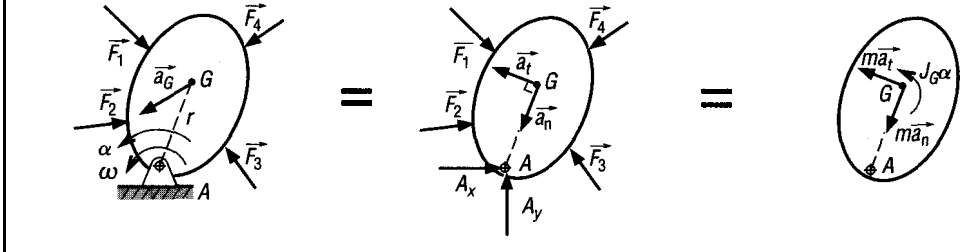


Fig. 11

Remarques : en projection sur AG ou n : $\Sigma F_n = -m\,\omega^2 r$
en projection sur t (perpendiculaire à n) : $\Sigma F_t = m\alpha r$
L'équation de moment en G peut être remplacée par l'équation alternative en A :

$\Sigma M_A(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_A \alpha$	avec : $J_A = J_G + mr^2$

b) Exemple : tasseur vibrant

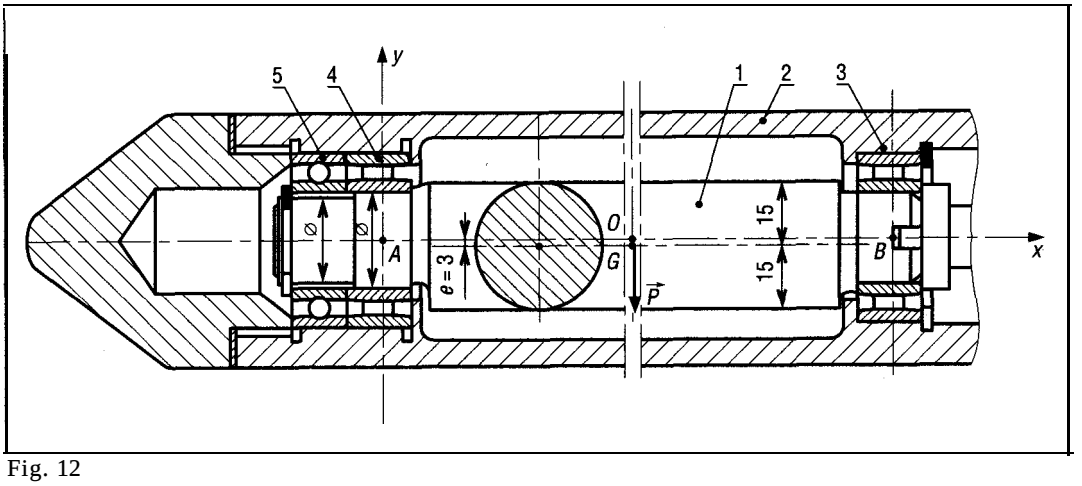


Fig. 12

L'appareil est utilisé pour tasser ou compacter le béton liquide. Les vibrations ou secousses sont produites par la rotation d'un arbre excentré 1 (excentration e = 3 mm) guidé en rotation par trois roulements 3 - 4 - 5. La vitesse de rotation maximale est de 10 000 $tr.min^{-1}$, la puissance d'entraînement de 1,5 kW et la masse de l'arbre de 2 kg. Déterminons les actions supportées par les roulements en A et B, à vitesse constante et le couple de démarrage si a = 5 000 $rad.s^{-2}$ (poids négligé).

Résolution

a) Action en A et B à 10 000 $tr.min^{-1}$.

$\alpha = 0$; $a_t = 0$; $a_n = \omega^2 e$

ω = (10 000 π) / 30 = 1 047 $rad.s^{-1}$

$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{A_{4/1}} + \overrightarrow{B_{3/1}} = \overrightarrow{m\,a_G} = -\overrightarrow{F_i}$

F_i force d'inertie sur l'arbre.

Projection sur x : 0 = 0.

Projection sur y, : A,, + $B_{3/1}$ = $m\ a_n$.

Par symétrie :

$$A_{4/1} = B_{3/1} = \frac{m\,a_n}{2} = \frac{2 \times 1\,047^2 \times 0{,}003}{2} = 3\ 290\ \text{N}.$$

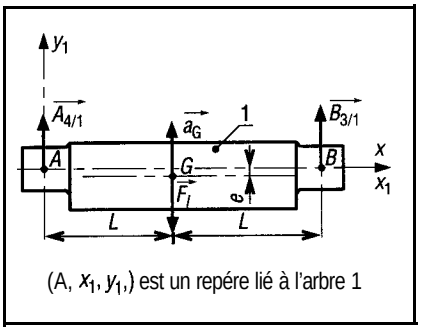


Fig. 13

b) Couple moteur C_m si a = 5 000 $rad.s^{-2}$

Écrivons l'équation de moment du principe en 0 :

$\Sigma M_0(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_0\ a = (J_G + me^2)\alpha$

$$C_m = \left(\frac{mR^2}{2} + me^2\right)\alpha = m\left(\frac{R^2}{2} + e^2\right)\alpha$$

$$C_m = 2\left(\frac{0{,}015^2}{2} + 0{,}003^2\right) \times 5000 = 1{,}215\,\text{Nm}$$

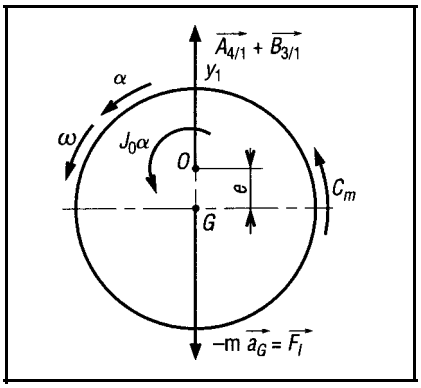
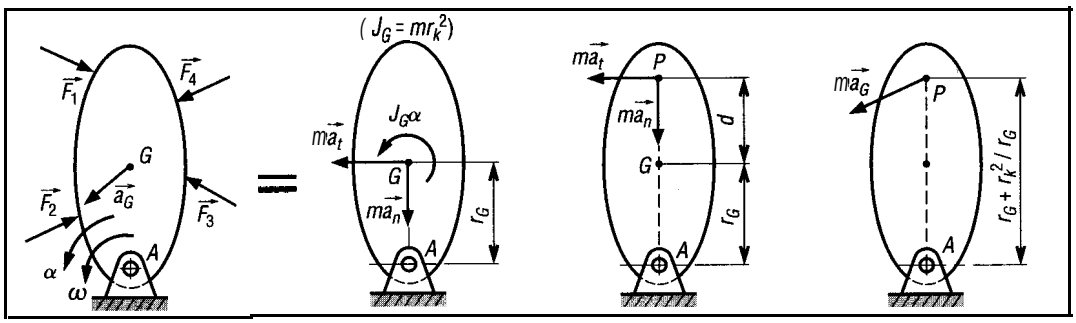


Fig. 14

3. Centre de percussion P



ig. 15

La résultante des forces extérieures $(\Sigma \overrightarrow{F_{ext}})$ passe par le centre de percussion P et en ce point :

$$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = m\ .\ \overrightarrow{a_G} \qquad \Sigma M_P(\overrightarrow{F_{ext}}) = 0$$

Remarque : si r_k est le rayon de gyration du solide tel que $J_G = m\ .\ r_k^2$

$\Sigma M_A(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_A\ a = (J_G + m\ r_G^2)\ a = m\ (r_k^2 + r_G^2)\ a$

or : $\Sigma M_A(\overrightarrow{F_{ext}}) = m\ a,\ x\ (r_G + d) = m\ r_G\ a\ (r_G + d) = m\ (r_G\ .\ d + r_G^2)\ a$

il en résulte que :

$$d = \frac{r\,k^2}{r_G}$$

Exemple : batte de base-ball

La batte est en rotation autour de A et frappe la balle. $\vec{F}$, d'intensité élevée, schématise l'action de la balle au moment de l'impact. Le poids de la batte est négligé.

$\vec{A_y}$ et $\vec{A_x}$ schématisent les actions exercées par les mains, si $\vec{F}$ passe par le centre de percussion P, ces actions sont limitées.

$\Sigma M_P(\vec{F_{ext}}) = A_x \times AP = 0$

d'où : A, = 0.

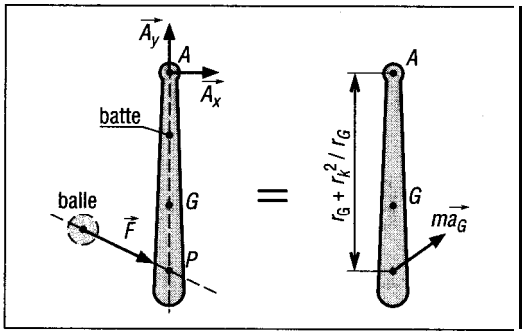


Fig. 16

4. Cas des mouvements pendulaires

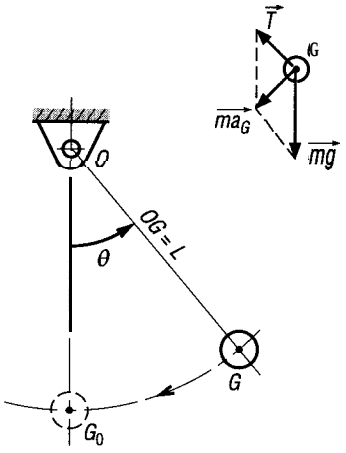
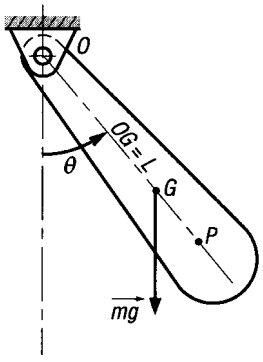
Cas	Pendule simple	Pendule composé
Principe		
Principe fondamental	$\vec{T} + \vec{mg} = m\vec{a_G}$	$-mg\,OG\sin\theta = J_0\,\alpha = m\,r_{k0}^2\,\alpha$
Angle de balancement	$\theta = \theta_{maxi} \cdot \cos\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t$	$\theta = \theta_{maxi} \cdot \cos\sqrt{\frac{g\,L}{r_{k0}^2}} \cdot t$
Période d'oscillation	$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{m\,g\,L}} = 2\pi\sqrt{\frac{r_{k0}^2}{g\,L}}$

Fig. 17

Remarque : dans le cas du pendule simple, la masse **m** est supposée concentrée en G, T est la tension du fil OG. Dans les deux cas, les pendules oscillent autour de 0 (oscillations de faible amplitude).

Le pendule composé se comporte comme un pendule simple de longueur :

$L' = OP = OG + \left(\frac{r_{kG}^2}{OG}\right)$; r_{kG} est le rayon de gyration par rapport à G et P le centre de percussion défini au paragraphe 3.

III-Principe fondamental: casdesmouvements plans

1. Énoncé

La deuxième loi du principe fondamental s'écrit :

$$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a_G} \qquad \Sigma M_G(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_G\,\alpha$$

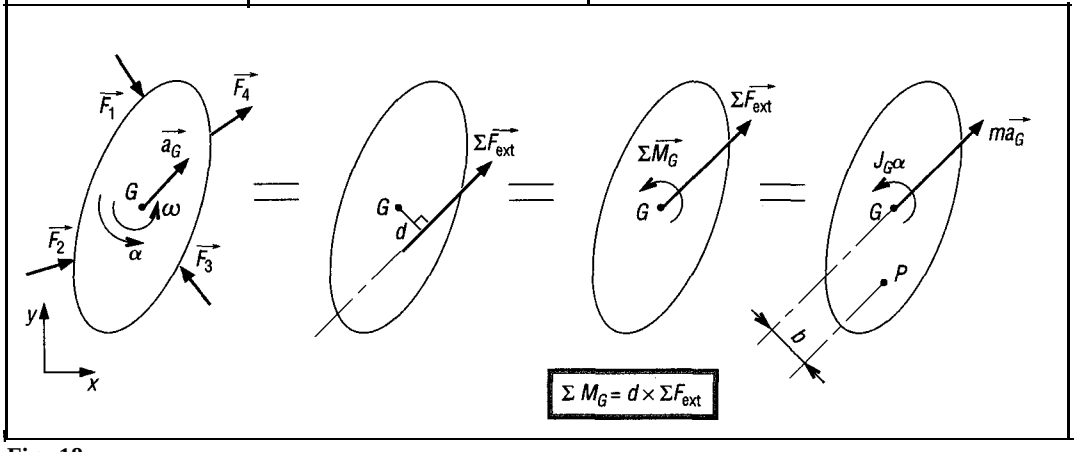


Fig. 18

Remarque : pour un point P situé à la distance b de $m\overrightarrow{a_G}$, on peut écrire l'équation alternative suivante :

$$\Sigma M_P(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_G\,\alpha + ma_G \,.\, b$$

2. Exemple

Prenons le cas d'un disque (ou roue) qui roule sans glisser sur un plan horizontal (ou route) sous l'action d'une force constante F. m est la masse du disque, $f_A = \mu_A$ caractérise le frottement en A. Déterminons les équations du mouvement.

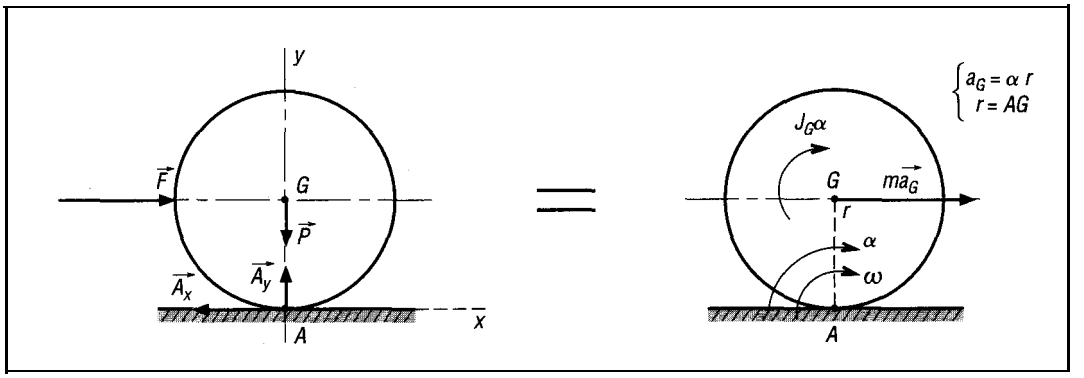


Fig. 19

Résolution

$f_A = \mu_A = \dfrac{A_x}{A_y}$; $P = mg$; $\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a_G}$.

Projection sur x : $\Sigma F_x = ma_{Gx}$

$$F - A_x = F - f_A A_y = F - f_A P = ma_G = m\alpha r \qquad (1)$$

Projection sur y : $\Sigma F_y = A_y - P = 0$ donne $A_y = P = mg$ *(2)*

$\Sigma M_G(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_G$ a donne $A_y \cdot r = \dfrac{mr^2}{2}\alpha = f_A P r$ *(3)*

les équations (1) et (3) conduisent à : $\alpha = \dfrac{2f_A P}{mr} = \dfrac{F - f_A P}{mr}$ d'où $f_A = \dfrac{F}{3P}$

Si on remplace f_A par $\dfrac{F}{3P}$ dans l'équation (3), on obtient : $\boxed{\alpha = \dfrac{2F}{3mr}}$

IV ▪ Cas des ensembles de solides

Le principe fondamental s'applique de la même manière aux ensembles de solides. Les interefforts au niveau des liaisons entre solides ne doivent pas être pris en compte (deviennent des efforts intérieurs). Seules les actions extérieures à l'ensemble isolé sont comptabilisées, analogie avec les ensembles isolés en statique.

$$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \ldots = m_1\overrightarrow{a_{G1}} + m_2\overrightarrow{a_{G2}} + \ldots$$

$$\Sigma M_I(\overrightarrow{F_{ext}}) = M_I(\overrightarrow{F_1}) + M_I(\overrightarrow{F_2}) + \ldots = (J_{G1}\alpha_1 + m_1 a_{G1} d_1) + (J_{G2}\alpha_2 + m_2 a_{G2} d_2) + \ldots$$

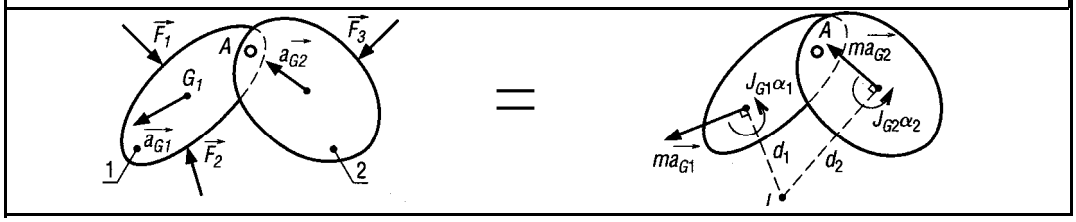


Fig. 20

V ▪ Systèmes dynamiquement équivalents

Deux systèmes sont dynamiquement équivalents s'ils donnent les mêmes résultats avec les équations du principe fondamental.

Exemple

Le solide de masse m, de centre de gravité G et de moment d'inertie J_G est dynamiquement équivalent aux deux masses excentrées m_1 et m_2 si les conditions indiquées sont vérifiées.

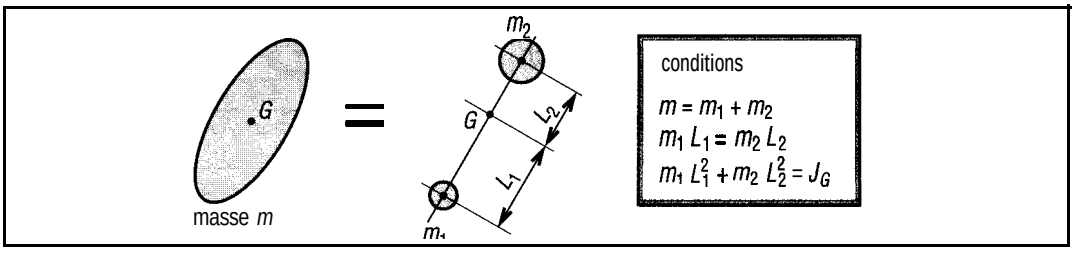


Fig. 21

EXERCICES À RÉSOUDRE

❑ Une remorque bagagère de poids P = 300 daN appliqué en G, centre de gravité, est tractée en A (liaison rotule) par une automobile. L'ensemble voiture plus remorque atteint la vitesse de 72 $km.h^{-1}$ en 100 m, départ arrêté. a) Déterminer l'accélération du mouvement si celle-ci est constante. b) Déterminer les actions exercées en A et B.

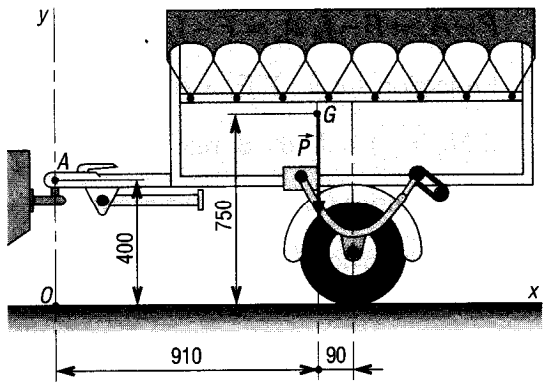


Fig. 22

Réponse

a = 2 $m.s^{-2}$; A_x =-612 N ;A, = 55,8 ; B_x = 0 ; B_y = 2 944,2 N.

2 Reprendre l'exercice 1, l'automobile freine et s'arrête sur 120 m depuis la vitesse de 120 $km.h^{-1}$.

3 À l'arrêt, le poids P = 1 240 daN d'une automobile, appliqué en G centre de gravité, se répartit de la façon suivante : 310 daN sur les roues avant et 930 daN sur les roues arrière (g = 10 $m.s^{-2}$).
Le véhicule roule à la vitesse de 288 $km.h^{-1}$, puis freine brutalement et s'arrête en 320 m (décélération constante). Les frottements entre roues et sol sont supposés identiques en A et B ($f_A = f_B = f$). a) Déterminer la position du point G et la décélération du mouvement. b) En déduire les actions exercées en A et B et la valeur du frottement f.

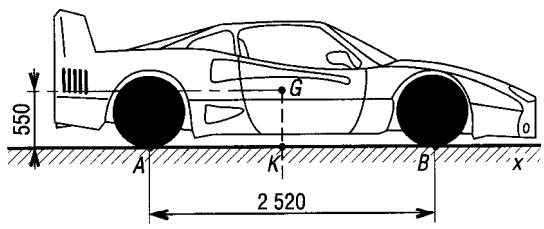


Fig. 23

Réponse

AK = 630 ; a = – 10 $m.s^{-2}$; f = 1 ; $A_x = A_y$ = 6 594 N ; $B_x = B_y$ = 5 806 N.

4 Reprendre l'exercice 3 lorsque la voiture descend une pente de 10 %.

❑ Une moto atteint la vitesse de 86,4 $km.h^{-1}$, départ arrêté, sur 60 m en montant une pente de 10 %. Le poids de l'ensemble est de 340 daN appliqué en G. La roue arrière est motrice et g = 10 $m.s^{-2}$. Déterminer l'accélération du mouvement, les actions exercées en A et B ainsi que le frottement en A.

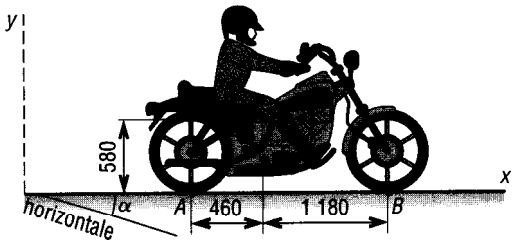


Fig. 24

Réponse

a = 4,8 $m.s^{-2}$; A_x = 1 970 N ; A_y = 3 131 N ; B_x = 0 ; B_y = 252 N ; f_A = 0,63.

6 Reprendre l'exercice 5, la moto descend une pente de 10 % à 120 km.h^{-1}, freine et s'arrête en 120 m, les frottements en A et B sont supposés identiques.

❑ $\vec{P_1}$ (12 500 daN) schématise le poids du chargeur et $\vec{P_2}$ (5 000 daN) celui des matériaux contenus dans le godet. L'engin roule à 40 km.h^{-1} puis freine. a) Si la décélération est de 2 m.s^{-2} et les frottements en N et M identiques, déterminer les actions exercées en M et N. b) À partir de quelle décélération y a-t-il basculement vers l'avant du chargeur ?

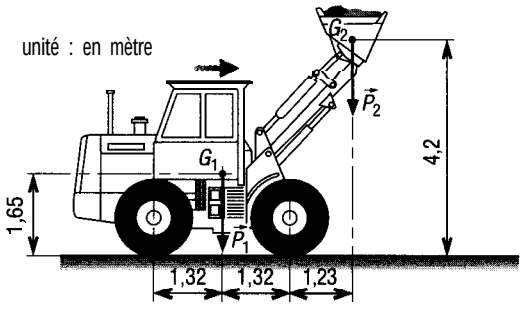


Fig. 25

❑ Pour le système bielle manivelle proposé, $N_{1/0}$ = 2 500 tr.min^{-1}, déterminer la force d'inertie sur le piston si sa masse est de 0,3 kg ; valeur à 5 000 tr.min^{-1}.

Réponse

a = -2 010 m.s^{-2} ; F_i = 603N;
F_i (5 000) = 4 F_i (2 500).

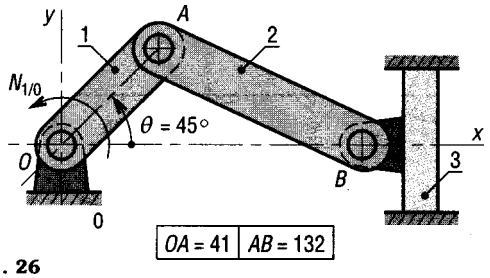


Fig. **26**

❑ Reprendre l'exercice 8, déterminer la force d'inertie lorsque θ varie entre 0 et 360".

❑ L'accéléromètre à ressort proposé permet de mesurer expérimentalement des accélérations. Déterminer la raideur K du ressort de façon à ce qu'un accroissement d'accélération de 1 m.s^{-2} amène un enfoncement du coulisseau de 2 mm (correspond à une unité de la graduation).

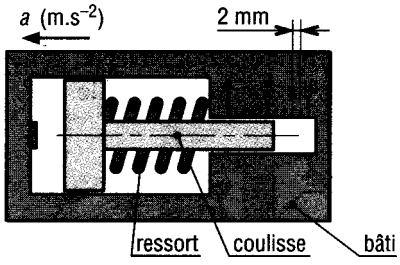


Fig. 27

11 Une automobile roule à la vitesse constante de 126 km.h^{-1} au fond d'un creux circulaire de rayon R = 100 m. Déterminer les actions exercées en A et B sur les roues si le poids du véhicule est P = 1 000 daN au repos (g = 10 m.s^{-2}).

Réponse

A_y = 890 daN ; B_y = 1 335 daN.

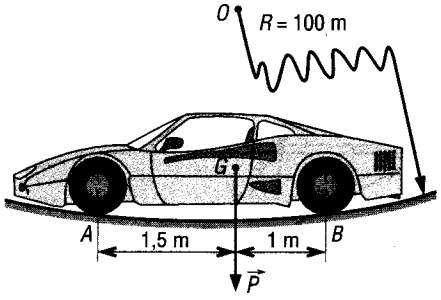


Fig. 28

❑ Renrendre l'exercice 11 avec une automobile roulant à 90 $km.h^{-1}$ dans le haut d'une côte circulaire de rayon 40 m. P = 1 600 daN au repos.

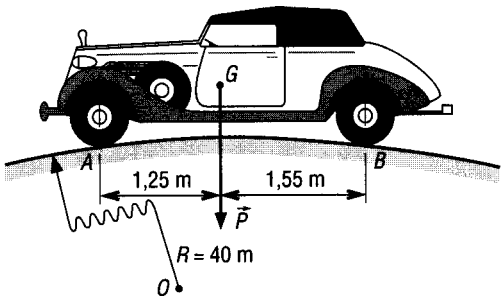


Fig. 29

13 Une automobile roule à la vitesse constante de 90 $km.h^{-1}$ dans un virage relevé d'angle a. Déterminer a de façon à ce qu'il n'y ait aucune force de frottement entre les pneus et la route si le rayon du virage est de 200 m.

Réponse

$\alpha = 17{,}67°$.

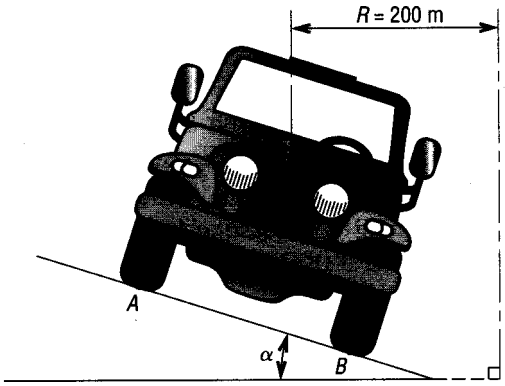


Fig. 30

14 Les normes britanniques imposent que les autobus à deux étages ne doivent pas verser si, à l'arrêt, ils sont inclinés de moins de 28". a) Si la largeur des essieux est de 2,4 m, déterminer la position limite du centre de gravité G, l'autobus est supposé symétrique. b) Sur route horizontale et dans un virage de rayon R = 20 m, quelle est la vitesse limite admissible au renversement ? c) Renrendre la question précédente lorsque le virage est relevé de 10".

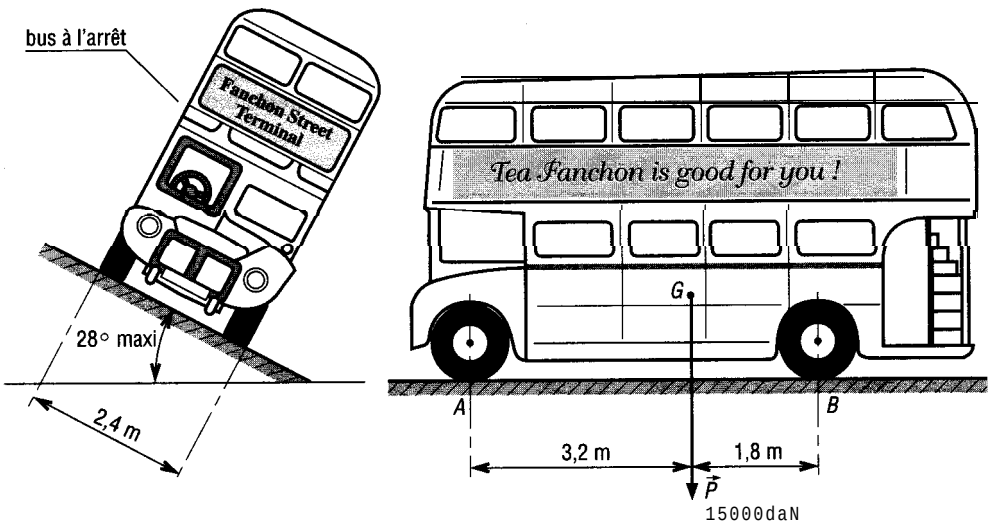


Fig. 31

❑ Un avion effectue une descente en piqué à la vitesse constante de 900 $km.h^{-1}$ sur la trajectoire circulaire CAB de rayon 1 200 m. La masse de l'appareil est de 5 700 kg.
a) Déterminer les accélérations et les forces subies par les passagers en A, B et C. b) Quelle est la force d'inertie centrifuge exercée sur l'avion en ces mêmes points ? c) Un voyageur de 80 kg est debout, en équilibre, sur une balance, au passage en A. Quelle est la lecture indiquée par la balance ?

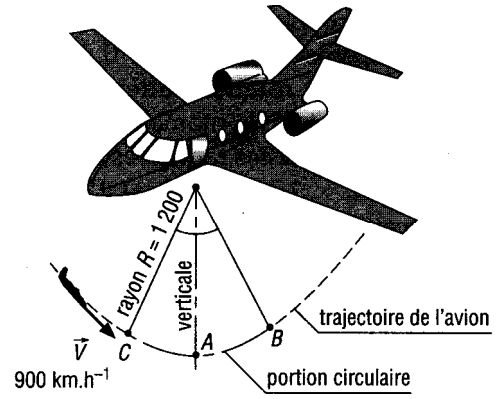


Fig. 32

❑ En saut à ski sur tremplin, un skieur de 80 kg arrive dans le bas à la vitesse V_G de 25 $m.s^{-1}$ inclinée de 30" par rapport à l'horizontale.
Déterminer l'effort normal N, exercé par la piste sur le skieur en A, juste avant le saut. La piste est supposée circulaire (rayon R = 45 m).

Réponse

N = 1 791 N.

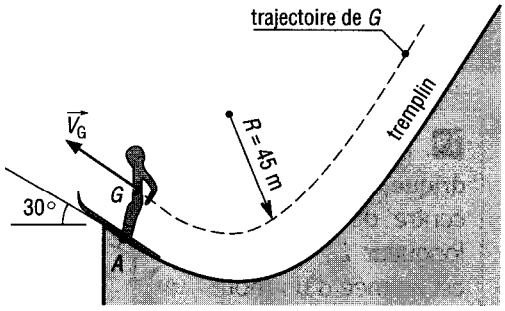


Fig. 33

17 Un touret à meuler tourne à la vitesse de 3 000 $tr.min^{-1}$.
L'alimentation est coupée, la broche met 40 secondes pour s'arrêter. a) Déterminer la décélération angulaire a si celle-ci est supposée constante. b) L'ensemble meules plus arbre est assimilé au dessin, la masse volumique des meules est de 2 500 $kg.m^{-3}$, celle de l'arbre de 7 800 $kg.m^{-3}$. Déterminer le moment d'inertie de l'ensemble et le couple résistant exercé par les paliers pendant la période d'arrêt.

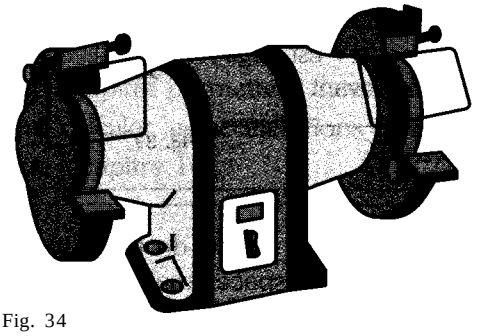


Fig. 34

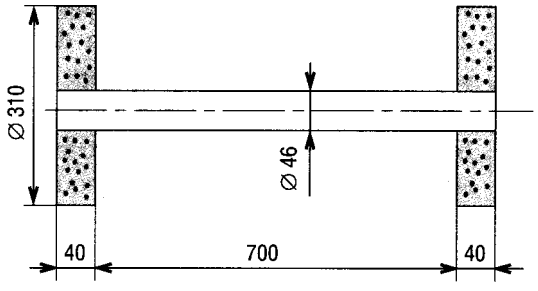


Fig. 35

❑ Le couple de démarrage, à vide, d'une perceuse est égal à 0,1 Nm. La vitesse de rotation atteinte est de 3 000 $tr.min^{-1}$, le moment d'inertie des parties tournantes ramenées au mandrin est de 2 x 10^{-4} $m^2.kg$. a) Déterminer l'accélération angulaire du mouvement si celle-ci est supposée constante. b) Combien de tours faut-il au foret pour atteindre la vitesse de 3 000 $tr.min^{-1}$, temps mis pour y parvenir ?

Réponse

a = 500 $rad.s^{-2}$; 15,7 tours ; t = 0,63 s.

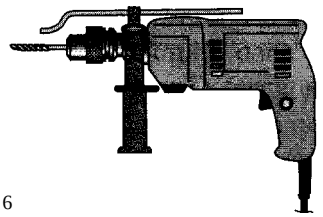


Fig. 36

❑ Une barre cylindrique, masse m , centre de gravité G, longueur L, rayon r, est animée d'un mouvement pendulaire autour de l'axe 0. Déterminer la période des oscillations si celles-ci sont supposées de faibles amplitudes et si r est négligeable devant L.

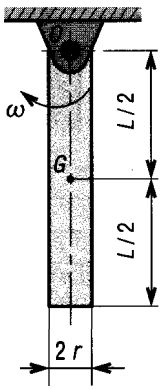


Fig. 37

Réponse

$T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$

❑ Une bague de roulement, largeur b, diamètre intérieur 0,6 m et centre de gravité G, est animé d'un mouvement pendulaire autour de l'axe 0 (liaison linéaire annulaire). Par mesure expérimentale, on détermine la période d'oscillation du pendule : T = 2,2 secondes. En déduire les rayons de gyration de la bague en 0 et G.

Réponse

r_{k0} = 0,6 m ; r_{kG} = 0,52 m.

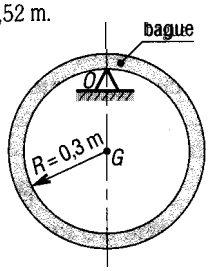


Fig. 38

❑ Reprendre l'exercice 20 avec une bielle symétrique de masse 1,2 kg, centre de gravité G et une période d'oscillation autour de l'axe 0 : T = 1,35 s. Déterminer le rayon de gyration et le moment d'inertie en G.

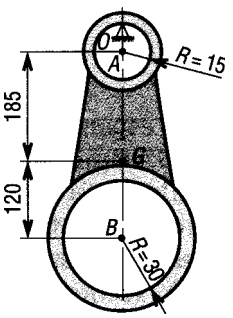


Fig. 39

❑ La porte avant droite d'un véhicule monospace, mal fermée, s'ouvre brutalement au moment d'un freinage. La masse de la porte est m, son centre de gravité G (AG = R) et son rayon de gyration en A, r_k. a) La décélération a du véhicule est supposée constante ; en déduire ω et a de la porte. b) Déterminer les actions exercées sur la liaison pivot en A lorsque θ = 90".

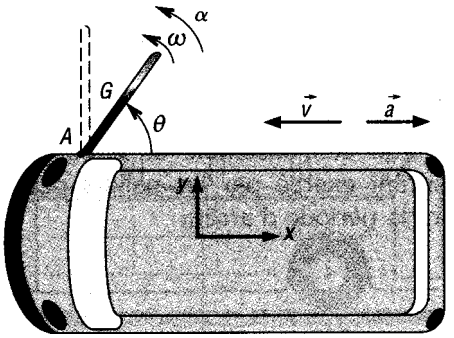


Fig. 40

Réponse

$\alpha = \frac{aR}{r_k^2}\sin\theta$; $\omega = \sqrt{\frac{2ar}{r_k^2}(1-\cos\theta)}$; $Ay = -\frac{2maR^2}{r_k^2}$; $Ax = ma\left(1-\frac{R^2}{r_k^2}\right)$.

17

ÉNERGÉTIQUE

OBJECTIFS

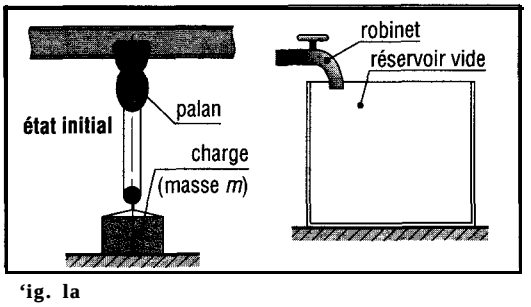
- Définir les notions d'énergie et de puissance.
- Donner le travail et la puissance d'une force et traiter le cas d'un couple.
- Aborder la notion d'énergie potentielle.
- Introduire l'énergie cinétique dans le cas des translations rectilignes, des rotations d'axe et des mouvements plans.
- Définir le rendement.
- Développer les théorèmes liés à l'énergie : théorème de l'énergie cinétique, loi de conservation de l'énergie et principe du travail virtuel.

Les problèmes liés à l'énergie sont d'une grande importance : l'énergie est en effet à l'origine de tous les mouvements du monde de la technologie. Elle existe sous plusieurs formes : mécanique, électrique, chaleur, etc. Une bonne connaissance des phénomènes énergétiques permet aux techniciens et ingénieurs de construire de manière économique des machines moins gourmandes en énergie.

Les théorèmes sur l'énergie abordés dans ce chapitre permettent dans certains cas de déterminer les efforts engendrés sans avoir à calculer les accélérations comme dans le cas du principe fondamental de la dynamique (chapitre 16).

I - Notions d'énergie et de puissance

L'énergie et la puissance sont deux notions qui, bien que liées, sont différentes. Mettons ces différences en évidence à partir des deux dispositifs de la figure 1.



'ig. la

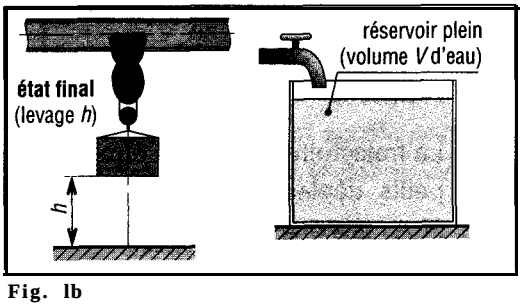


Fig. lb

Pour remplir le réservoir, il faut fournir un certain volume V d'eau. De la même manière pour lever la charge de masse m sur la hauteur h, il faut fournir une certaine quantité d'énergie W.

Quelle que soit l'ouverture du robinet, c'est-à-dire quel que soit le débit d'eau, la quantité d'eau nécessaire au remplissage est toujours la même V.

De la même façon, si l'on ne tient pas compte du rendement (des pertes ou des fuites d'énergie), la quantité d'énergie à fournir pour lever la charge est la même quelle que soit la vitesse de levage.

Plus le débit d'eau délivré par le robinet est élevé, plus vite le réservoir sera rempli. De même, plus la vitesse de levée de la charge est grande, plus la puissance fournie instantanément est grande et plus vite la charge sera levée.

Le travail ou l'énergie représente ce qu'il faut fournir globalement à un système pour l'amener d'un état initial à un état final. La manière dont le chemin est parcouru entre ces deux états n'a pas d'importance.

La puissance caractérise le débit d'énergie fourni à chaque instant. Elle ne dépend ni de l'état initial ni de l'état final du système, mais permet de décrire les flots d'énergie entre ces deux états.

II - Travail (W)

1. Travail élémentaire AW d'une force $\vec{F}$

Le travail élémentaire AW de la force $\vec{F}$ dont le point d'application A se déplace de $\overrightarrow{\Delta l}$ entre A et A' ($\overrightarrow{\Delta l} = \overrightarrow{AA'}$) est égal au produit scalaire de $\vec{F}$ par $\overrightarrow{\Delta l}$.

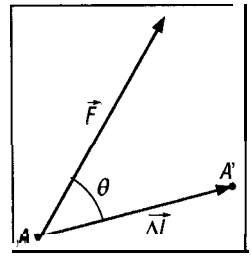


Fig. 2

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta l} = F \cdot \Delta l \cdot \cos\theta$$

Unités : W en J (joules) ; F en N ; Al en m.

Remarque

si $0 \leqslant \theta < 90$; cos $\theta > 0$; AW > 0 ; le travail de $\vec{F}$ est moteur ;

si $\theta = 90$" ; cos $\theta = 0$; AW = 0 ; le travail de $\vec{F}$ est nul ;

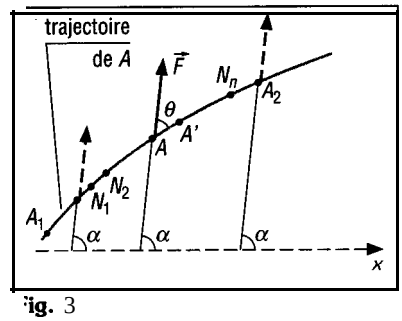
si $90" < \theta \leqslant 180"$; cos θ c 0 ; AW < 0 ; le travail de $\vec{F}$ est résistant.

2. Travail d'une force constante ou invariable

La force $\vec{F}$ se déplace de A, à A, en conservant la même direction (angle a constant) et une intensité constante.

La trajectoire A_1A_2 peut être divisée en une infinité de petits déplacements élémentaires A_1N_1, N_1N_2, . . . , N_nA_2 tels que :

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1N_1} + \overrightarrow{N_1N_2} + \ldots + \overrightarrow{N_nA_2}.$$



ig. 3

Le travail entre A_1 et A_2 s'exprime par :

$$W_{1/2} = \vec{F} . \overrightarrow{A_1N_1} + \vec{F} . \overrightarrow{N_1N_2} + \ldots + \vec{F} . \overrightarrow{N_nA_2}$$
$$= \vec{F}(\overrightarrow{A_1N_1} + \overrightarrow{N_1N_2} + \ldots + \overrightarrow{N_nA_2}) = \vec{F} . \overrightarrow{A_1A_2}$$

Le travail de $\vec{F}$ de A, à A, se ramène au produit scalaire de $\vec{F}$ par la distance $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$$W = \vec{F} . \overrightarrow{A_1A_2}$$

Exemple : travail du vecteur poids $\vec{P}$

Prenons le cas d'un objet descendant une rampe de forme quelconque de G_1 à G,.

$$W_{1/2} = \vec{P} . \overrightarrow{G_1G_2} = P . h$$

Quelle que soit la trajectoire de G, le travail de $\vec{P}$ est égal au produit de P par la dénivellation h.

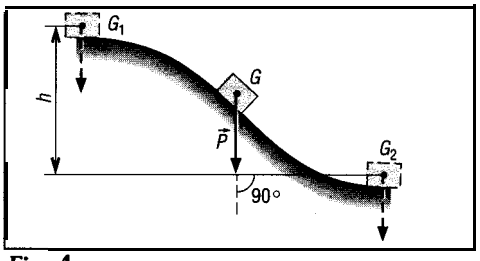


Fig. 4

Supposons que l'objet soit un skieur de 80 kg descendant une pente dont la différence de niveau est de 300 m entre le haut et le bas.

W = 80 x 9,81 x 300. = 235 440 J = 235,4 kJ

Remarque : dans le cas de la figure 1, le travail de levage de la charge (1 000 daN) sur la hauteur h = 2 m est W = 10 000 x 2 = 20 000 J.

Si le palan se déplace horizontalement sans lever la charge, le travail fourni est nul.

3. Travail W d'une force $\vec{F}$ dans le cas général

s, abscisse curviligne, mesure le déplacement du point d'application A de la force F sur sa trajectoire, $s = s_1$ en A, et s = s_2 en A,.

AA' = ds est le déplacement élémentaire de A ; entre A et A' :

$dW = \vec{F} . \vec{ds}$ = F . ds cos θ

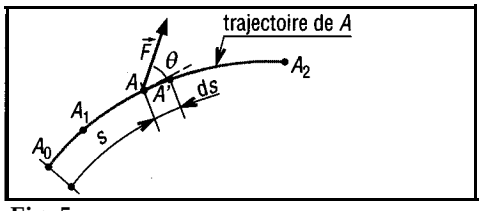


Fig. 5

entre A, et A, $W_{1/2} = \sum_{s_1}^{s_2} F . ds . \cos\theta = \int_{s_1}^{s_2} F . \cos e . ds$

4. Travail d'un couple C constant

Le travail d'un couple constant C se déplaçant de l'angle θ est égal au produit de C par 8.

$W = C\,\theta$

W en J (joules)

θ en rad (radian)

C en Nm

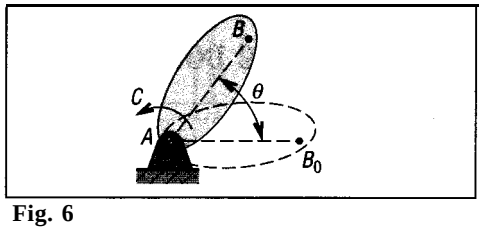


Fig. 6

Exemple : un moteur électrique tournant à 1 500 $tr.min^{-1}$ exerce un couple constant de 20 Nm sur un récepteur. Déterminons le travail réalisé par minute et par seconde :

par minute : $\Delta\theta = 1\,500 \times 2\pi = 9\,425$ rad

$\Delta W = 20 \times 9\,425 = 188{,}5$ kJ

par seconde : $\Delta W'$ = (AW) / 60 = 3 142 J

Remarque : dans la mesure où le couple est constant, AW' est aussi égale à la puissance instantanée du moteur (3 142 W), en notant que 1 W = 1 $J.s^{-1}$.

5. Cas des ressorts de torsion

Pour les ressorts de torsion (barre de torsion, cylindrique à spire et à spirale), le couple C supporté est fonction de l'angle d'enroulement a.

$C = k\,\alpha$	$W = \frac{1}{2} C\,\alpha = \frac{1}{2} k\,\alpha^2$
C en Nm ; k en $Nm.rad^{-1}$; a en rad ; W en J	

Remarque : k est la raideur du ressort, W le travail réalisé est aussi de l'énergie potentielle stockée ou restituée par le ressort.

III - Énergie potentielle (E_p)

Dans le cas d'un travail effectué par les forces de pesanteur ou par des forces engendrées par des ressorts, on parle d'énergie potentielle. Cette notion simplifie l'analyse des problèmes.

Pour ces cas, le travail réalisé est indépendant des trajectoires et dépend uniquement des positions initiale et finale des forces encore appelées forces conservatives.

1. Énergie potentielle de pesanteur

Le principe a été abordé au paragraphe 112. L'énergie potentielle dépend de l'attitude z de l'objet, plus l'objet est haut et plus il y a d'énergie potentielle.

$$E_p = mgz$$
$$E_{p1} - E_{p2} = mg\,(z_1 - z_2) = mgh$$

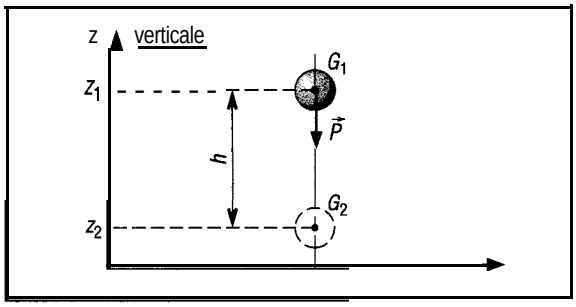


Fig. 7

2. Énergie potentielle élastique (ressort)

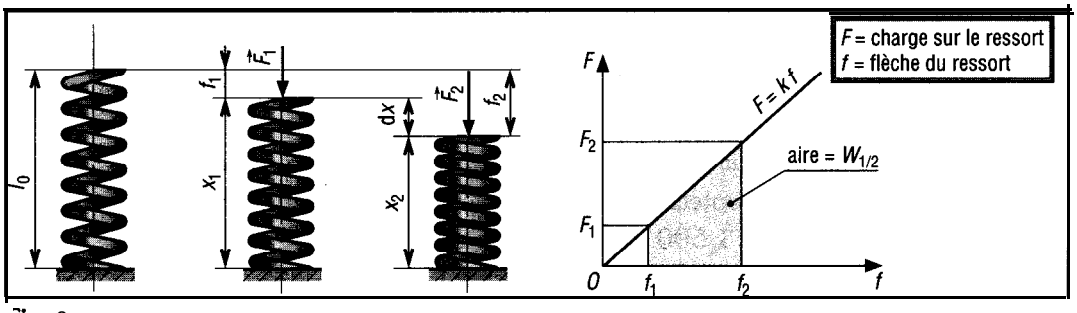


Fig. 8

Charge sur le ressort : $F = kf = k\,(l_0 - x)$
avec l_0 longueur libre ou longueur au repos ; x longueur du ressort sous charge ; f déformation ou flèche du ressort ; k raideur du ressort.
Travail élémentaire développé par une charge F comprimant le ressort. Si $x_1 - x_2$ = dx est très petit, $F_1 \simeq F_2 = F$ varie très peu et le travail élémentaire s'exprime par : $\Delta W = F\,dx = k\,(l_0 - x)\,dx$
Le travail total est donné par :

$$W_{1/2} = \int_1^2 k\,(l_0 - x)\,dx = \frac{k}{2}\left(f_2^2 - f_1^2\right)$$

Énergie potentielle du ressort (E_p en J ; k en $N.m^{-1}$; f en m)	$E_p = \frac{k f^2}{2}$; $E_{p2} - E_{p1} = \frac{k}{2}\left(f_2^2 - f_1^2\right)$

La compression du ressort permet d'accumuler de l'énergie potentielle. Pour les ressorts de torsion : $E_p = \frac{1}{2}\,k\,\alpha^2$ (a en rad ; k en $Nm.rad^{-1}$).

IV - Énergie cinétique (E_k ou T)

On peut considérer l'énergie cinétique comme étant une sorte d'énergie potentielle liée à la vitesse de déplacement. Plus un solide se déplace rapidement, plus il accumule de l'énergie cinétique.

1. Solide en translation rectiligne

Tous les points du solide se déplacent à la même vitesse : $\vec{V} = \vec{V_G} = \vec{V_M} = \ldots$
L'énergie cinétique d'un solide en translation rectiligne est égale à la moitié du produit de la masse m du solide par le carré de sa vitesse V.

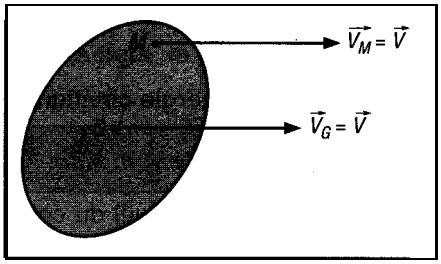


Fig. 9

$$E_k = T = \frac{1}{2} m V^2 \quad \textbf{avec} \quad E_k \text{ en J (joules) ; } \textbf{m en kg ; V en } m.s^{-1}$$

Exemple
Énergie cinétique d'un camion de 14 000 kg roulant à 108 $km.h^{-1}$:

$$V = \frac{108}{3{,}6} = 30\ m.s^{-1}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \times 14\,000 \times 30^2$$
$$= 6\,300\,000\ J$$
$$= 6\,300\ kJ$$

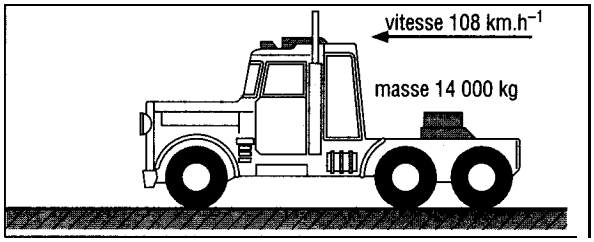


Fig. 10

Remarque : si la vitesse du véhicule est divisée par deux (54 $km.h^{-1}$), l'énergie cinétique est divisée par 4 (6 300/4 = 1 575 kJ) et inversement. Le travail des freins consiste à absorber de l'énergie cinétique pour ralentir le véhicule. En cas de chocs, l'énergie cinétique accumulée est brutalement convertie en déformations (carrosserie, etc.).

2, Solide en rotation par rapport à un axe fixe

Pour l'élément M de masse dm dont la vitesse est $V_M = \omega r$, l'énergie cinétique est $E_i = \frac{1}{2}(\omega r)^2\, dm = \frac{1}{2}\omega^2 r^2$ dm.
Pour l'ensemble du solide : $E_k = \frac{1}{2}\omega^2 \Sigma r^2 dm$.
Le terme $J = \Sigma r^2$ dm représente le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation (voir chapitre « moment d'inertie »).
L'énergie cinétique d'un solide en rotation est égale à la moitié du produit du moment d'inertie J du solide (par rapport à son axe de rotation) par le carré de sa vitesse angulaire ω.

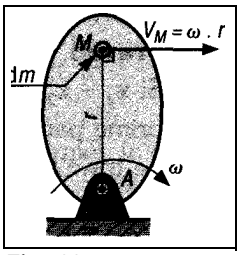


Fig. 11

$$E_k = T = \frac{1}{2} J\omega^2 \quad \text{avec} \quad E_k \text{ en } J \text{ (joules)} ; J \text{ en m}^2\text{. kg} ; \omega \text{ en rad.s}^{-1}$$

Exemple

Déterminons l'énergie cinétique d'un volant de presse cylindrique (0 2 m, h= 0,5 m) tournant à 1 000 tr.min^{-1} autour de son axe de révolution. La masse volumique de l'acier est ρ = 7 800 kg.m^{-3}.
m = masse du volant = masse volumique x volume

$$= \rho \times (\pi R^2 h) = 7\,800 \times \pi \times 1^2 \times 0{,}5 = 12\,252 \text{ kg}$$

$$J = \frac{m R^2}{2} = \frac{12\,252 \times 1^2}{2} = 6\,126 \text{ m}^2\text{. kg}$$

$$E_k = \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{6\,126}{2} \times \left(\frac{1\,000\pi}{30}\right)^2 = 33\,590 \text{ kJ}$$

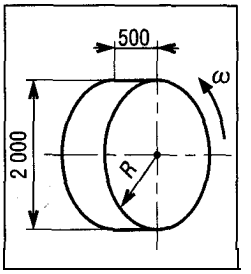


Fig. 12

3, Solide en mouvement plan

Définition 1

E_k (ou T) : énergie cinétique en J (joules)

$$E_k = T = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2$$

V_G : vitesse (absolue) du centre de gravité G du solide (m.s^{-1})
ω : vitesse angulaire du solide (rad.s^{-1})
m : masse du solide (kg)
J_G : moment d'inertie du solide par rapport à un axe perpendiculaire au plan du mouvement et passant par G (m^2.kg).

Définition 2

$$E_k = T = \frac{1}{2} J_I \omega^2 \quad avec \quad J_I = J_G + m\, AG^2$$

Le point I est le centre instantané de rotation du mouvement et J, le moment d'inertie par rapport à l'axe instantané de rotation (axe passant par I et perpendiculaire au plan du mouvement).

Exemple : prenons le cas d'un disque plein, masse m, rayon R, roulant sans glisser sur un plan horizontal à la vitesse angulaire ω, déterminons son énergie cinétique.
Le mouvement est un mouvement plan de centre instantané de rotation I.

$$V_G = \omega R \quad ; \quad J_G = \frac{m R^2}{2}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 + \frac{1}{2} \frac{m R^2}{2} \omega^2 = \frac{3 m \omega^2 R^2}{4}$$

Remarque

- $E_k = \frac{1}{2} J_I \omega^2$
  $= \frac{1}{2}\left(J_G + m\,IG^2\right)\omega^2$
  $= \frac{1}{2}\left(\frac{m R^2}{2} + m R^2\right)\omega^2$
  $= \frac{3 m \omega^2 R^2}{4}$

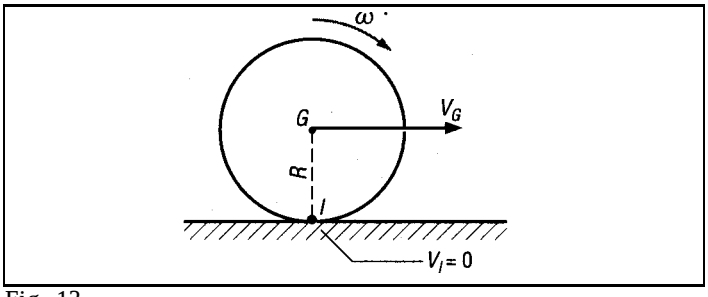


Fig. 13

V • Notions de puissance (P)

La puissance définit la quantité de travail effectué par unité de temps (par seconde) ou autrement dit le débit d'énergie.

1. Puissance moyenne

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

P_m : puissance moyenne en W (watts)
AW : quantité de travail réalisé pendant l'intervalle de temps Δt (J)
Δt : intervalle de temps (s)

2. Puissance instantanée

$$P = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta W}{\Delta t}\right) = \frac{dW}{dt}$$

Lorsque l'intervalle de temps Δt tend vers 0 ou devient très petit, la puissance moyenne tend vers la puissance instantanée.

Unités : le watt (W) $\quad 1\,watt = \frac{1\ joule}{1\ seconde} = 1\ J.s^{-1}$

Autre unité usuelle : le cheval (cv) $\quad 1\ cv = 736\ W$

3. Puissance développée par une force $\vec{F}$

Définition

La puissance instantanée P développée par une force $\vec{F}$ dont le point d'application A se déplace à la vitesse $\vec{V}$ sur sa trajectoire T_A est égale au produit scalaire de $\vec{F}$ par $\vec{V}$.

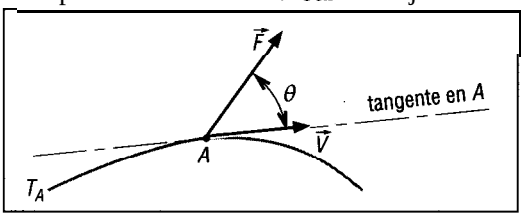


Fig. 14

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V}$$
$$P = F \cdot V \cdot \cos\theta$$

P en watts ; F en N ; V en $m.s^{-1}$

Remarques : si $P > 0$, la puissance est motrice (force motrice) ;
si $P < 0$, la puissance est résistante ou réceptive (force résistante).
La vitesse $\vec{V}$ doit être une vitesse absolue (repère de référence lié à la Terre).

Exemple : reprenons l'exemple du pont roulant du paragraphe I. Le poids $\vec{P}$ de la charge est de 1000 daN et la vitesse de translation, montée comme descente, est de $0{,}1\ m.s^{-1}$.

Montée

$P = \vec{P} . \vec{V} = P . V \cos 180° = 10\ 000 \times 0{,}1 (-1) = -5\ 000$ w

Descente : $P = \vec{P} . \vec{V'} = P . V' \cos 0° = 5\ 000$ W

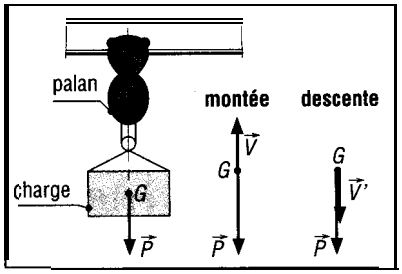


Fig. 15

4. Puissance développée par un couple C

Définition

La puissance développée par un couple C se déplaçant à la vitesse angulaire ω est égale au produit de C par ω.

$$P = C\omega$$

P : puissance développée en W
C : couple en Nm
ω : vitesse de rotation en $rad.s^{-1}$

Exemple

Reprenons le moteur du paragraphe II4, couple constant de 20 Nm à 1 500 $tr.min^{-1}$.

$$P = c\,\omega = 20 \times \left(\frac{1\,500 \times \pi}{30}\right) = 3\,142\,W.$$

5. Puissance d'un torseur d'action

Soit un torseur d'action $\{T\}$ dont le déplacement est défini par le torseur cinématique $\{v\}$. La puissance développée est égale au produit (ou comoment) des deux torseurs.

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M_A} \end{Bmatrix}_A ; \{v\} = \begin{Bmatrix} \vec{\omega} \\ \vec{V_A} \end{Bmatrix}_A \qquad P(T) = \{T\}_A \cdot \{v\}_A = \vec{R} . \vec{V_A} + \vec{\omega} . \vec{M_A}$$

Remarque : le résultat est indépendant du point A choisi pour écrire les torseurs.

VI - Notion de rendement (η)

Le rendement η (éta) d'une machine est égal au rapport de l'énergie restituée sur l'énergie fournie ou reçue.

$$\eta = \frac{W\ restituée}{W\ fournie} \leqslant 1$$

$$\eta = \frac{W\ fournie - W\ perdue}{W\ fournie} = 1 - \frac{W\ perdue}{W\ fournie}$$

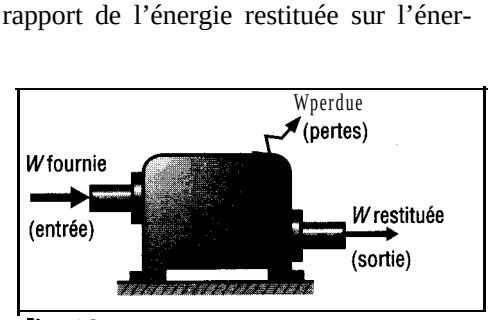


Fig. 16

Remarque : l'énergie perdue peut l'être sous forme de chaleur, de frottements, etc.

VII • Théorèmes sur l'énergie

1. Théorème de l'énergie cinétique ou de l'énergie-puissance

Le théorème traduit sous forme énergétique les équations du principe fondamental de la dynamique. Il permet de déterminer des efforts dynamiques sans avoir à calculer les accélérations mises en jeu.

Remarque : en pratique, l'application du théorème aboutit à une seule équation, alors que le principe fondamental conduit à trois équations de projection (dans le plan).

Énoncé 1 : Pour un solide isolé, le travail des forces extérieures pendant un intervalle de temps, est égal à la variation de l'énergie cinétique du solide.

$$T_2 - T_1 = [\Delta T]_1^2 = [W(\Sigma F_{ext})]_1^2$$

Translation rectiligne : $\frac{m}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) = [\,W(F_{ext})]_1^2$

Rotation d'axe fixe : $\frac{J}{2}\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right) = [\,W(F_{ext})]_1^2$

Mouvement plan : $\frac{m}{2}\left(V_{G2}^2 - V_{G1}^2\right) + \frac{J_G}{2}\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right) = [\,W(F_{ext})]_1^2$

Énoncé 2 : pour un solide isolé, la dérivée de l'énergie cinétique est égale à la puissance développée par les forces extérieures.

$$\frac{dT}{dt} = P(\Sigma F_{ext})$$

Remarque : pour un ensemble de solides, au travail des forces extérieures à l'ensemble, il faut ajouter le travail des actions mutuelles exercées entre chacun des solides de l'ensemble.

Exemple

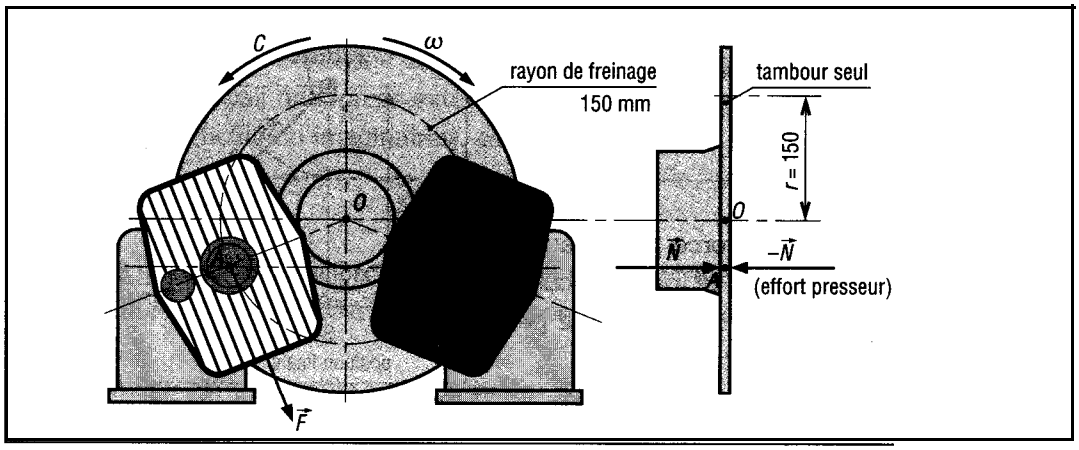


Fig. 17

Un tambour (J = 100 $m^2.kg$ par rapport à son axe de rotation) tourne à la vitesse de 20 $rad.s^{-1}$ ($\simeq$200 $tr.min^{-1}$). Le freinage est réalisé en 6 secondes pendant 3 tours. Déterminons le couple de freinage C si celui-ci est supposé constant.

Résolution

La variation d'énergie cinétique du tambour en rotation est :

$$T_2 - T_1 = \frac{J}{2}\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right) = \frac{100}{2}\left(0 - 20^2\right) = -20\,\text{kJ}$$

La seule action extérieure fournissant un travail (résistant) au tambour isolé est le couple de freinage C. Toutes les autres actions (poids, actions des paliers) passent par l'axe de rotation et, de ce fait, ne produisent aucun travail.

$[W(F_{ext})]_1^2 = -C\theta = -$ C x 2π x 3 (travail résistant)

Théorème : $[\Delta T]_1^2 = -$ 20 000 J = $[W(F_{ext})]_1^2 = -6\pi C$ d'où C = 1 061 Nm

Remarque : on a deux jeux de plaquettes de frein, il en résulte que :

$F = \frac{C}{2r} = \frac{1061}{2\times 0{,}15} = 3537$ N et $N = \frac{F}{\mu}$ (μ = frottement).

2. Loi de conservation de l'énergie

Loi : pour un solide ou un système énergétiquement isolé et dont les forces dépendent d'une énergie potentielle (E_p : forces de pesanteur, actions exercées par des ressorts), l'énergie mécanique totale mise en jeu reste constante entre deux instants successifs.

Énergie mécanique totale $[\Delta T]_1^2 + [E_p]_1^2$ = constante
ou $T_2 + E_{p2} = T_1 + E_{p1}$ = constante

La loi de conservation de l'énergie est un cas particulier (intégrale première) du théorème précédent, obéissant à un certain nombre de conditions.

Remarque : un système est énergétiquement isolé s'il n'échange aucune énergie avec son milieu extérieur, pas de pertes par frottement, etc.

Exemple 1

Un pendule simple de poids $\overrightarrow{mg}$ est lâché sans vitesse initiale à partir de l'horizontale (AG,). Déterminons la vitesse V_2 en position verticale.

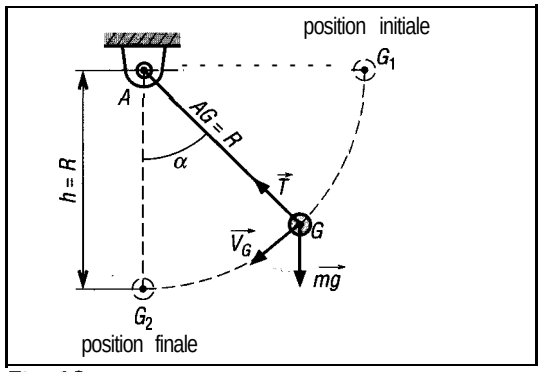


Fig. 18

Résolution

Le poids est la seule force produisant un travail, la tension $\overrightarrow{T}$ du fil (perpendiculaire à la vitesse V_G) n'en produit pas. Le pendule n'échange pas d'énergie.

$T_2 + E_{p2} = T_1 + E_{p1}$ donne :

$$\frac{m V_2^2}{2} + m g z_2 = \frac{m V_1^2}{2} + m g z_1 \quad \text{avec } V_1 = 0 \text{ et } z_1 - z_2 = h = R$$

On obtient : $\frac{m V_2^2}{2} = m g\left(z_1 - z_2\right)$ et $V_2 = \sqrt{2gh}$

Exemple 2

Un wagonnet, de masse m = 250 kg, roulant à la vitesse uniforme de 1,4 $m.s^{-1}$ est arrêté par un amortisseur à ressort. Si la course C d'amortissement est de 100 mm, déterminons l'énergie échangée et l'effort supporté par le ressort en fin de course.

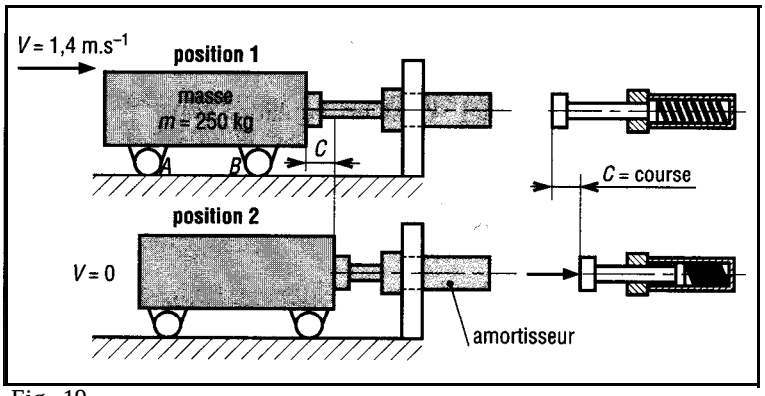


Fig. 19

Résolution

Le wagonnet est soumis à l'action de 4 forces extérieures : poids $\vec{P}$, $\vec{A}$ et $\vec{B}$ actions des essieux et $\vec{F}$ l'action du ressort. $\vec{P}$, $\vec{A}$ et $\vec{B}$, perpendiculaires aux trajectoires des points A, B et G ne fournissent aucun travail. Seule $\vec{F}$ produit un travail résistant.

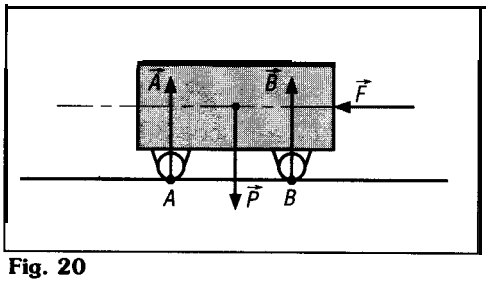


Fig. 20

Loi : $T_2 - T_1 = E_{p1} - E_{p2} = -\frac{k'C^2}{2}$ = [variation d'énergie potentielle du ressort (paragraphe III2)]

$\frac{1}{2}m\left(V_2^2 - V_1^2\right) = \frac{250}{2}\left(0 - 1{,}4^2\right) = -\frac{k \times 0{,}1^2}{2}$ d'où $k = 49\,000\ \text{N.m}^{-1}$

F_1 = 0 en position 1 (ressort non chargé) ;

$F_2 = KC$ = 49 000 x 0,1 = 4 900 N en position 2.

Énergie échangée : $\frac{250}{2}$ x $1{,}4^2 = \frac{49\,000 \times 0{,}1^2}{2}$ = 2455

3. Principe du travail virtuel

Le principe du travail virtuel peut être considéré comme une application particulière de la loi de conservation de l'énergie au cas de la statique.

Pour un solide ou un ensemble de solides en équilibre, l'énergie cinétique est nulle. Il en résulte que le travail des forces extérieures, en prenant en compte des petits déplacements virtuels (fictifs ou imaginaires), est lui aussi nul.

Énoncé

Pour tout solide en équilibre, la somme des travaux virtuels de l'ensemble des actions extérieures au solide isolé est nulle et ceci pour tout déplacement virtuel envisageable.

Le principe est applicable aux ensembles de solides, dans ce cas, seules les actions extérieures à l'ensemble sont à prendre en compte.

Remarque : les déplacements virtuels choisis doivent être compatibles entre eux, ou tenir compte des liaisons entre solides et des possibilités de mouvement.

L'intérêt ou la rentabilité de la méthode dépend de la difficulté à établir des relations entre les déplacements virtuels envisagés.

Exemple

Un point matériel A est en équilibre sous, l'action des trois forces $\vec{F_1}$ (60 N), $\vec{F_2}$ et F_3 (120 N).

Déterminons le module de $\vec{F_2}$.

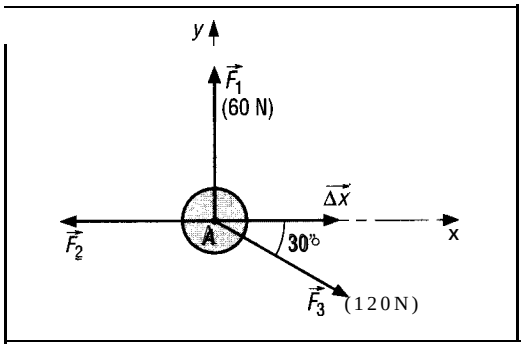


Fig. 21

Résolution : une infinité de déplacements virtuels sont possibles. Choisissons par commodité $\vec{\Delta x}$ opposé à $\vec{F_2}$.

$$W(\Sigma F_{ext}) = W(\vec{F_1}) + W(\vec{F_2}) + W(\vec{F_3}) = 0$$
$$= \vec{F_1} . \vec{\Delta x} + \vec{F_2} . \vec{\Delta x} + \vec{F_3} . \vec{\Delta x}$$
$$= 0 - F_2 . Ax + F_3 . Ax . \cos 30°$$

d'où : $F_2 = F_3 \cos 30° = 104$ N.

Remarque: $W(\Sigma F_{ext}) = (\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}) . \vec{\Delta x} = \vec{0} . \vec{\Delta x} = 0$.

EXERCICES À RÉSOUDRE

1 Calculer le travail et la puissance d'une cabine d'ascenseur : la masse de la cabine est de 850 kg, la vitesse de levage (supposée constante) est de 1,2 m.s^{-1}, les forces de frottements sont évaluées à 40 daN, la hauteur entre le sous-sol et le dernier étage est de 25 m.

Réponse

P = 10,48 kW ; W = 218,46 kJ.

❑ Un escalier roulant de magasin transporte 36 personnes par minute entre le premier et le deuxième étage, la différence de niveau est de 5 m. Le poids moyen des personnes transportées est de 60 daN. Si le moteur délivre en permanence une puissance de 2,2 kW, déterminer le rendement du système.

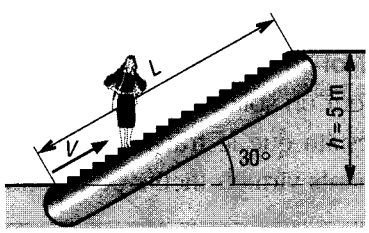


Fig. 22

3 Calculer le travail qu'il faut effectuer pour charger (depuis le sol) 15 colis de 50 kg sur la plate-forme arrière d'un camion située à 1,3 m de haut.

Réponse

W = 9,565 kJ.

❑ Calculer le travail d'un remorqueur qui tire un cargo sur une distance de 2,5 km. La tension du câble, supposée constante, est de 120 kN.

❑ Un remonte-pente de station de ski tire 1 200 skieurs par heure à la vitesse de 120 m par minute. La masse moyenne de chaque skieur est de 70 kg, la longueur de la pente est de 1 800 m et sa dénivellation de 600 m (pente de 33 %). Déterminer la puissance moyenne du moteur nécessaire au transport des skieurs si le rendement de l'installation est de 0,7 et si l'on admet une surcharge de 200 %.

Réponse

$P = 1110$ kW.

❑ Un bateau se déplace à la vitesse de 15 nœuds (1 nœud = 0,5144 $m.s^{-1}$), sa turbine développe une puissance de 5 500 cv. Calculer la résistance à l'avancement du bateau si le rendement de l'ensemble turbine + hélice est supposé égal à 0,4.

Réponse

210 kN.

7 Un skip de chargement effectue le levage d'un wagonnet, le poids de l'ensemble est de 300 daN, la distance parcourue sur le rail est de 15 m, l'inclinaison du rail est de 70° par rapport à l'horizontale, la vitesse du wagonnet est de 0,3 $m.s^{-1}$. a) Déterminer l'énergie dépensée pour le levage. b) Quelle est la puissance du moteur à adopter si le rendement de l'appareil est de 0,7 ?

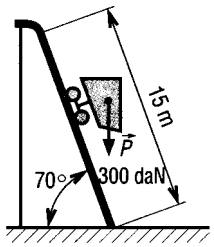


Fig. 23

Réponse

$W = 42{,}3$ kJ ; $P = -1{,}2$ kW.

8 Le wagonnet ci-contre, d'une masse de 300 kg, arrive en fin de course sur un amortisseur à la vitesse V = 2 $m.s^{-1}$. L'amortisseur est assimilé à un ressort de raideur K, la course d'amortissement est de 100 mm. La pente du rail est de 10°. Déterminer la raideur du ressort et l'effort exercé en fin de course.

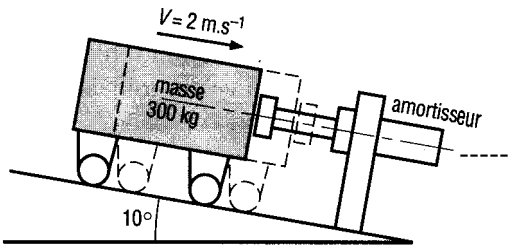


Fig. 24

❑ Reprendre l'exercice 8 avec un wagon descendant une pente de 2 %, départ arrêté sur une longueur de rail de 20 m. Le ressort de l'amortisseur a une raideur K = 10 000 $kN.m^{-1}$. Déterminer la vitesse du wagon au moment du contact et la course de compression du ressort.

Réponse

v = 2,8 $m.s^{-1}$; course = 0,178 m.

❑ Une automobile, de masse 1 000 kg, descend une pente de 10 %. La vitesse initiale du véhicule est de 90 $km.h^{-1}$, les freins sont actionnés et exercent un effort (résultant) de freinage constant de 2 500 N. a) Déterminer la distance parcourue (x) avant arrêt. b) Quelle est la quantité d'énergie dissipée par le freinage ?

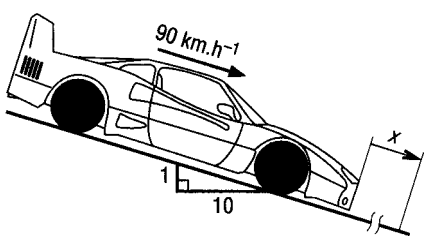


Fig. 25

Réponse

$x \simeq 205$ m ; $W = 512{,}6$ kJ.

11 Un avion, masse 16 000 kg, atterrit sur un porte-avion. Le freinage est réalisé par un câble BAC supposé inextensible. Le câble est lié en *B* et C à des amortisseurs pneumatiques situés sous le pont et exerce un effort de tension constant de 600 kN. Si L = 40 m en fin de mouvement (L = 0 au départ en *H*), déterminer la vitesse d'apontage de l'appareil en H.

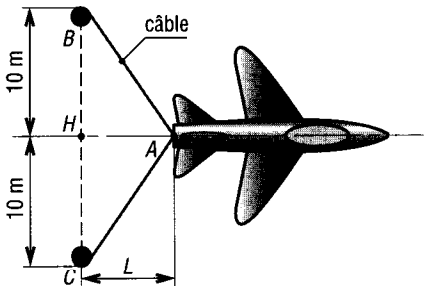


Fig. 26

Réponse

174 km.h^{-1}.

❑ Reprendre l'exercice 11 avec une vitesse d'apontage de 200 km.h^{-1}. En déduire la distance *L* de freinage.

❑ *AB* = *CD* = 1 m ; *AC* = *BD* = 1,6 m. Le poids P_1 du solide 1 est de 3 000 daN, les poids des barres *AB* et CD sont négligés, (0) est un bâti fixe et les liaisons en A, *B*, *C* et *D* sont des liaisons pivots. Le solide 1 est lâché, sans vitesse initiale, en position horizontale (θ = 0). a) Déterminer la vitesse du solide 1 lorsque *AB* est verticale. b) En déduire la valeur des actions exercées en *A* et C.

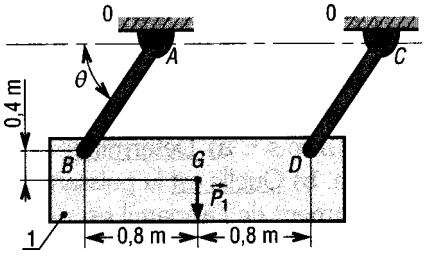


Fig. 27

❑ Reprendre l'exercice 13 ; le solide 1 est remplacé par un tronc d'arbre destiné à servir de bélier dans un film historique et les barres par des câbles (*AB* = *CD* = 5 m). Quelle doit être la valeur initiale de l'angle θ de façon à avoir une vitesse d'impact de 5 m.s^{-1} en position verticale ?

Réponse

θ = 41,8°.

❑ Un volant de presse à forger, de masse 400 kg, a un rayon de gyration de 600 mm. Chaque opération d'emboutissage exige un travail de 12 000 joules fourni par le volant. a) La vitesse initiale du volant est de 300 tr.min^{-1}, déterminer la vitesse finale après amboutissage. b) Si un moteur exerce un couple constant de 30 Nm pour relancer le volant, quel nombre de tours celui-ci doit-il effectuer pour retrouver une vitesse de 300 tr.min^{-1} ?

Réponse

273,5 tr.min^{-1} ; 63,7 tours.

❑ Une balle de 20 grammes est tirée à travers plusieurs planches de bois empilées. L'épaisseur de l'empilage est de 200 mm, la vitesse d'arrivée de la balle est de 700 m.s^{-1}, la vitesse de sortie de 350 m.s^{-1}. Déterminer la résistance à la pénétration exercée par les planches sur la balle si celle-ci est supposée constante.

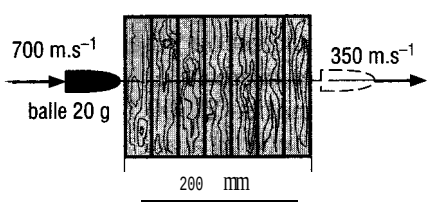


Fig. 28

Réponse

18 375 N.

17 Le vérin de levage proposé travaille uniquement en tirant. Le côté fond est relié à l'atmosphère, l'ensemble descend sous l'effet de la charge à la vitesse constante de 0,3 m.s^{-1}. L'alimentation est effectuée par une pompe hydraulique à débit fixe avec régulation à la descente. L'arrêt de la charge, en fin de course de sortie de tige, est obtenue par une valve de décélération travaillant sur la course L = 20 mm. Le diamètre de la tige est de 40 mm, le diamètre de l'alésage de 60 mm. Déterminer l'effort $\vec{F}$ de décélération si celui-ci est supposé constant sur la course L. En déduire la pression interne maximale dans le vérin.

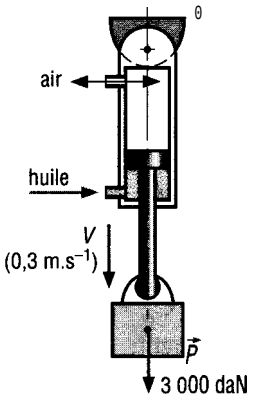


Fig. 29

Réponse

F = 6 880 N ; 235 bars.

❑ Reprendre l'exercice 17 avec le dispositif proposé : course d'amortissement L = 40 mm ; diamètre de tige 140 mm ; diamètre d'alésage 200 mm. Le balancier, articulé en A (pivot) sur le bâti, sera assimilé à un parallélépipède de dimensions 4 x 0,7 x 0,7 m.

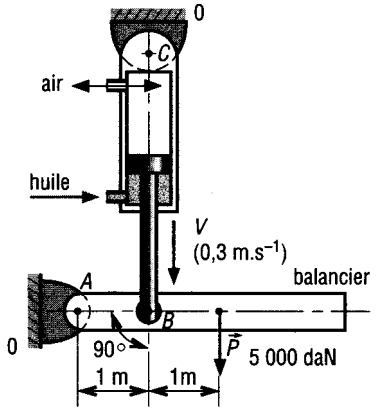


Fig. 30

❑ Pour le frein à sabot proposé sous forme schématique, la vitesse initiale du tambour est de 200 tr.min^{-1}. La masse du tambour et du dispositif en rotation est de 1 000 kg, le rayon de gyration correspondant est de 400 mm. Quel effort $\vec{F}$ faut-il exercer si l'on souhaite arrêter le dispositif en 50 tours (frottement sabot/tambour : $f = \mu = 0{,}3$).

Réponse

F = 443 N.

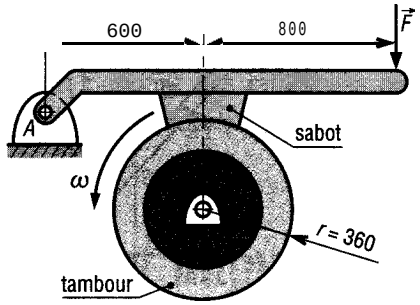


Fig. 31

❑ Une benne 2 est articulée en B sur le châssis 1 d'un camion. L'effort de levage est fourni par un vérin hydraulique 3 + 4 (3 = corps ; 4 = tige) articulé en A sur 2 et en C sur 1. $\vec{P_2}$ (10 000 daN) schématise le poids de la benne et des matériaux qui y sont contenus. a) Déterminer l'énergie nécessaire au levage si α varie entre 0" et 45" et si P_2 reste constant (rendement = 0,8). b) Si la tige 4 sort du corps 3 à la vitesse constante de 5 cm.s^{-1}, établir la courbe des puissances instantanées, en fonction de θ, au cours du levage (rendement = 0,8).

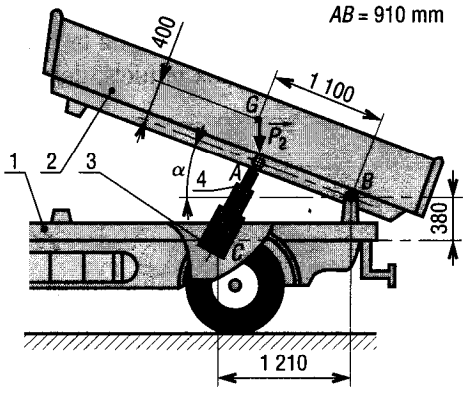


Fig. 32

❑ Reprendre l'exercice 19 avec deux sabots identiques disposes symétriquement et f = y = 0,25. Déterminer F et la puissance de freinage au début du mouvement à 400 $tr.min^{-1}$.

❑ Une roue dentée A (masse 4 kg, rayon de gyration 120 mm, rayon primitif r_A = *150* mm) transmet son mouvement à une roue B (masse 12 kg, rayon de gyration 300 mm, rayon primitif r_B = 375 mm). L'ensemble est à l'arrêt lorsqu'un couple C_A = 10 Nm est appliqué à la roue A. Les frottements sont négligés. a) Quel nombre de tours fait la roue A avant qu'elle n'atteigne la vitesse de 900 $tr.min^{-1}$. b) Calculer l'effort tangentiel F_T exercé entre les deux roues.

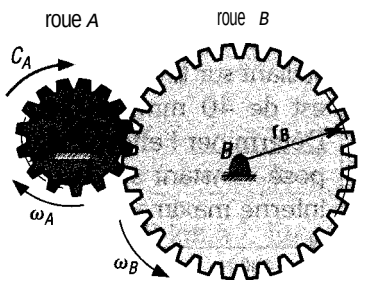


Fig. 33

Réponse

16,3 **tours** ; F_T **= 50 N.**

❑ Un panneau de porte de garage coulisse en A (glissière horizontale) et en B (glissière verticale) sous l'action de la charge $\vec{F}$ appliquée au milieu du panneau. $\vec{P}$ schématise le poids du panneau. En appliquant le principe des travaux virtuels, déterminer la valeur de $\vec{F}$ (toujours horizontale) en fonction de $\vec{P}$ si la porte est supposée en équilibre.

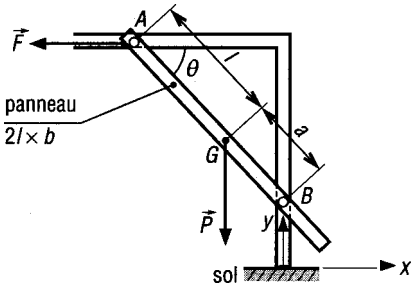


Fig. 34

❑ Une barre AB est en équilibre sur deux plans inclinés perpendiculaires entre eux. Les frottements en A et B sont négligés. $\vec{P}$ schématise le poids de la barre. En appliquant le principe des travaux virtuels, déterminer la valeur de l'angle θ entraînant l'équilibre.

Réponse

θ = **16.3°.**

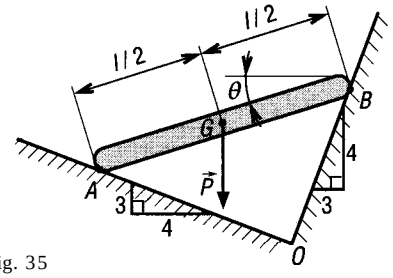


Fig. 35

❑ Un tire-bouchon est réalise à partir d'un système de barres articulées (pivots) entre elles et d'une tige filetée articulée en D sur les barres. $\vec{F}$ schématise l'action de l'opérateur, $\vec{B}$ (non représentée) celle de la bouteille et $\vec{T}$ celle du bouchon sur la tige. En utilisant le principe des travaux virtuels, déterminer la valeur de T en fonction de F.

Réponse

$T = 3\,F$.

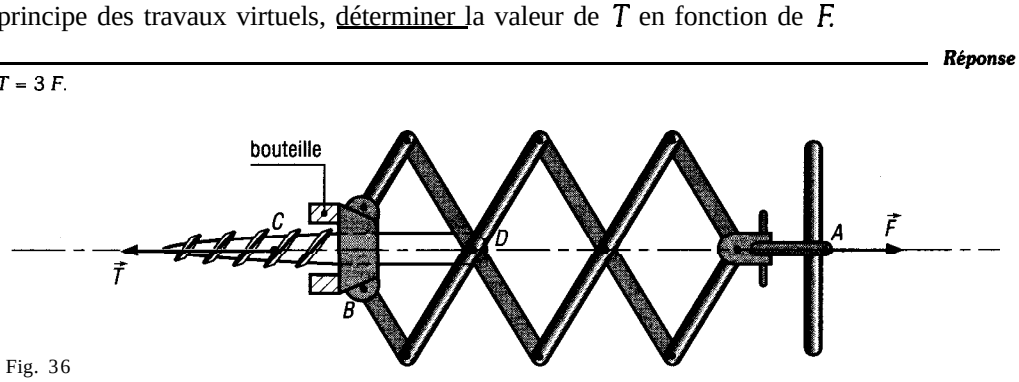


Fig. 36

18 QUANTITÉ DEMOUVEMENT-CHOCS

OBJECTIFS

- Définir les notions de quantité de mouvement, d'impulsion et de moment cinétique.
- Développer les théorèmes relatifs à la quantité de mouvement, au moment cinétique ainsi que les théorèmes de conservation.
- Donner des notions sur les chocs.

Dans le chapitre « énergétique », les relations sont obtenues par intégration du principe fondamental de la dynamique à partir des déplacements (x, θ, etc.). Pour ces cas, un changement de vitesse se traduit par une variation d'énergie.
Les équations de ce chapitre sont établies par intégration du principe fondamental par rapport au temps t. Les théorèmes obtenus sont particulièrement utiles à la résolution des problèmes faisant intervenir des efforts agissant pendant des intervalles de temps assez courts. Dans ce chapitre, nous nous limiterons à des problèmes plans.

I - Quantité de mouvement (p) et impulsion(I)

Considérons un point matériel de masse m ou un solide de masse m et de centre de gravité G. $\vec{V_G}$ est la vitesse du centre de gravité ou celle du point matériel à un instant choisi. $\Sigma \vec{F}_{ext}$ est la résultante des actions extérieures agissant sur le solide.

1. Définition

On appelle quantité de mouvement $\vec{p}$ le produit de la masse m du solide par la vitesse $\vec{V_G}$ du centre de gravité G.

$$\vec{p} = m\,\vec{V_G}$$

p en kg.m.s^{-1} ou N.s
V_G en m.s^{-1}
m en kg

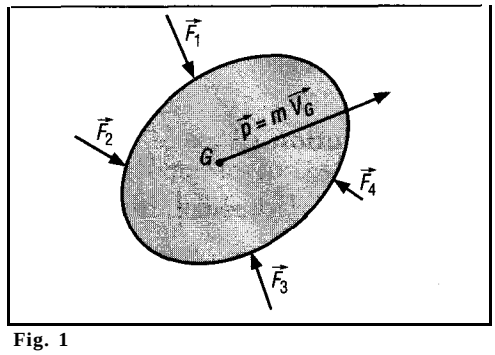


Fig. 1

2. Théorème de la quantité de mouvement

D'après le principe fondamental de la dynamique et si la masse du solide reste constante au cours du temps :

$$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a_G} = m\left(\frac{d\overrightarrow{V_G}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\overrightarrow{V_G}\right) = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt}$$

Énoncé : la résultante des forces extérieures agissant sur le solide $(\Sigma \overrightarrow{F_{ext}})$ est égale à la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement.

$$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\overrightarrow{V_G}\right)$$

3. Impulsion $\overrightarrow{I}$

Définition : l'impulsion $I_{1/2}$ donnée à un solide pendant un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ est égale à la variation de la quantité de mouvement entre ces deux instants.

$$\overrightarrow{I_{1/2}} = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1} = m\overrightarrow{V_{G2}} - m\overrightarrow{V_{G1}} = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \overrightarrow{F_{ext}}\, dt$$

$I_{1/2}$ en N.s ou kgm.s^{-1}

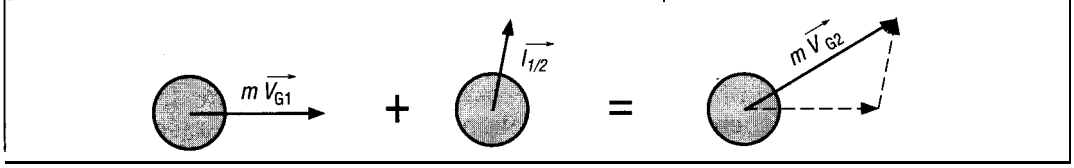


Fig. 2

Remarques : comme dans le cas de la statique, il sera nécessaire de faire l'isolement du solide pour déterminer les actions extérieures.

Si l'énergie cinétique et le travail sont des grandeurs scalaires, la quantité de mouvement et l'impulsion $\overrightarrow{I}$ sont des grandeurs vectorielles.

Si la résultante $\Sigma \overrightarrow{F_{ext}}$ est constante au cours du temps, l'expression se simplifie :

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \overrightarrow{F_{ext}}\, dt = \Sigma \overrightarrow{F_{ext}} \int_{t_1}^{t_2} dt = \Sigma \overrightarrow{F_{ext}}\left(t_2 - t_1\right) = \Sigma \overrightarrow{F_{ext}}.\Delta t = \overrightarrow{I_{1/2}}$$

Exemple

Au tennis, un joueur frappe une balle de 60 grammes arrivant à 72 km.h^{-1}, pendant 0,04 seconde, et la renvoie à 108 km.h^{-1} suivant un angle à 30".

Le poids de la balle est négligé.

Déterminons la force moyenne $\overrightarrow{F}$ exercée par la raquette et l'impulsion donnée à la balle.

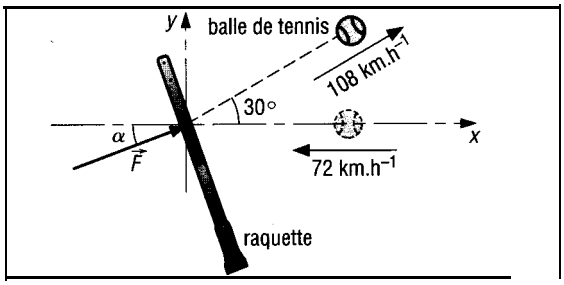


Fig. 3

Résolution : $V_1 = \frac{72}{3,6} = 20$ m.s^{-1} ; $V_2 = \frac{108}{3,6} = 30$ m.s^{-1}

$$\overrightarrow{I_{1/2}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = \vec{F}\int_{t_1}^{t_2} dt = \vec{F}.\Delta t = 0,04\vec{F} = m\overrightarrow{V_2} - m\overrightarrow{V_1}$$

Projection sur x : $0,04\ F_x = 0,06\ V_2 \cos 30" + 0,06\ V_1$

$= 0,06 \times 30 \cos 30" + 0,06 \times 20 = 2,76$ N.s

d'où : $F_x = 69$ N

Projection sur y : $0{,}04\ F_y = 0{,}06\ V_2 \sin 30° - 0 = 0{,}06 \times 30 \times \sin 30° = 0{,}9$ N.s

d'où : $F_y = 22{,}5$ N ; a = 18° et $F = 72{,}6$ N.

$I_{1/2} = \mathbf{F.\ At} = 72{,}6 \times 0{,}04 = 2{,}9$ N.s ; $I_{1/2}x = 2{,}76$ N.s ; $I_{1/2}y = 0{,}9$ N.s

II - Moment cinétique *L* et impulsion angulaire *H*

1. Moment cinétique d'un solide au centre de gravité G

Le solide peut être assimilé à un ensemble de point matériel M de masse m,. Le moment cinétique de chaque point en G est :

$\overrightarrow{L_G(M)} = \overrightarrow{\sigma_G(M)} = \overrightarrow{GM} \wedge m_i \overrightarrow{V_M}$

= [moment en G de $m_i \overrightarrow{V_M}$]

Pour l'ensemble du solide :

$\overrightarrow{L_G} = \overrightarrow{\sigma_G} = \Sigma \overrightarrow{GM} \wedge m_i \overrightarrow{V_M}$

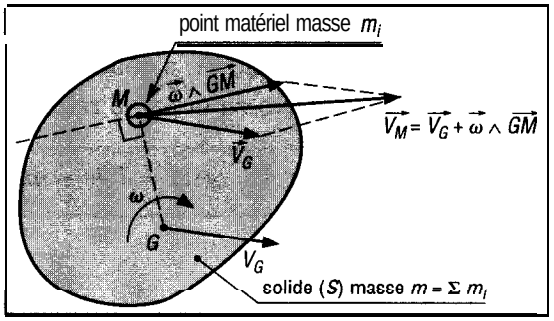


Fig. 4

En remplaçant $\overrightarrow{V_M}$ par sa valeur et en remarquant que $\Sigma m_i \overrightarrow{GM} = \vec{0}$ (par définition du centre de gravi-) :

$\overrightarrow{L_G} = \overrightarrow{\sigma_G} = \Sigma \overrightarrow{GM} \wedge m_i (\overrightarrow{V_G} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GM})$

$= \Sigma m_i \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{V_G} + \Sigma m_i \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GM}) = \vec{0} + \Sigma m_i \overrightarrow{GM} \wedge (\omega \wedge \overrightarrow{GM})$

$$\overrightarrow{L_G} = \overrightarrow{\sigma_G} = \Sigma m_i \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GM}) = [J_G]\ \vec{\omega}$$

Dans l'espace, $[J_G]$ est une matrice d'inertie (voir chapitre suivant « cinétique dans l'espace »). Dans le cas des mouvements plans (x, y), $[J_G]$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (G, z), perpendiculaire au plan du mouvement et $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{z}$. Pour ce cas, le moment cinétique en G peut s'écrire sous la forme scalaire :

$$L_G = \sigma_G = J_G \cdot \omega$$

2. Théorème du moment cinétique (mouvements plans)

Dans le cas d'un mouvement plan et si le moment d'inertie J_G est constant, le moment résultant en G des forces extérieures à un solide isolé s'écrit (d'après le principe fondamental) :

$$\Sigma M_G(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_G\, a = J_G \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(J_G \omega) = \frac{d(L_G)}{dt}$$

Énoncé : le moment résultant au centre de gravité G de toutes les forces extérieures agissant sur un solide isolé est égal à la dérivée du moment cinétique en G.

$$\Sigma M_G(\overrightarrow{F_{ext}}) = \frac{dL_G}{dt} = \frac{d\sigma_G}{dt} = \frac{d}{dt}(J_G \cdot \omega)$$

3. Impulsion angulaire $H_{1/2}$

Définition : l'impulsion angulaire $H_{1/2}$, par rapport au centre de gravité G, de l'ensemble des forces extérieures agissant sur un solide isolé pendant un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ est égale à la variation du moment cinétique en G.

$$H_{1/2} = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_G(\overrightarrow{F_{ext}})\, dt = L_{G2} - L_{G1} = J_G(\omega_2 - \omega_1)$$

4. Moment cinétique en un point A quelconque

Dans le cas d'un mouvement plan, le moment cinétique au point A s'obtient à partir du moment cinétique en G par la relation :

$$L_A = L_G + m V_G \,.\, AM = J_G\omega + m V_G \,.\, d$$

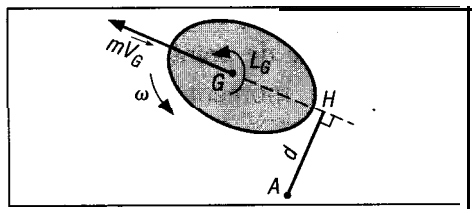


Fig. 5

5. Solide en rotation autour d'un axe fixe (0)

$V_G = \omega \,.\, OG = \omega R$; $\Sigma M_0(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_0\,\alpha$

$L_0 = L_G + m\,V_G \,.\, R = J_G\,\omega + m\,\omega R^2$

$= (J_G + mR^2)\,\omega = J_0\omega$

$$L_0 = J_0\,\omega$$

$$H_{1/2} = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_0(\overrightarrow{F_{ext}})\, dt = J_0(\omega_2 - \omega_1)$$

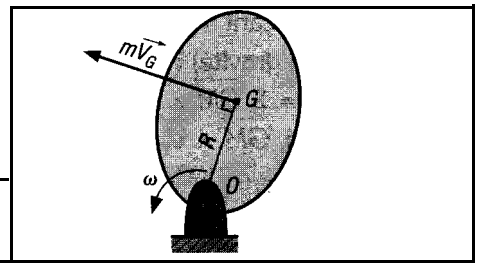


Fig. 6

Exemple

L'engrenage étant initialement au repos, on applique un couple moteur M de 3 Nm à la roue A. Les frottements sont négligés.

Roue	***A***	***B***
Rayon primitif (*r*)	80 mm	240
Masse (*m*)	2 kg	9 kg
Rayon de gyration (r_k)	60 mm	200

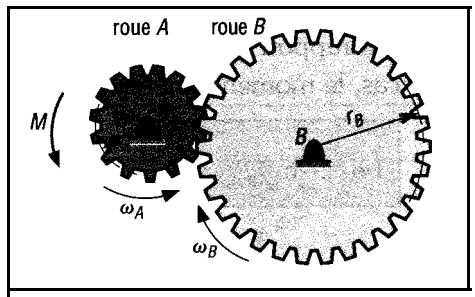


Fig. 7

Déterminer le temps mis pour atteindre 500 $tr.min^{-1}$ et la force tangentielle F_T exercée entre les deux roues, si celle-ci est supposée constante.

Résolution

$J_A = m_A\, r_{kA}^2 = 2 \times 0{,}06^2 = 0{,}0072\ m^2kg$

$J_B = m_B\, r_{kB}^2 = 9 \times 0{,}2^2 = 0{,}36\ m^2kg$

$\omega_A = \dfrac{500 \times \pi}{30} = 52{,}36\ rad.s^{-1}$

$\omega_B = \omega_A \times \dfrac{r_A}{r_B} = 52{,}36 \times \dfrac{80}{240} = 17{,}45\ rad.s^{-1}$

a) Isolons la roue B

B_x et B_y (action du palier B) passant par B ne fournissent aucun moment ou aucune impulsion angulaire. Seule la force tangentielle F_t fournit une impulsion pendant la durée :

$\Delta t = t_2 - t_1$ et $L_B = J_B \omega_B$

$H_{B1/2} = \int_{t1}^{t2} \Sigma M_B(\overrightarrow{F_{ext}})\, dt = J_B(\omega_{B2} - \omega_{B1})$

$= -F_t \cdot \Delta t \cdot r_B = -J_B(\omega_{B2} - 0)$

$$F_t \Delta t = \frac{J_B \omega_{B2}}{r_B} = \frac{0{,}36 \times 17{,}45}{0{,}24} = 26{,}17 \text{ N.s}$$

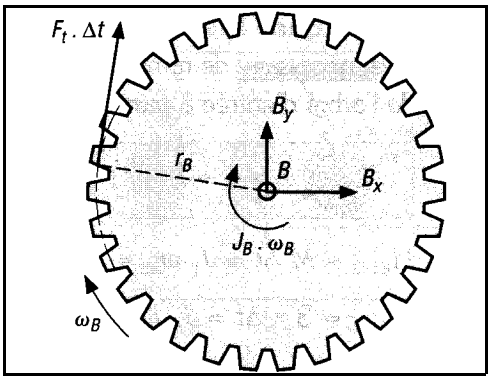


Fig. 8

b) Isolons la roue A

$L_A = J_A \omega_A$; A, et A, ne produisent aucune impulsion ; seules F_t et le couple M produisent une impulsion.

$H_{A1/2} = \int_{t1}^{t2} M_A(\overrightarrow{F_{ext}})\, dt = J_A(\omega_{A2} - \omega_{A1})$

$= M\,\Delta t - F_t \cdot \Delta t \cdot r_A = J_A(\omega_{A2} - 0)$

$3 \times \Delta t - 26{,}17 \times 0{,}08 = 0{,}0072 \times 52{,}36$

d'où : $\Delta t = 0{,}82\ s$

et $F_t = \frac{26{,}17}{0{,}82} = 31{,}8$ N

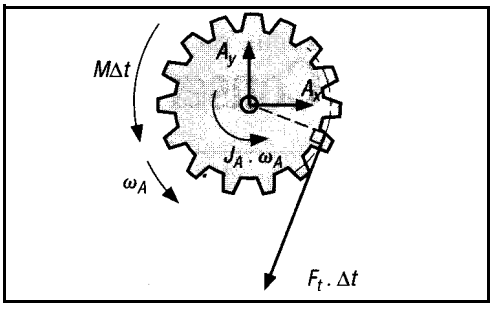


Fig. 9

Remarque : $H_{A1/2} = 0{,}375$ Nms et $H_{B1/2} = 6{,}28$ Nms

III- Cas des ensembles de solides

Il faut considérer les actions extérieures à l'ensemble isolé, même démarche qu'en statique. Les interefforts entre les solides de l'ensemble ne sont pas pris en compte (sont des efforts intérieurs).

$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \ldots$

$\Sigma M_0(\overrightarrow{F_{ext}}) = M_0(\overrightarrow{F_1}) + M_0(\overrightarrow{F_2}) + \ldots$

$\Sigma \overrightarrow{p(t_2)} = m_1 \overrightarrow{V_{G1}}(t_2) + m_2 \overrightarrow{V_{G2}}(t_2) + \ldots$

$\Sigma \overrightarrow{p(t_1)} = m_1 \overrightarrow{V_{G1}}(t_1) + m_2 \overrightarrow{V_{G2}}(t_1) + \ldots$

$L_{G1} = J_{G1}\omega_1$; $L_{G2} = J_{G2}\omega_2$; etc.

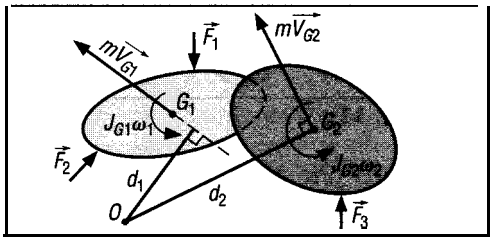


Fig. 10

$\Sigma L_0(t) = (L_{G1} + m V_{G1} \cdot d_1)_{(t)} + (L_{G2} + m V_{G2} \cdot d_2)_{(t)} + \ldots$

$$\overrightarrow{I_{E1/2}} = \Sigma \overrightarrow{p(t_2)} - \Sigma \overrightarrow{p(t_1)} = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \overrightarrow{F_{ext}}\, dt$$

$$H_{E1/2} = \Sigma L_0(t_2) - \Sigma L_0(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_0(\overrightarrow{F_{ext}})\, dt$$

Exemple : reprenons l'exemple de l'engrenage du paragraphe II 4. Appliquons le théorème du moment cinétique à l'ensemble des deux roues afin de déterminer le temps Δt pour la montée en régime.

Remarque : lorsque les arbres d'une même transmission tournent à des vitesses différentes, il est nécessaire de ramener les moments d'inertie de chacun des arbres (1, 2, 3, etc.) à celui de l'arbre d'entrée à partir de la relation (ω_1 est la vitesse de l'arbre d'entrée) :

$$J_T = J_1 + J_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + J_3\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2 + \ldots + J_n\left(\frac{\omega_n}{\omega_1}\right)^2$$

$$H_{E1/2} = M\,\mathrm{At} = J_T\,\omega_{A2} = \left[J_A + J_B\left(\frac{\omega_B}{\omega_A}\right)^2\right]\omega_{A2}$$

$$= 3 \times At = J_A\,\omega_{A2} + J_B\,\frac{\omega_B^2}{\omega_{A2}} = 0{,}0072 \times 52{,}36 + 0{,}36 \times \frac{17.452}{52{,}36} = 2{,}47$$

d'où : $\mathrm{At} = 2{,}47 / 3 = 0{,}82$ s

IV • Conservation de la quantité de mouvement

Théorème : pour un solide isolé (ou pour un ensemble), si la somme des impulsions fournies par les actions extérieures est nulle, il y a conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique. Ces grandeurs restent constantes au cours du temps.

$$\Sigma \vec{I} = \vec{0} \text{ ou } \Sigma\, m\, \vec{V_G}(t_2) = \Sigma\, m\, \vec{V_G}(t_1)$$

$$\Sigma H = 0 \text{ ou } \Sigma L_0(t_2) = \Sigma L_0(t_1)$$

Exemple 1

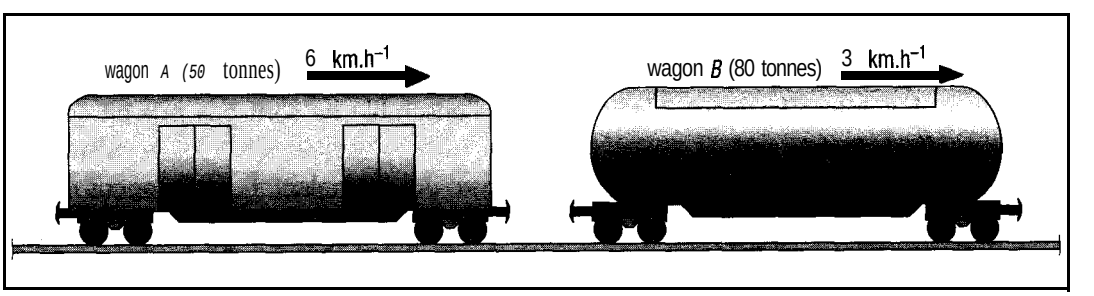


Fig. 11

Dans une gare, un wagon A (50 tonnes, 6 $\mathrm{km.h^{-1}}$) percute un wagon B (80 tonnes, 3 $\mathrm{km.h^{-1}}$) roulant dans le même sens. Déterminons la vitesse des deux wagons après impact et attelage automatique, ainsi que les pertes énergétiques engendrées.

Résolution : dans cet exemple, les forces extérieures sur chaque wagon (poids et actions des rails sur les roues) s'équilibrent deux à deux pendant l'intervalle de temps considéré. Il y a conservation de la quantité de mouvement et si V est la vitesse commune des wagons après impact :

$$(m_A + m_B)\,V = m_A\,V_A + m_B\,V_B$$

$$v = \frac{m_A V_A + m_B V_B}{m_A + m_B} = \frac{50\,000 \times 6 + 80\,000 \times 3}{50\,000 + 80\,000} = 4{,}15\,\mathrm{km.h^{-1}}$$

Pertes énergétiques : $E_k(t_1) = \frac{1}{2}\,m_A\,V_A^2 + \frac{1}{2}\,m_B\,V_B^2 = 97\,222$ J

$E_k(t_2) = \frac{1}{2}\,(m_A + \mathrm{m},)\,V^2 = 86\,378$ J

Pourcentage de pertes : $\frac{97\,222 - 86\,378}{97\,222} = 0{,}125$ (12,5 %)

Exemple 2

Une balle A, de masse m_A, vitesse V_A, percute une boule B, de masse m_B, au repos ($V_B = 0$). Déterminons la vitesse $\vec{V}$ de l'ensemble après impact.

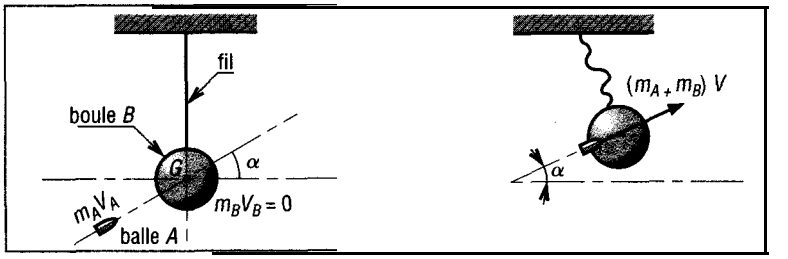


Fig. 12

Résolution : dès que la balle frappe la boule B, la tension du fil (T) devient nulle et le poids de la bille n'est plus équilibré par celle-ci. Cependant, le temps Δt étant très court, l'impulsion $P\Delta t$ engendrée par le poids est négligeable devant les autres termes. Il y a conservation de la quantité de mouvement par approximation.
On peut alors écrire : $m_A V_A = (m_A + m_B) V$.

Remarque : si la balle est tirée vers le bas (angle $-\alpha$), il n'y a plus conservation de la quantité de mouvement. Si on peut admettre que $P\Delta t = 0$, en revanche, il faut tenir compte de l'impulsion $T\Delta t$ engendrée par la tension du fil.

V ▪ Notions sur les chocs

Les relations liées à la quantité de mouvement trouvent une application importante avec les chocs.

1, Chocs suivant une direction commune

Il y a conservation de la quantité de mouvement avant et après choc. Autrement dit :

$$m_A V_A + m_B V_B = m_A V'_A + m_B V'_B$$

Au moment du choc, la zone de contact entre les deux solides se déforme et emmagasine de l'énergie qui est ensuite restituée totalement ou partiellement.
Le coefficient de restitution e caractérise cette propriété :

$$e = \frac{\text{vitesse relative de séparation}}{\text{vitesse relative d'approche}}$$

Solide A : $e = \dfrac{V - V'_A}{V_A - V}$

Solide B : $e = \dfrac{V'_B - V}{V - V_B}$

en éliminant V entre les deux relations $\Rightarrow$ $e = \dfrac{V'_B - V'_A}{V_A - V_B}$

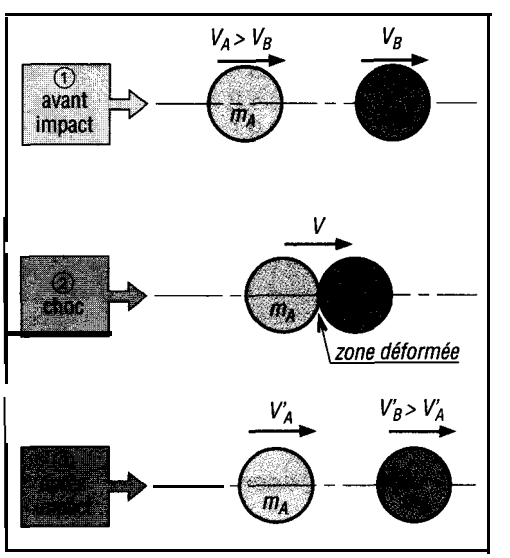


Fig. 13

e = 1 : le choc est parfaitement élastique (pertes = 0) ;
e = 0 : le choc est parfaitement plastique (pertes maximales) ;
0 < e < 1 : la plupart des chocs varient entre ces deux tendances.

Remarques

Les chocs sont en général accompagnés de pertes énergétiques qui peuvent être calculées à partir de la variation d'énergie cinétique avant et après choc. Ces pertes se concrétisent sous forme d'échange de chaleur localisée à la partie déformée et sous forme d'énergie sonore.

Dans la mesure où l'équation de conservation comprend deux inconnues (V_A' et V_B'), la connaissance de e est nécessaire pour résoudre les exercices.

Exemple

En génie civil, un marteau (1) de 600 kg est utilisé pour enfoncer des piliers ou des pieux (2) dans le sol pour servir de fondations.

Le marteau part de la position repos, tombe d'une hauteur de 2,50 m sur un pieu de 2 000 kg et rebondit sur une hauteur de 0,2 m ($r = 0,2$).

Déterminons la vitesse du marteau avant et après impact, le coefficient de restitution e et les pertes énergétiques au moment du choc.

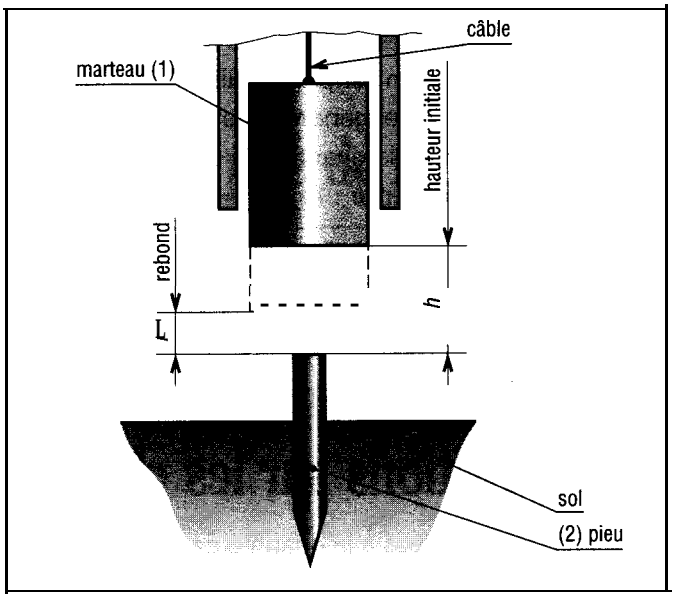


Fig. 14

Résolution

a) V_1 est la vitesse du marteau juste avant impact et $\overrightarrow{V_1'}$ la vitesse juste après. Il y a conservation de l'énergie à la descente ou à la montée, d'où :

$$\frac{1}{2} m V_1^2 = m g h \text{ et } V_1 = \sqrt{2 g h} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 2,5} = 7 \text{ m.s}^{-1};$$

$$\frac{1}{2} m V_1'^2 = m g r \text{ et } V_1' = \sqrt{2 g r} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,2} = 2 \text{ m.s}^{-1}.$$

b) Il y a conservation de la quantité de mouvement pour l'ensemble pieu plus marteau :

$$m_2 V_2 + m_1 V_1 = m_2 V_2' + m_1 V_1'$$

$$2\ 000 \times 0 + 600 \times 7 = 2\ 000 \times V_2' - 600 \times 2 \text{ d'où: } V_2' = 2,7 \text{ m.s}^{-1}$$

c) Coefficient de restitution

$$e = \frac{V_2' - V_1'}{V_1 - V_2} = \frac{2,7 - (-2)}{7 - 0} = \frac{4,7}{7} = 0,67$$

d) Pertes énergétiques

$$T_1 = m_1 \frac{V_1^2}{2} = m g h = 600 \times 9,81 \times 2,5 = 14\,715 \text{ J}.$$

$$T_2 = m_1 \frac{V_1'^2}{2} + m_2 \frac{V_2'^2}{2} = 600 \times \frac{2^2}{2} + 2\,000 \times \frac{2,7^2}{2} = 8\,490 \text{ J}$$

$$\text{taux de pertes : } \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{14\,715 - 8\,490}{14\,715} = 0,426 \ (42,3\%)$$

2. Chocs suivant une direction oblique

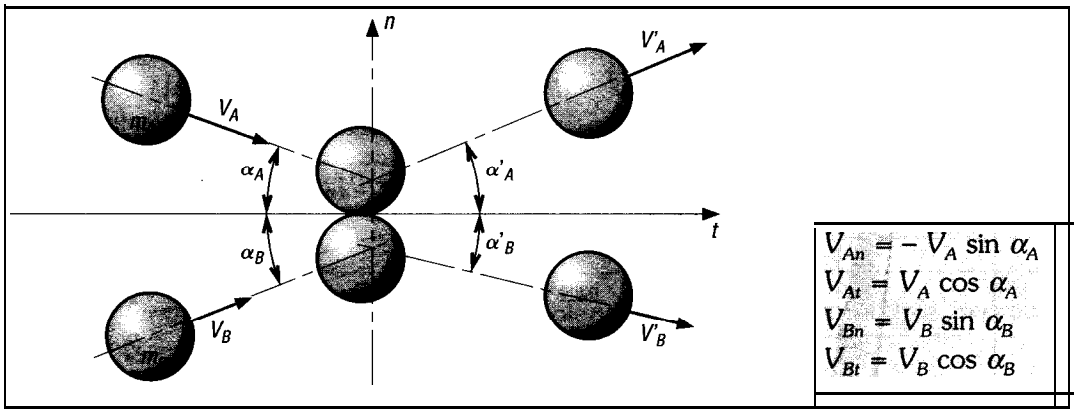


Fig. 15

Équations disponibles

Conservation de la quantité de mouvement :

$m_A V_{An} + m_B V_{Bn} = m_A V'_{An} + m_B V'_{Bn}$; $V_{At} = V'_{At}$; $m_B V_{Bt} = m_B V'_{Bt}$

Coefficient de restitution : $e = \dfrac{V'_{Bn} - V'_{An}}{V_{An} - V_{Bn}}$

Exemple

Une bille de 100 grammes est projetée sur un plan fixe à la vitesse de 10 $m.s^{-1}$ suivant un angle d'incidence de 30".

Si le coefficient de restitution est de 0,4, déterminons V'_1 et α'.

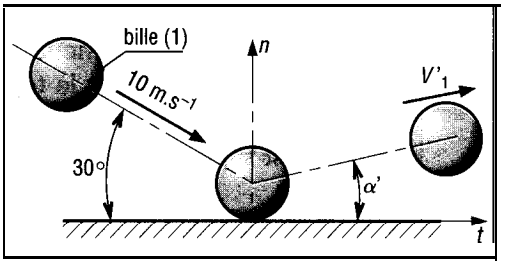


Fig. 16

Résolution

$e = \dfrac{0 - V'_{1n}}{V_{1n} - 0} = \dfrac{- V'_1 \sin \alpha'}{- 10 \sin 30°}$ d'où $V'_{1n} = V'_1 \sin \alpha' = 0,4 \times 5 = 2\ m.s^{-1}$

Conservation : $m_1 V_{1t} = m_1 V'_{1t}$ d'où $V'_{1t} = V_{1t} = 10 \cos 30" = 8,66\ m.s^{-1}$

$V'_1 = \sqrt{V'^2_{1n} + V'^2_{1t}} = \sqrt{8,66^2 + 2^2} = 8,9\ m.s^{-1}$; $\alpha' = \arctan\left(\dfrac{2}{8,66}\right) = 13°$

EXERCICES À RÉSOUDRE

1 Au cours d'un match de hockey, un palet de 200 grammes arrivant à la vitesse de 10 $m.s^{-1}$ est frappe par la crosse d'un joueur pendant 0,05 seconde et envoyé en sens inverse à 20 $m.s^{-1}$ avec un angle d'incidence de 18". Déterminer l'effort $\vec{F}$ exercé par la crosse si celui-ci est suppose constant.

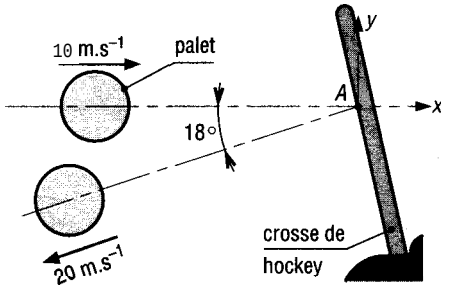


Fig. 17

Réponse

$F_x = - 116\ N$; $F_y = - 24.7\ N$; $\theta_x = 12"$.

❑ Reprendre l'exercice 1 avec une batte de base-ball de 115 grammes et une durée d'impact de 0,02 secondes.

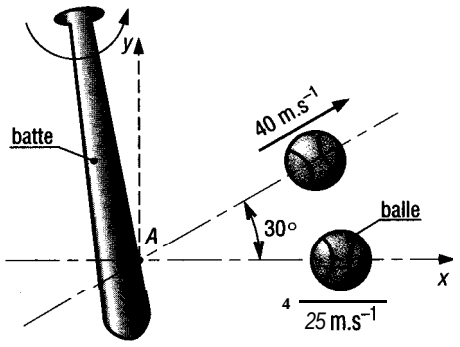


Fig. 18

3 Une automobile de masse m = 1 500 kg descend une pente de 10 % à 90 km.h^{-1} puis freine en urgence. L'effort de freinage (F), supposé constant, est égal à 300 daN. Déterminer le temps du freinage (Δt).

Réponse

$\Delta t = \frac{mV}{F - mg\sin a} = 24{,}41$ secondes.

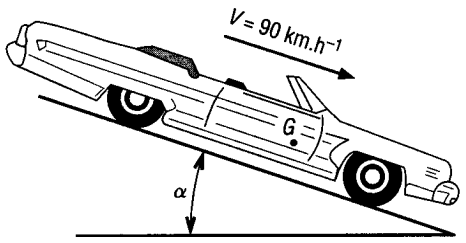


Fig. 19

❑ Un camion de 14 tonnes roulant à 120 km.h^{-1} freine brutalement. Si on se place à la limite de l'adhérence et du glissement entre pneus et sol ($f = \mu = 0{,}5$), déterminer le temps de freinage, jusqu'à l'arrêt, si l'effort de freinage est suppose constant.

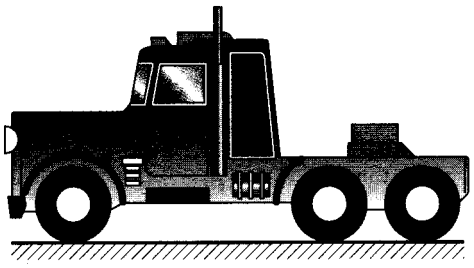


Fig. 20

❑ Déterminer les actions (F et C) que doit exercer la main pour maintenir l'arme si la balle (30 g) reste dans le canon pendant 0,05 seconde et sort à 600 m.s^{-1}. On suppose l'effort de recul constant.

Réponse

F = 360 N ; C = −18 Nm.

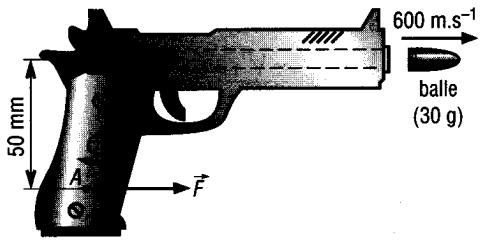


Fig. 21

❑ Pendant le tournage d'une scène de film d'action, une automobile (2 000 kg) part d'un quai en A, prend la vitesse, saute en B à partir d'une rampe inclinée (a = 10°) à la vitesse de 72 km.h^{-1}, se récupère en C sur une barge de 400 tonnes au repos, puis stoppe entre C et D. Déterminer la vitesse de la barge juste après l'arrêt du véhicule en D. On négligera les effets de la résistance de l'eau.

Réponse

98 mm.s^{-1}.

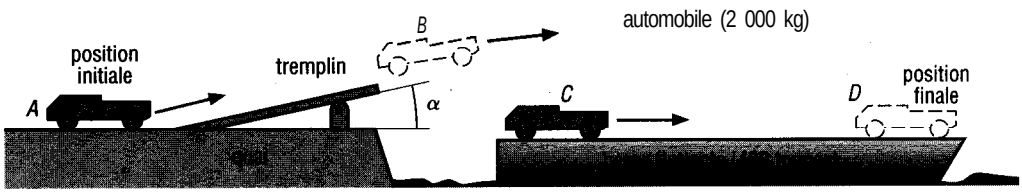


Fig. 22

7 Un volant d'inertie de 100 kg et de rayon de gyration r_k = 0,5 m, initialement au repos est soumis au couple moteur M = 20 (1 − e^{-t}) Nm, fonction du temps t. Déterminer la vitesse du volant après quatre secondes.

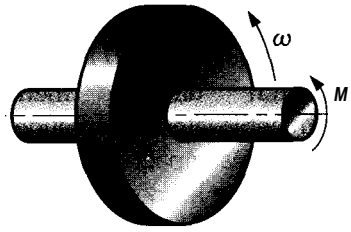


Fig. 23

Réponse

ω = 2,55 rad.s^{-1}.

❑ Reprendre l'exercice 7 avec un volant de 60 kg, un couple moteur M = 10 (1 − $e^{-0,5t}$) Nm et 3 secondes.

❑ Un engrenage, initialement au repos, démarre sous le couple moteur M = 6 Nm appliqué à la roue A. Déterminer le temps mis (At) pour que la roue A atteigne la vitesse de 600 tr.min^{-1} et la force tangentielle F_t exercée entre les deux roues.

Réponse

F_t = 46,2 N ; **At** = 0,871 s.

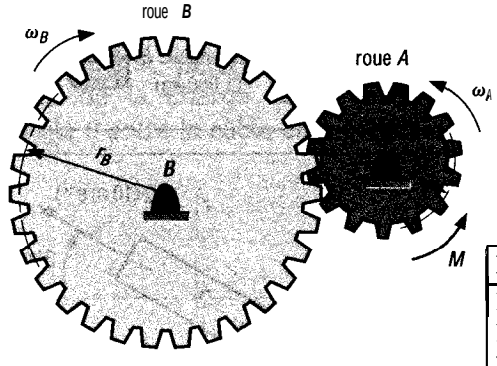


Fig. 24

Roues	A	B
Rayon primitif (r)	100	250 mm
Masse (m)	3	10 kg
Rayon de gyration (r_k)	80	200 mm

❑ Reprendre l'exercice 9. L'engrenage démarre sous charge avec un couple résistant M_B = 100 Nm (constant) exercé sur la roue B. Si la durée de démarrage doit être de une seconde, déterminer le couple moteur M nécessaire et la valeur de l'effort tangentiel F_t (M et F_t sont supposés constants).

❑ Un tambour d'appareil de levage, de masse 300 kg, de diamètre d'enroulement du câble 0,8 m et de rayon de gyration de 0,5 m effectue le levage d'une charge de 100 kg à la vitesse de 120 tr.min^{-1}.
Dès que le moteur est coupé, le dispositif fonctionne encore pendant la durée At avant de s'immobiliser. Déterminer At.

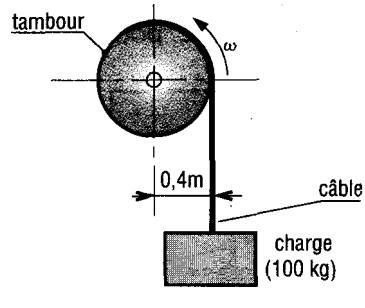


Fig. 25

Réponse

At = 2.91 secondes.

❑ Dans une gare de triage, un wagon A de 50 tonnes roulant à 7,2 km.h^{-1} percute un wagon B de 70 tonnes roulant à 2,7 km.h^{-1} dans le même sens. Déterminer la vitesse commune des deux wagons après impact et attelage automatique ainsi que les pertes énergétiques.

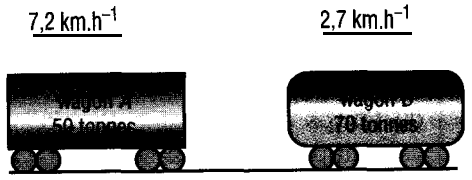


Fig. 26

13 Reprendre l'exercice 12 avec trois wagons : A (5 km.h^{-1}, 60 tonnes) ; B (3 km.h^{-1}, 80 tonnes) et C (3 km.h^{-1}, 60 tonnes) roulant dans le même sens.

Réponse

V = 3,6 km.h^{-1} ; pertes de 6 %.

❑ Suite à un refus de priorité, un véhicule B (1 000 kg, 36 km.h^{-1}) percute un véhicule A (1 500 kg, 54 km.h^{-1}) dans une direction perpendiculaire. Déterminer la vitesse et la direction prises par les deux automobiles, après choc, si l'on suppose celles-ci parfaitement encastrées l'une dans l'autre.

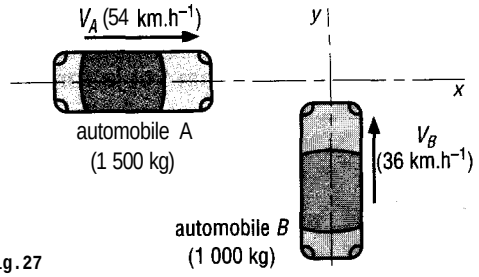


Fig. 27

❑ Dans un champ de tir, une balle B (60 grammes, 600 m.s^{-1}) percute une caisse A remplie de sable (5 kg, 12 m.s^{-1}) passant dans une direction à 30°. Déterminer la vitesse et la direction de l'ensemble après impact.

Réponse

V_x = 8,56 m.s^{-1} ; V_y = 12,06 m.s^{-1} ; θ_x = 54.6.

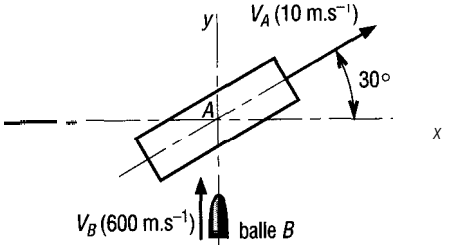


Fig. 28

❑ Afin de tester la résistance aux chocs des chaînes ou des câbles, on utilise un bloc de 25 kg lâché sans vitesse initiale sur une hauteur de 2 m. On suppose qu'il n'y a pas de rebond. Déterminer la force d'impulsion que doit exercer le câble pour stopper la charge.

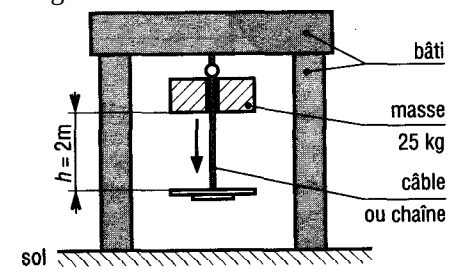


Fig. 29

❑ Lorsque la poutre AB supporte la charge P posée au repos, la déformation correspondante est y = y,.
Déterminer y lorsque le bloc P est lâché sans vitesse initiale de la hauteur h.

Réponse

$y = y_0 + \sqrt{y_0^2 + 2hy_0}$

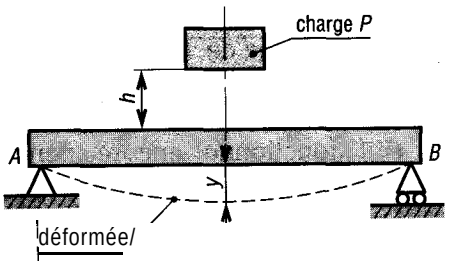


Fig. 30

❑ Pour des essais balistiques, dont l'objectif est de déterminer la vitesse des balles, on utilise un pendule simple constitué d'une caisse de masse M = 25 kg (remplie de sable) suspendue à une corde fine.
La balle, de masse m = 50 g, est tirée horizontalement et perpendiculairement à la caisse initialement au repos.
Si le pendule est incliné de 14" après impact, déterminer la vitesse d'arrivée de la balle et les pertes d'énergie systématiques du dispositif.

Réponse

$V = \frac{ML\theta}{m}\sqrt{\frac{g}{L}} = 605\,m.s^{-1}$; 99.8%.

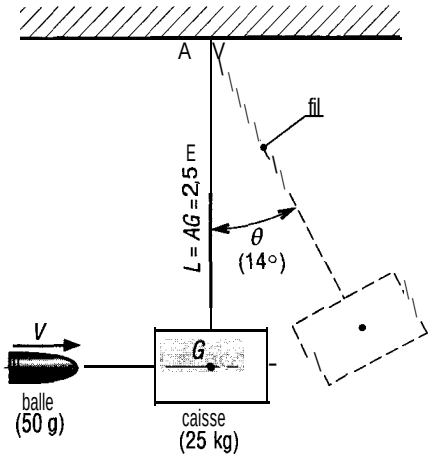


Fig. 31

❑ Une charge suspendue à un câble AB vertical est translatée à la vitesse V = 1 $m.s^{-1}$ par un palan guidé sur un rail immobile. Si le palan stoppe instantanément, déterminer la position finale de la charge et la valeur de l'angle θ entre le câble et la verticale.

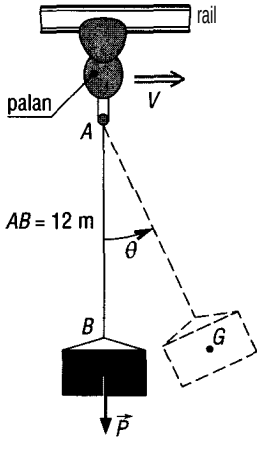


Fig. 32

❑ Les balles de tennis sont rejetées lorsque, lâchées à hauteur d'épaule sans vitesse initiale, elles ne rebondissent plus suffisamment.
Une balle prise au hasard, lâchée de 1,5 m, passe juste le test en rebondissant à 1 m.
Déterminer le coefficient de restitution e et le pourcentage d'énergie perdue pendant l'impact.

Réponse

$e = \sqrt{\frac{h'}{h}} = 0{,}816$; 33,3%.

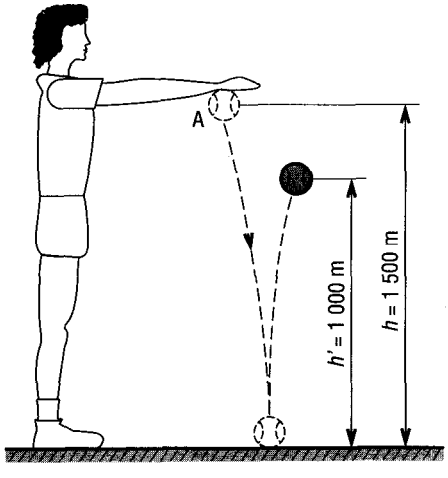


Fig. 33

❑ Pour tester la qualité des billes de roulements en acier, on utilise un système de tri par rebond. Les billes sont lâchées, les unes derrières les autres, d'une hauteur $h = 1$ m, sans vitesse initiale, sur un plan fixe incliné de 10".
Si les billes ont un coefficient de restitution e inférieur à 0,7, elles ne franchissent pas la barrière A après rebond et sont rejetées.
Déterminer la position de la barrière A (h' et x) de façon à satisfaire ces exigences.

Réponse

$h' = 0{,}421$ m ; $x = 0{,}377$ m.

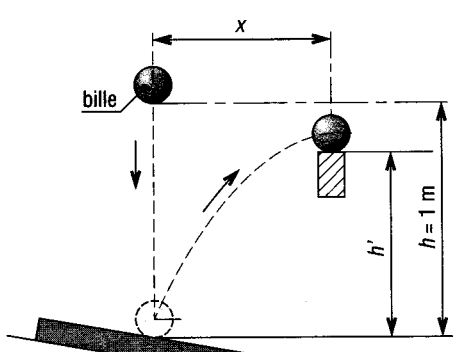


Fig. 34

22 Deux boules de billard identiques (même masse, etc.), l'une au repos, l'autre lancée à la vitesse de 1 $m.s^{-1}$ se percutent dans un plan horizontal comme l'indique la figure.
Si le coefficient de restitution e est égal à 0,6, déterminer les directions des boules après choc et les pertes énergétiques.

Réponse

$V'_Ax = 0{,}475\ m.s^{-1}$; $V'_Ay = -0{,}231$;
$V'_Bx = 0{,}6$; $V'_By = 0{,}346$; 24 %.

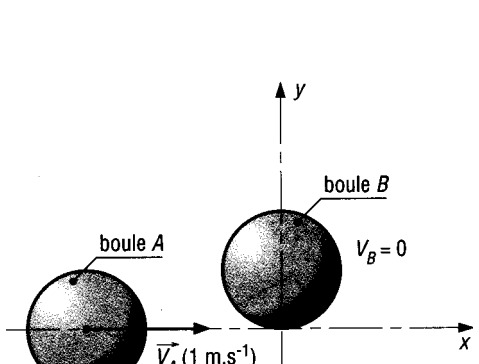


Fig. 35

❑ Reprendre l'exercice 22 avec e = 0,7 et la configuration et les vitesses indiquées par la figure.

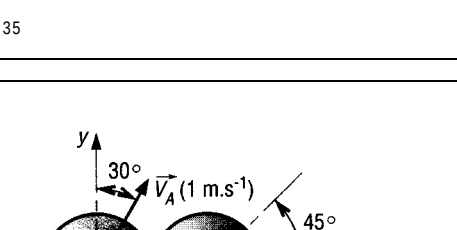


Fig. 36

19 CINÉTIQUE DANS L'ESPACE

OBJECTIFS

- Définir dans l'espace les notions de quantité de mouvement, de moment cinétique, d'énergie cinétique et énoncer les théorèmes correspondants.
- Donner des éléments concernant le calcul des matrices d'inertie.
- Énoncer le principe fondamental de la dynamique et développer les principales applications : équations d'Euler, rotation autour d'un point, rotation d'axe, problèmes d'équilibrage et mouvement gyroscopique.

Les notions développées dans ce chapitre généralisent au domaine de l'espace celles abordées dans les trois chapitres précédents : principe fondamental, énergétique et quantité de mouvement. Le chapitre reprend également les connaissances acquises en statique dans l'espace et cinématique dans l'espace.
Le passage du plan à l'espace amène un doublement des équations, des paramètres nécessaires et des inconnues à déterminer au moment des résolutions d'exerices. De plus, l'introduction d'une notion nouvelle, celle de matrice d'inertie, est indispensable.

I - Système à masse conservative

Un système matériel E (solide, fluide, etc.) est dit à masse conservative si celle-ci reste constante au cours du temps. À la fois pour E et pour n'importe quel sous-système ou partie de E :

Remarque : tous les théorèmes et relations abordés par la suite supposent des systèmes à masse conservative.

$$\text{masse de } E \text{ à } t = \text{masse de } E \text{ à } t_1 = \text{masse de } E \text{ à } t_2$$

Exemple : une fusée n'est pas un système à masse conservative. Au fur et à mesure du vol sa masse diminue du fait de la combustion du carburant.

II • Quantité de mouvement $(\vec{p})$

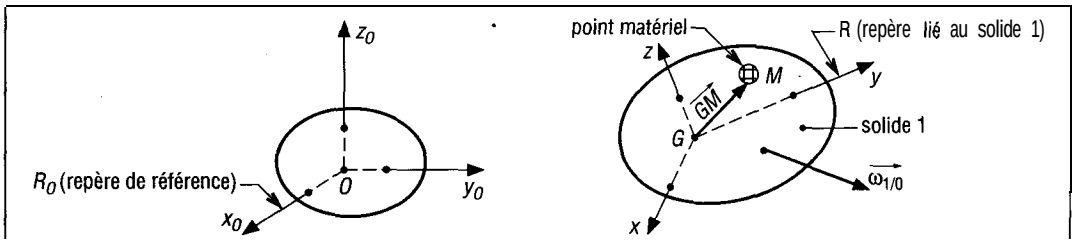


Fig. 1

Le repère R (G, x, y, z) est lié au solide (1) en mouvement par rapport au repère de référence R_0 (0, x_0, y,, z_0). G est le centre de gravité du solide et $\overrightarrow{\omega_{1/0}}$ sa vitesse angulaire.
m_i ou dm est la masse du point matériel M appartenant au solide
$m = \Sigma_{(S)}\, m_i = \int_S \mathbf{dm}$ = masse du solide
La quantité de mouvement du solide (1) par rapport à R_0 ou 0 est :

$$\overrightarrow{p_{1/0}} = \sum_{(s)} m_i \overrightarrow{V_{M1/0}} = \int_{(s)} \overrightarrow{V_{M1/0}}\, dm$$

$$= \int_{(s)} \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\, dm = \frac{d}{dt}\left[\int_{(s)} \overrightarrow{OM}\, dm\right] = \frac{d}{dt}\left[m\overrightarrow{OG}\right] = m\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = m\overrightarrow{V_{G1/0}}$$

En remarquant que $\int_S \overrightarrow{OM}$ dm = m $\overrightarrow{OG}$ par définition du centre de gravité :

$$\overrightarrow{p_{1/0}} = \int_S \overrightarrow{V_{M1/0}}\, dm = m\overrightarrow{V_{G1/0}}$$

III • Moment cinétique • Torseur cinétique • Théorème

1. Moment cinétique au centre de gravité G

Définition

Le moment cinétique du solide 1 est égal au moment résultant en G de toutes les quantités de mouvement $m_i \overrightarrow{V_{M1/0}}$ *ou* $\overrightarrow{V_{M1/0}}\, dm$ de l'ensemble des points matériels M constituant le solide.

$$\overrightarrow{L_{G1/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G1/0}} = \Sigma_{(S)}\, \overrightarrow{GM} \wedge m_i \overrightarrow{V_{M1/0}} = \int \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{V_{M1/0}}\, dm$$

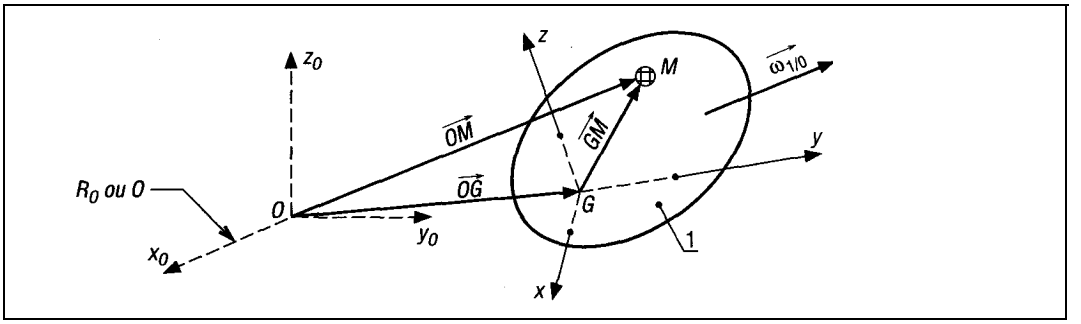


Fig. 2

Relation fondamentale :

En remplaçant $\overrightarrow{V_{M1/0}} = \overrightarrow{V_{G1/0}} + \overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{GM}$ et en remarquant que $\int \overrightarrow{GM}\, dm = \overrightarrow{0}$ (par définition du centre de gravité), le moment cinétique s'exprime par :

$$\overrightarrow{L_{G1/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G1/0}} = \int \overrightarrow{GM} \wedge (\overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{GM})\, dm = [J_G][\omega_{1/0}]$$

$[J_G]$ est la matrice d'inertie du solide en G (voir paragraphe III)

2. Cas d'un solide ayant un point **fixe** A

Si A est un noint fie du solide dans le repère de référence R_0, alors $\overrightarrow{V_{A1/0}} = \overrightarrow{0}$.

$\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AM}$

La relation obtenue est analogue à celle du paragraphe 1.

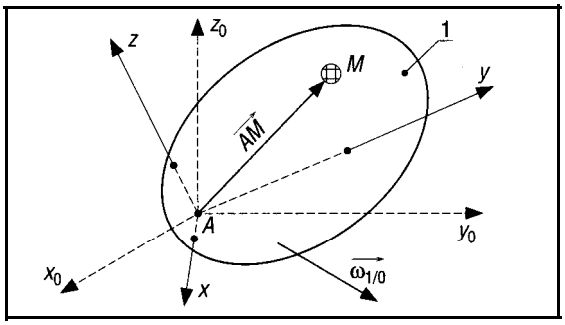


Fig. 3

$$\overrightarrow{L_{A1/0}} = \overrightarrow{\sigma_{A1/0}} = \int \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M1/0}}\, dm = \int \overrightarrow{AM} \wedge (\overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AM})\, dm = [J_A][\omega_{1/0}]$$

$[J_A]$ est la matrice d'inertie du solide en A (voir paragraphe III).

3. Moment cinétique au point 0

Le point O peut être l'origine du repère de référence ou n'importe quel point fie de ce repère ($\overrightarrow{V_{O1/0}} = \overrightarrow{0}$) ; $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}$.

$$\overrightarrow{\sigma_{O1/0}} = \int \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V_{M1/0}}\, dm = \int \overrightarrow{OM} \wedge (\overrightarrow{V_{G1/0}} + \overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{GM})\, dm$$

$$= \int \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{V_G}\, dm + \int \overrightarrow{OG} \wedge (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{GM})\, dm + \int \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{V_G}\, dm + \int \overrightarrow{GM} \wedge (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{GM})\, dm$$

$$= \overrightarrow{OG} \wedge m\, \overrightarrow{V_G} + \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} + \overrightarrow{\sigma_{G1/0}}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{O1/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G1/0}} + \overrightarrow{OG} \wedge m\, \overrightarrow{V_{G1/0}} = \overrightarrow{L_{O1/0}}$$

Remarque : la relation est une relation de moment de torseur.

Exemple

Un disque plat (1), de masse 1 kg, de rayon R = 0,15 m, est monté sur un arbre horizontal d'axe x_0, avec une inclinaison a = 20" par rapport au plan de rotation.

Si $\omega_{1/0}$ = 32 rad.s^{-1}, déterminons $\overrightarrow{\sigma_{G1/0}}$ et l'angle θ entre $\overrightarrow{\omega_{1/0}}$ et $\overrightarrow{\sigma_{G1/0}}$.

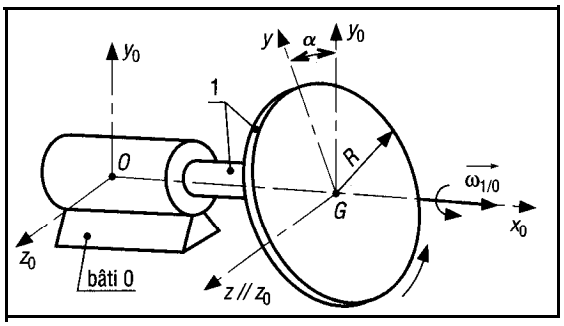


Fig. 4

Résolution

$$J_{xx} = \frac{mR^2}{2} \quad ; \quad J_{yy} = J_{zz} = \frac{mR^2}{4} \quad ; \quad J_{xy} = J_{yz} = J_{xz} = 0$$

$$[J_G]_{xyz} = \begin{vmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} \end{vmatrix} \quad ; \quad [\omega_{1/0}]_{xyz} = \begin{bmatrix} \omega \cos a \\ -\omega \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

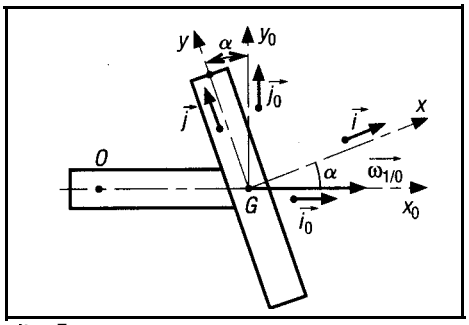


Fig. 5

Sachant que : $\vec{i} = \cos a\, \vec{i}_0 + \sin a\, \vec{j}_0$ et
$\vec{j} = -\sin \alpha\, \vec{i}_0 + \cos \alpha\, \vec{j}_0$, en remplaçant $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans $\sigma_{G1/0}$,
on obtient l'écriture du vecteur par rapport aux axes (x_0, y_0, z_0).

$$\overrightarrow{\sigma_{G1/0}} = \frac{mR^2\omega}{4} [(2\cos^2 a + \sin^2 \alpha)\, \vec{i}_0 + \sin \alpha \cos \alpha\, \vec{j}_0]$$

$$= \frac{1 \times 0{,}15^2 \times 32}{4} [(2\cos^2 20 + \sin^2 20)\, \vec{i}_0 + \sin 20 \cos 20\, \vec{j}_0]$$

$$\overrightarrow{\sigma_{G1/0}} = 0{,}339\, \vec{i}_0 + 0{,}058\, \vec{j}_0$$

Angle θ : $\cos \theta = \frac{\vec{\sigma_G} \times \vec{\omega}}{\sigma_G \times \omega} = \frac{0{,}3389 \times 32}{0\,3439 \times 32} = 0{,}985$ et $\theta = 9{,}8°$

Remarques : en général $\vec{\sigma_G}$ et $\vec{\omega}$ n'ont pas la même direction.
$\vec{\sigma_0} = \vec{\sigma_G} + \overrightarrow{OG} \wedge m\, \overrightarrow{V_{G1/0}} = \vec{\sigma_G} + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{0} = \vec{\sigma_G}$

4. Torseur cinétique

En prenant pour résultante cinétique la quantité de mouvement $\overrightarrow{p_{1/0}} = m\, \overrightarrow{V_{G1/0}}$ et comme moment le moment cinétique $\vec{\sigma}$ ou $\vec{L}$, l'ensemble des deux grandeurs a les propriétés d'un torseur appelé torseur cinétique. Notation :

$$\{C_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} m\, \overrightarrow{V_{G1/0}} \\ \overrightarrow{\sigma_{B1/0}} \end{Bmatrix}_B \quad \text{avec : } \vec{\sigma_B} = \vec{\sigma_A} + \overrightarrow{BA} \wedge m\, \vec{V_G} = \vec{\sigma_G} + \overrightarrow{BG} \wedge m\, \vec{V_G}$$

Remarque : le torseur a les mêmes propriétés générales que les autres torseurs (transport, équiprojectivité, etc.).

Dans le cas d'un ensemble de solides $E = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$

$${}_I\{C_{E/0}\} = {}_I\{C_{S1/0}\} + {}_I\{C_{S2/0}\} + \ldots + {}_I\{C_{Sn/0}\}$$

5. Théorème de la quantité de mouvement et du moment cinétique

Le théorème a déjà été abordé dans le chapitre précédent « quantité de mouvement ». Se reporter à ce chapitre pour des détails et pour les cas simples : translation, rotation d'axe et mouvement plan.

Énoncé

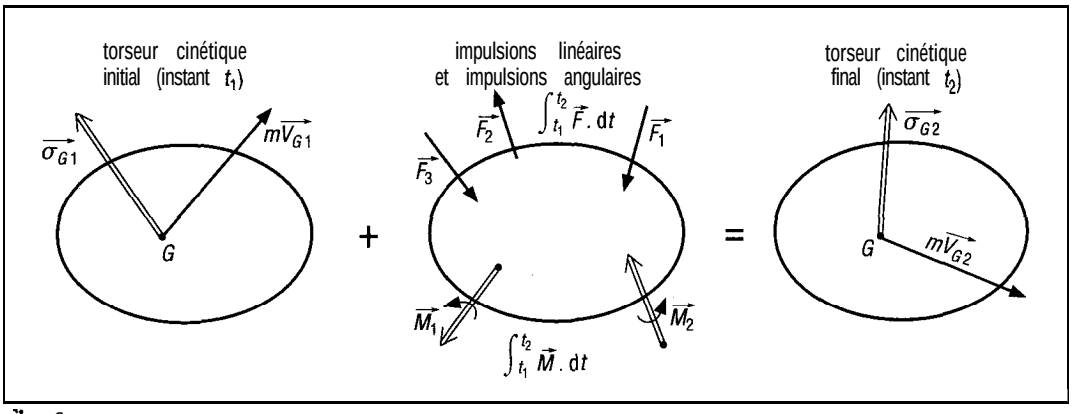


Fig. 6

IV • Matrice ou tenseur d'inertie [*J*]

1. Définition

$(\overrightarrow{AM}$ ou $\overrightarrow{GM}) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

(x, y, z) sont les coordonnées du point M dans le repère R (A ou G, x, y, z) lié au solide.

$\vec{\omega} = \omega_x\,\vec{i} + \omega_y\,\vec{j} + \omega_z\,\vec{k}$ est la vitesse angulaire du solide écrite dans le même repère *R*.

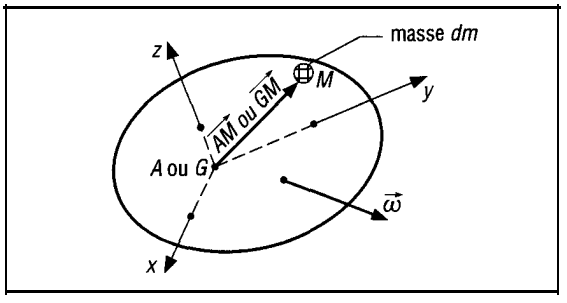


Fig. 7

Le calcul des doubles produits vectoriels, sous le signe somme, des deux formules $\int \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GM})\,dm$ et $\int \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM})\,dm$ des paragraphes II 1 et II 2 donne :

$$\vec{\sigma} = \vec{L}$$
$$= (\omega_x J_{xx} - \omega_y J_{xy} - \omega_z J_{xz})\,\vec{i} + (-\omega_x J_{xy} + \omega_y J_{yy} - \omega_z J_{yz})\,\vec{j} + (-\omega_x J_{xz} - \omega_y J_{yz} + \omega_z J_{zz})\,\vec{k}$$

avec :

$J_{xx} = \int (y^2 + z^2)\,dm$	$J_{yy} = \int (x^2 + z^2)\,dm$	$J_{zz} = \int (x^2 + y^2)\,dm$
$J_{xy} = \int xy\,dm$ $J_{xy} = J_{yx}$	$J_{xz} = \int xz\,dm$ $J_{xz} = J_{zx}$	$J_{yz} = \int yz\,dm$ $J_{yz} = J_{zy}$

J_{xx}, J_{yy} et J_{zz} sont les moments d'inertie du solide par rapport aux axes x, y, z et J_{xy}, J_{yz} et J_{xz} sont les produit d'inertie. Les axes étant liés au solide, ces grandeurs sont invariables au cours du temps.

2. Forme matricielle

La forme matricielle est plus facile à manipuler que la forme vectorielle et le moment cinétique en A ou G s'écrit :

$$[\sigma] = [L] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = [J][\omega]$$

Règle de calcul : toujours exprimer dans le même repère, ou la même base, la matrice d'inertie $[J]$ et le vecteur en produit avec elle ($\overrightarrow{\omega_{1/0}}$ ou autre).

3. Propriétés de la matrice d'inertie

La matrice est symétrique et les moments d'inertie par rapport aux axes x, y, z apparaissent suivant la diagonale. Si on change l'orientation des axes liés au solide, les moments et produits d'inertie changent également.
Pour une même origine (A, 0, etc.), il existe toujours un et un seul système d'axes X, Y, *Z*, appelés axes principaux d'inertie, pour lesquels la matrice est diagonale :

$(J_{XY} = J_{XZ} = J_{YZ} = 0)$.

Remarques : les propriétés, les modes de calcul et les cas particuliers liés aux symétries sont développés dans le chapitre " moments d'inertie " en fin d'ouvrage.

V - Énergie cinétique E_k ou T - Théorème

L'énergie cinétique a déjà été abordée dans le chapitre « énergétique ». Se reporter à ce chapitre pour des détails et pour les cas simples : translation, rotation d'axe et mouvement plan.

1. Définiion 1

L'énergie cinétique d'un solide (1) en mouvement par rapport au repère de référence (0) est égale à la somme des énergies cinétiques $m\,\overrightarrow{V_{M1/0}}^2$ ou $\overrightarrow{V_{M1/0}}^2\,dm$ de l'ensemble des points matériels M constituant le solide.

$$E_{k\,1/0} = T_{1/0} = \frac{1}{2}\sum_{(s)} m_i\,\overrightarrow{V_{M\,1/0}}^2 = \frac{1}{2}\int_S \overrightarrow{V_{M\,1/0}}^2\,dm$$

En remplaçant $\overrightarrow{V_{M1/0}} = \overrightarrow{V_{G1/0}} + \overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{GM}$ dans la définition, on obtient après calcul :

$$E_{k\,1/0} = T_{1/0} = \frac{1}{2}\,m\,\overrightarrow{V_{G\,1/0}}^2 + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\omega_{1/0}} \times \overrightarrow{\sigma_{G\,1/0}}$$
$$= \frac{1}{2}\,m\,\overrightarrow{V_{G\,1/0}}^2 + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\omega_{1/0}}\,[J_G][\omega_{1/0}]$$

En remplaçant $[J_G]$ et $[\omega_{1/0}]$, la relation devient :

$$E_{k\,1/0} = T_{1/0} = \frac{1}{2}\,m\,\overrightarrow{V_{G\,1/0}}^2 + \frac{1}{2}\left[J_{xx}\,\omega_x^2 + J_{yy}\,\omega_y^2 + J_{zz}\,\omega_z^2 - 2J_{xy}\omega_x\omega_y - 2J_{yz}\omega_y\omega_z - 2J_{xz}\omega_x\omega_z\right]$$

2. Définition 2

L'énergie cinétique peut aussi être exprimée par le produit du torseur cinématique $\{V_{1/0}\}$ par le torseur cinétique $\{C_{1/0}\}$ du solide en n'importe quel point I choisi pour le calcul.

$$2E_{k1/0} = 2T_{1/0} = \{v_{1/0}\} \cdot \{C_{1/0}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{I1/0}} \end{matrix} \right\}_I \cdot \left\{ \begin{matrix} m\,\overrightarrow{V_{G1/0}} \\ \overrightarrow{\sigma_{I1/0}} \end{matrix} \right\}_I$$

en développant : $2\ E_{k1/0} = 2\ T_{1/0} = \overrightarrow{\omega_{1/0}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{I1/0}} + m\ \overrightarrow{V_{G1/0}} \cdot \overrightarrow{V_{I1/0}}$

Remarques : si I est confondu avec G, on retrouve la première formule. Si I est confondu avec A, point fie du solide dans le repère de référence R_0, on obtient :

$$2\ E_{k1/0} = 2\ T_{1/0} = \overrightarrow{\omega_{1/0}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{A1/0}} = \overrightarrow{\omega_{1/0}}\,[J_A][\omega_{1/0}] \text{ avec } A \text{ point fie dans } R_0.$$

3. Cas d'un ensemble de solides $E = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$

$$T_{E/0} = T_{S1/0} + T_{S2/0} + \ldots + T_{Sn/0}$$

4. Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème est abordé dans le chapitre "énergétique", se reporter à ce chapitre pour les détails.

Énoncé : pour un solide isolé, le travail des forces extérieures, pendant un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, est égal à la variation de l'énergie cinétique durant le même intervalle. Autrement dit, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique est égale à la puissance des efforts extérieurs.

$$(T_{1/0})_{t2} - (T_{1/0})_{t1} = [\Delta T]_{t1}^{t2} = [W(\Sigma\ F_{ext})]_{t1}^{t2} \quad \text{ou} \quad \frac{dT}{dt} = P\left(\Sigma\ \overrightarrow{F_{ext}}\right)$$

5. Exemple

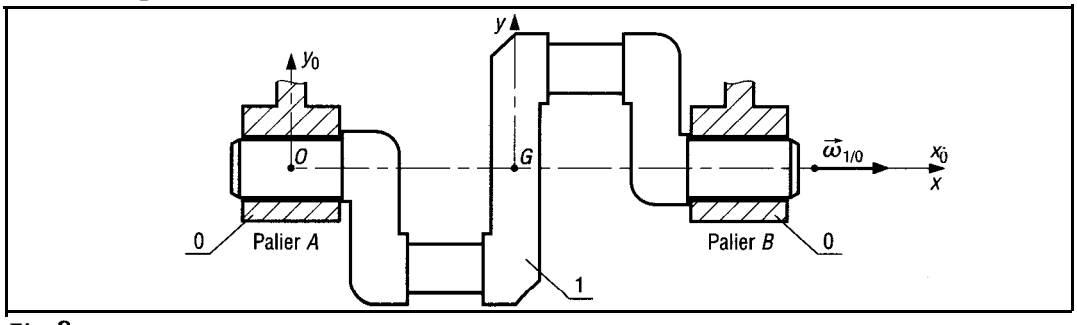


Fig. 8

Un vilebrequin (1), de masse 20 kg, de rayon de gyration $r_k = 0{,}06$ m, tourne à la vitesse de 5 000 $tr.min^{-1}$. Déterminons son énergie cinétique. Quel travail faut-il fournir pour passer de 0 à 2 500 $tr.min^{-1}$ et de 2 500 à 5 000 $tr.min^{-1}$?

Résolution

a) Le centre de gravité G est situé sur l'axe de rotation et est un point fixe dans le repère de référence (x,, y,,, z_0) lié au bâti.

$$\overrightarrow{\omega_{1/0}} = \omega_{1/0} \cdot \vec{i} = \omega_{1/0} \cdot \vec{i}_0 \quad \text{avec} \quad \omega_{1/0} = \frac{5\,000\pi}{30} = 523{,}6\ rad.s^{-1}$$

$$E_{k\,1/0} = T_{1/0} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\omega_{1/0}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{G\,1/0}} = \frac{1}{2}\,\omega_{1/0}\,\vec{i}_0 \cdot \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & 0 \\ -J_{xy} & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_{1/0} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

(x, y) étant plan de symétrie du vilebrequin, $J_{xz} = J_{yz} = 0$

$$E_{k\ 1/0} = T_{1/0} = \frac{1}{2} J_{xx}\,\omega_{1/0}^2 = \frac{1}{2} m r_k^2\,\omega_{1/0}^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 20 \times 0{,}06^2 \times 523{,}6^2 = 9\,870\,J$$

b) Utilisons le théorème de l'énergie cinétique.

$$\left[AW\left(F_{ext}\right)\right]_1^2 = \left[\Delta T_{1/0}\right]_1^2 = \frac{m r_k^2}{2}\left[\omega_{finale}^2 - \omega_{initiale}^2\right]$$

entre 0 et 2 500 $tr.min^{-1}$: A $W = \dfrac{20 \times 0{,}06^2}{2}\left[\left(\dfrac{2\,500 \times \pi}{30}\right)^2 - 0\right] = 2\,487\,J$

entre 2 500 et 5 000 $tr.min^{-1}$: $\Delta W' = 9\,870 - 2\,467 = 7\,403\,J$

VI • Principe fondamental de la dynamique

Le principe fondamental a déjà été abordé dans le chapitre de même nom. Se reporter à ce chapitre pour les énoncés des 1re et 3e lois, le principe de d'Alembert et les cas les plus simples : translation rectiligne, rotation plane et mouvement plan.

1. Énoncé • Équations de mouvement

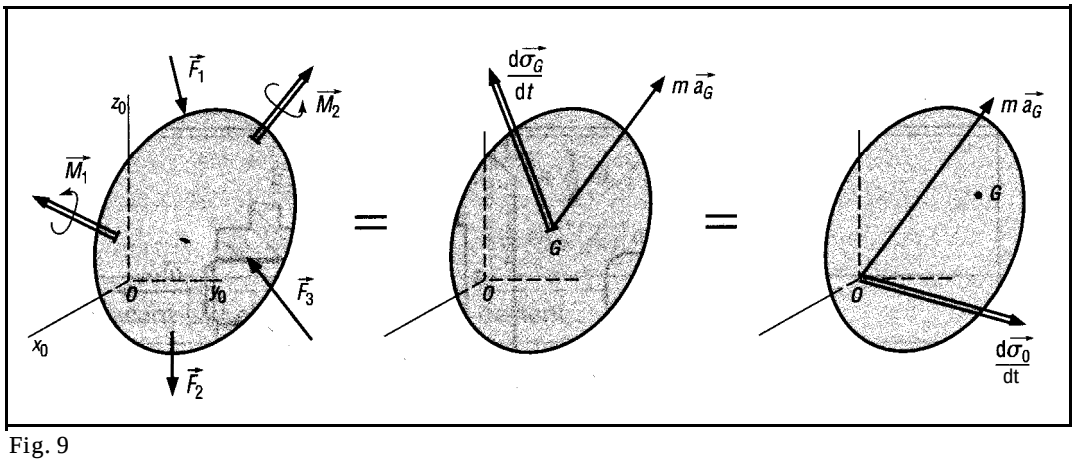


Fig. 9

$$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \ldots + \overrightarrow{F_n} = m\,\overrightarrow{a_G} = \frac{d}{dt}\,(m\,\overrightarrow{V_G}) = \left(\frac{d\,\vec{p}}{dt}\right)$$

$$\Sigma \overrightarrow{M_G\,(F_{ext})} = \overrightarrow{M_G(F_1)} + \ldots + \overrightarrow{M_G(F_n)} + \overrightarrow{M_1} + \ldots + \overrightarrow{M_n} = \left(\frac{d\,\vec{\sigma}_G}{dt}\right)$$

Équation alternative avec 0, point fixe du repère de référence :

$$\Sigma \overrightarrow{M_0(F_{ext})} = \overrightarrow{M_0(F_1)} + \ldots + \overrightarrow{M_0(F_n)} + \overrightarrow{M_1} + \ldots + \overrightarrow{M_n} = \left(\frac{d\,\vec{\sigma}_0}{dt}\right)$$

a_G est l'accélération du centre de gravité G ; F_1, F_2, . . ., F_n sont les forces extérieures agissant sur le solide isolé et M_1, M_2, . . . , M_n les couples purs ; (d $\vec{\sigma}_G$ /dt) est la dérivée par rapport au temps du moment cinétique en G.

Remarque : $\left(\frac{d\,\vec{\sigma}_G}{dt}\right) = [J_G]\left[\frac{d\,\vec{\omega}}{dt}\right] + \vec{\omega} \wedge \vec{\sigma}_G$

Cette relation est obtenue avec la formule de dérivation dans deux repères différents (voir chapitre « cinématique dans l'espace ») :

$$\left(\frac{d\,\vec{\sigma}_G}{dt}\right)_{x_0y_0z_0} = \left(\frac{d\,\vec{\sigma}_G}{dt}\right)_{xyz} + \overrightarrow{\omega_{xyz/x_0y_0z_0}} \wedge \vec{\sigma}_G = \frac{d}{dt}\left([J_G][\omega]\right) + \vec{\omega} \wedge \vec{\sigma}_G$$

2. Cas 1 : solide en translation dans l'espace

Il n'y a pas de rotation du solide, $\vec{\omega} = \overrightarrow{\omega_{1/0}} = \vec{0}$. Les axes du repère de référence R_0 et du repère R lié au solide sont constamment parallèles entre eux. Le principe fondamental se réduit à :

$$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \ldots + \overrightarrow{F_n} = \overrightarrow{ma_G}$$

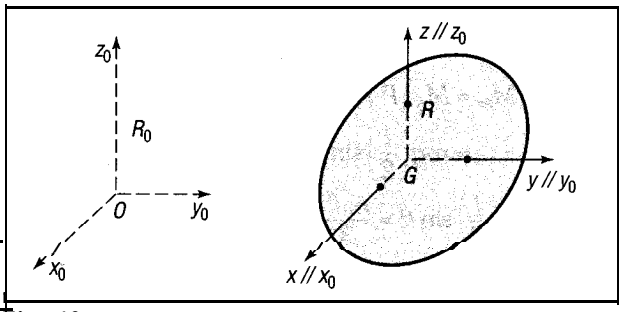


Fig. 10

L'application donne trois équations de projection scalaire.

3. Cas 2 : solide en rotation autour du centre de gravité G

Supposons que les axes (x, y, z) liés au solide sont aussi axes principaux d'inertie. Le moment cinétique en G s'écrit : $\vec{\sigma}_G = J_x\,\omega_x\,\vec{i} + J_y\,\omega_y\,\vec{j} + J_z\,\omega_z\,\vec{k}$

L'équation de moment :

$$\Sigma \overrightarrow{M_G(F_{ext})} = \left(\frac{d\,\vec{\sigma}_G}{dt}\right) = [J_G]\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right] + \vec{\omega} \wedge \vec{\sigma}_G$$

donne trois équations de projection scalaire, encore appelées équations d'Euler.

$$\begin{aligned}
\Sigma M_{Gx} &= J_x\,\dot{\omega}_x - (J_y - J_z)\,\omega_y\,\omega_z \\
\Sigma M_{Gy} &= J_y\,\dot{\omega}_y - (J_z - J_x)\,\omega_z\,\omega_x \\
\Sigma M_{Gz} &= J_z\,\dot{\omega}_z - (J_x - J_y)\,\omega_x\,\omega_y
\end{aligned}$$

$$\dot{\omega}_x = \frac{d\omega_x}{dt} \quad ; \quad \dot{\omega}_y = \frac{d\omega_y}{dt} \quad ; \quad \dot{\omega}_z = \frac{d\omega_z}{dt}$$

Remarques : les équations d'Euler peuvent également être utilisées lorsque le solide a un point fixe A ($\overrightarrow{V_{A1/0}} = \vec{0}$).
Il suffit de remplacer G par *A* et $[J_G]$ par $[J_A]$.

$$\Sigma \overrightarrow{M_A(F_{ext})} = \left(\frac{d\,\vec{\sigma}_A}{dt}\right) = [J_A]\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right] + \vec{\omega} \wedge \vec{\sigma}_A$$

Exemple

Une barre 2, de longueur AB = l = 0,6 m, de masse m = 5 kg, est entraînée en A, pivot d'axe (A, z), par un arbre (1) tournant à la vitesse $\overrightarrow{\omega_{1/0}} = \omega\ \vec{y}_0$ par rapport à un bâti 0. Déterminons la valeur de ω lorsque θ = 30".

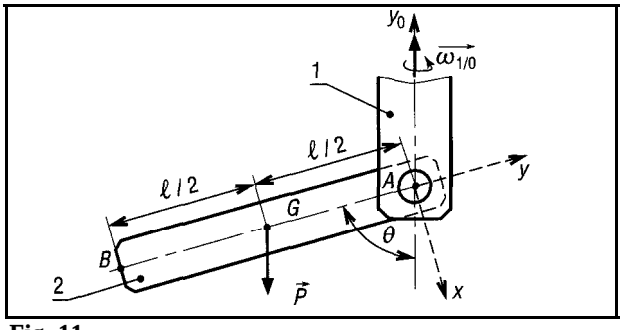


Fig. 11

Résolution

$$\vec{\omega} = -\omega \sin\theta\,\vec{i} + \omega\cos\theta\,\vec{j} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j}$$

Si les dimensions transversales de la barre 2 sont négligées :

$$J_x = J_z = \frac{m\ell^2}{3} \quad ; \quad J_y = J_{xy} = J_{yz} = J_{xz} = 0$$

Les équations d'Euler se réduisent à :

$$\Sigma M_{Az} = M_A(\vec{P}) = J_z\dot{\omega}_z - (J_x - J_y)\omega_x\omega_y$$

$$= mg\left(\frac{l}{2}\right)\sin\theta = 0 - \left(\frac{m\ell^2}{3} - 0\right)(-\omega\sin\theta)(\omega\cos\theta)$$

$$mg\left(\frac{l}{2}\right)\sin\theta = \frac{ml^2}{3}\omega^2\sin\theta\cos\theta$$

d'où $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{2l\cos\theta}} = \sqrt{\dfrac{3\times 9{,}81}{2\times 0{,}6\times\cos 30°}} = 5{,}32\ \text{rad.s}^{-1}$

4. Cas 3 : solide en rotation par rapport à un axe fixe (G, $\vec{z}$)

$\overrightarrow{\omega_{1/0}} = \omega\vec{k}$; posons $\dot{\omega}_z$ = a = accélération angulaire du solide ; les axes (x, y, z) liés au solide ne sont pas principaux d'inertie.

L'équation de moment $\Sigma\ \overrightarrow{M_G(F_{ext})} = \left(\dfrac{d\,\vec{\sigma}_G}{dt}\right)$ devient :

$$\Sigma M_{Gx} = -J_{xz}\,\dot{\omega}_z + J_{yz}\,\omega_z^2 = -J_{xz}\,\alpha + J_{yz}\,\omega^2$$

$$\Sigma M_{Gy} = -J_{yz}\,\dot{\omega}_z - J_{xz}\,\omega_z^2 = -J_{yz}\,\alpha - J_{xz}\,\omega^2$$

$$\Sigma M_{Gz} = J_{zz}\,\dot{\omega}_z = J_{zz}\,\alpha$$

Remarque 1 : dans le cas des mouvements plans (x, y), les solides sont supposés plats. Il en résulte que $J_{yz} = J_{xz} = 0$ et les équations se réduisent à $\Sigma M_{Gz} = J_{zz}.\alpha = J_G.\alpha$.

Remarque 2 : une des applications de cette étude concerne les conditions d'équilibrage des solides en rotation (voir paragraphe VII).

5. Cas 4 : solide en rotation d'axe (A, z) par rapport à un repère intermédiaire (A, x, y, z) ou mouvement de toupie

Une application importante de ce paragraphe concerne les gyroscopes et les mouvements gyroscopiques (voir paragraphe VIII).
Les axes (x, y, z) sont axes principaux d'inertie du solide (2). (1) indique le repère intermédiaire (A, x, y, z) et (0) le repère de référence (A, x_0, y_0, z_0).

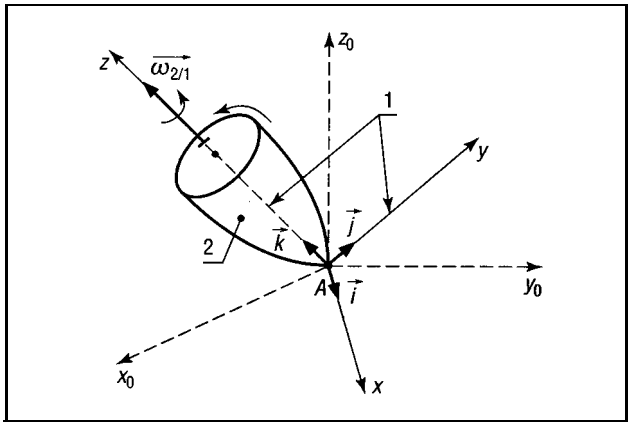


Fig. 12

Le solide tourne à la vitesse $\overrightarrow{\omega_{2/1}} = \omega_{2/1}\,\vec{z}$ autour de l'axe z.

$$\overrightarrow{\omega_{2/0}} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$$\overrightarrow{\omega_{1/0}} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k}$$

$$\overrightarrow{\sigma_A} = J_x\,\omega_x \vec{i} + J_y\,\omega_y \vec{j} + J_z\,\omega_z \vec{k}$$

$$\left(\frac{d\,\vec{\sigma_A}}{dt}\right)_{x0y0z0} = \left(\frac{d\,\vec{\sigma_A}}{dt}\right)_{xyz} + \overrightarrow{\omega_{xyz}} \wedge \overrightarrow{\sigma_A} = \left(\frac{d\,\vec{\sigma_A}}{dt}\right)_{xyz} + \overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{\sigma_A}$$

Les équations d'Euler s'écrivent sous la forme :

$$\Sigma M_{Ax} = J_x \dot{\omega}_x - J_y \Omega_z \omega_y + J_z \Omega_y \omega_z$$
$$\Sigma M_{Ay} = J_y \dot{\omega}_y - J_z \Omega_x \omega_z + J_x \Omega_z \omega_x$$
$$\Sigma M_{Az} = J_z \dot{\omega}_z - J_x \Omega_y \omega_x + J_y \Omega_x \omega_y$$

Remarque : si 1 est solidaire de 2 $(\omega_{2/1} = 0)$, on retrouve les résultats du paragraphe 3.

VII - Équilibrage des solides en rotation

Les équations générales du mouvement d'un solide en rotation par rapport à un axe fie sont indiquées paragraphe VI 4.

1. Définitions

Un solide est équilibré statiquement si son centre de gravité G est situé sur l'axe de rotation.
Un solide est équilibré dynamiquement si son axe de rotation est axe principal d'inertie du solide.

Remarque : si z est axe principal d'inertie $J_{xz} = J_{yz} = 0$, les équations générales se réduisent à $\Sigma M_{Gx} = \Sigma M_{Gy} = 0$ et $\Sigma M_{Gz} = J_{zz}$ a.

L'équilibrage peut être obtenu en ajoutant des masses au solide (exemple : équilibrage des roues d'automobile) ou en retirant de la matière par perçage (exemple : certains rotors de moteurs).

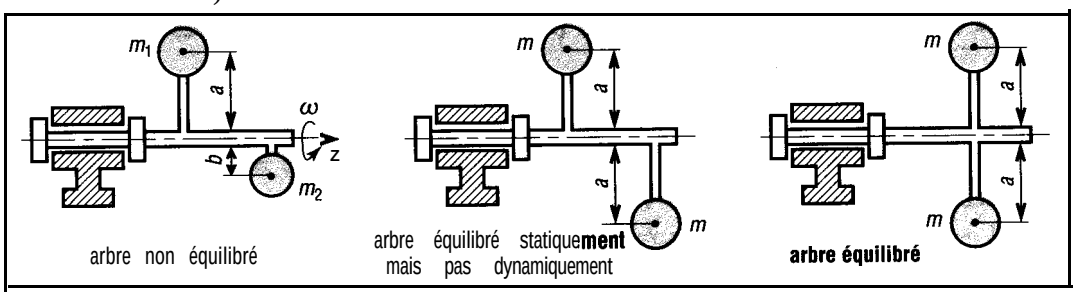


Fig. 13

2, Équilibrage au moyen de deux masses m_1 et m_2

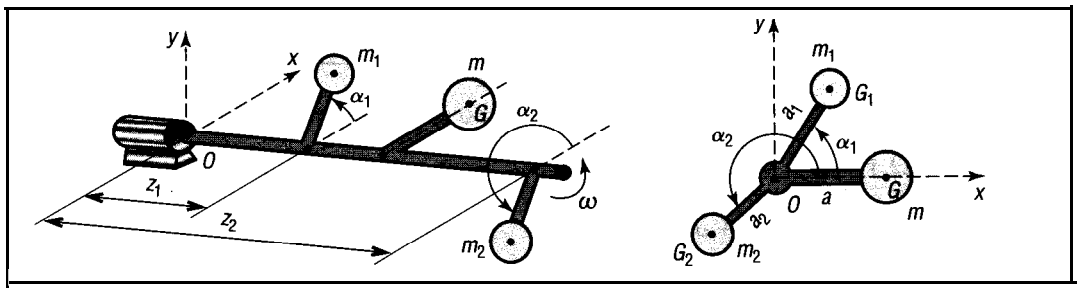


Fig. 14

L'arbre de centre de gravité G (situé à la distance a de l'axe) et de masse m est équilibré au moyen des deux masses m_1 et m_2

a) Équilibrage statique

$$\frac{m\overrightarrow{OG} + m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2}}{m_1 + m_2 + m} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{sur } x : ma + m_1a_1\cos\alpha_1 + m_2a_2\cos\alpha_2 = 0 \quad (1) \\ \text{sur y} : m_1a_1\sin\alpha_1 + m_2a_2\sin\alpha_2 = 0 \quad (2) \end{array}$$

b) Équilibrage dynamique

L'équilibrage dynamique n'est possible qu'avec deux masses (une seule ne peut suffire). Les produits d'inertie de l'ensemble en rotation doivent être nuls.

J_{yz} (ensemble) = J_{yz} (arbre) + m_1a_1 sin a, z_1 + m_2a_2 sin α_2 z_2 = 0 *(3)*

J_{xz} (ensemble) = J_{xz} (arbre) + m_1a_1 COS a, z_1 + m_2a_2 *COS* α_2 z_2 = *0* *(4)*

c) Résolution

On dispose de 4 équations pour 8 inconnues $(a,, a_2, z_1, z_2, a,, \alpha_2,$ m,, $m_2)$. En pratique, on se fie 4 inconnues qui deviennent des paramètres. Par exemple, pour l'équilibrage d'une roue d'automobile, a, = a_2 = rayon de jante et $z_2 - z_1$ = largeur de la jante et on obtient :

(1) + (4) donne : m_1a_1 COS a, $(z_2 - z_1)$ = $J_{xz} - maz_2$

(2) + (3) donne : m_1a_1 sin a, $(z_2 - z_1)$ = J_{yz}

d'où : $\boxed{\tan\alpha_1 = \dfrac{J_{yz}}{J_{xz} - m\,a\,z_2}}$

VIII • Étude simplifiée des mouvements gyroscopiques

De nombreux dispositifs de navigation aérienne utilisent les propriétés des gyroscopes : compas gyroscopique, indicateur de virage, horizon artificiel, etc.
Pour des véhicules très divers dans un virage, la rotation des arbres, moteur ou non, engendre des couples dynamiques résultant du phénomène gyroscopique qui peuvent être à l'origine de perturbations.

1. Principe, couple gyroscopique

Les équations générales du mouvement sont indiquées au paragraphe VI 5.

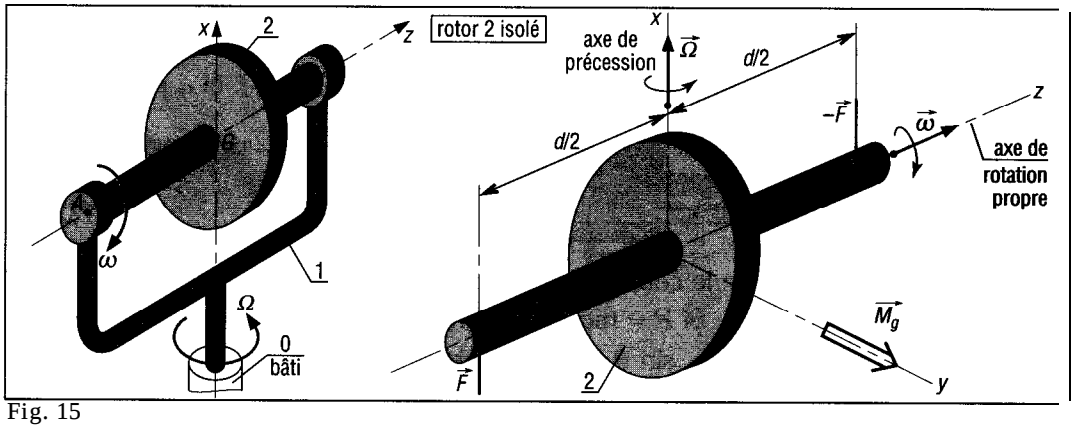


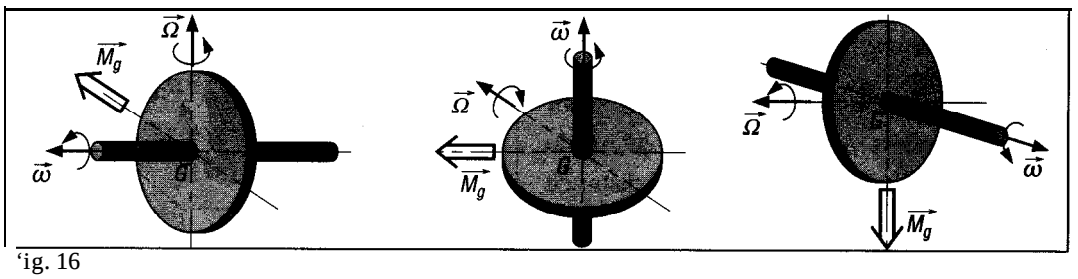
Fig. 15

La vitesse de rotation propre ω du rotor (2) est très grande comparativement à celle du mouvement de précession Ω de la fourche (1). La combinaison des deux mouvements (ω et Ω) du gyroscope engendre l'apparition d'un couple dynamique $\vec{M_g}$, appelé couple gyroscopique, perpendiculaire aux axes x et z des deux rotations et ayant pour intensité (approchée) :

$$M_g = J_{zz}\,\omega\,\Omega = J_{Gz}\,\omega\,\Omega \qquad \vec{M_g} = J_{Gz}\,\vec{\omega} \wedge \vec{\Omega}$$

Remarque 1 : si on considère le rotor (2) isolé, le couple gyroscopique M_g engendré est équilibré par les actions $\vec{F}$ et $-F$ exercées par les paliers de la fourche en A et B (actions de 1 sur 2).

Remarque 2 : la relation donnant l'intensité de $\vec{M_g}$ s'obtient aisément à partir des formules d'Euler du paragraphe VI 5, avec ω et Ω constants, en négligeant les effets dynamiques dus à la précession (Ω petit devant ω).



'ig. 16

2. Cas d'un fonctionnement en toupie

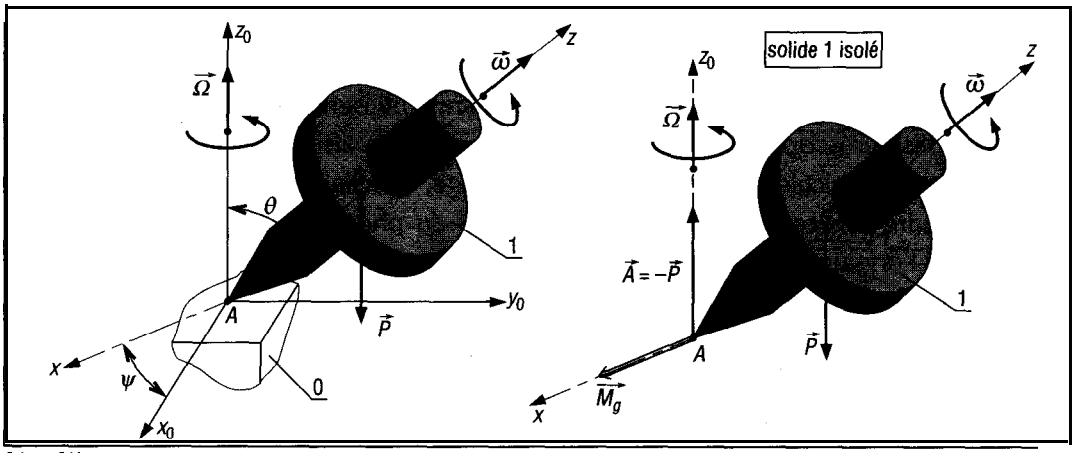


Fig. 17

θ, Ω et ω sont supposés constants, le couple gyroscopique $\overrightarrow{M_g}$ exercé sur le solide (1) est perpendiculaire au plan (z_0, z), se déplace dans le plan (x_0, y_0), et a pour valeur :

$\overrightarrow{M_g} = J_{Gz}\ \vec{\omega} \wedge \vec{\Omega}$	$M_g = J_{Gz}\ \Omega\ \omega \sin \theta$

Le couple $\overrightarrow{M_g}$ équilibre le couple formé par les deux forces $\vec{P}$ et $\vec{A} = -\vec{P}$ ($\vec{A}$ est l'action exercée par l'appui 0). Si P = mg et $J_{Gz} = mr_k^2$ avec r_k rayon de gyration :
$M_g = -M_A(\vec{P}) = P \cdot AG \cdot \sin\theta = J_{Gz}\ \Omega\ \omega \sin\theta$.
Il en résulte que :

$$\Omega = \frac{m\,g\,AG}{J_{Gz} \cdot \omega} = \frac{g \cdot AG}{\omega\, r_k^2}$$

Remarque : une étude plus détaillée nous donnerait la relation :

$M_g = \Omega \sin\theta\,[J_{Gz}\,(\omega + \Omega\cos\theta) - J_{Gy}\,\Omega\cos\theta]$

3. Exemple

Un moteur électrique est fixé sur un support (1) animé d'un mouvement de rotation (Ω = 2 rad.s^{-1}) d'axe x. Le rotor (2) du moteur, de masse 20 kg, de rayon de gyration 100 mm, tourne à la vitesse de 3 000 tr.min^{-1}.

Déterminons les actions exercées par les paliers à roulements A et B du rotor s'ils sont situés à égale distance du centre de gravité G de celui-ci (GA = GB = 0,3 m).

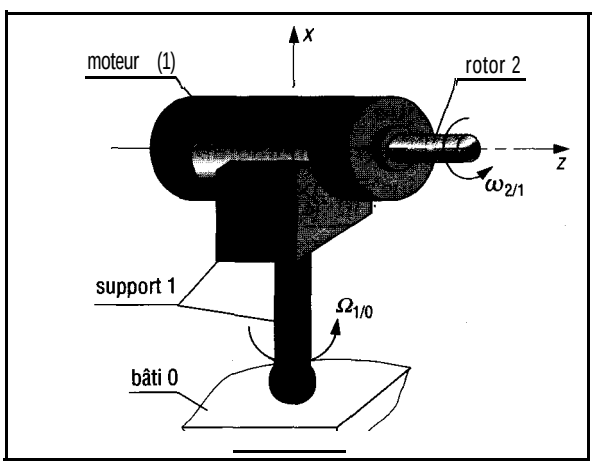


Fig. 18

Résolution

Couple gyroscopique : $M_g = J_{Gz}\,\omega\,\Omega = 20 \times 0,1^2 \times \left(\frac{3\,000\pi}{30}\right) \times 2 = 126$ Nm.

Le couple formé par les actions $\overrightarrow{A_d}$ et $\overrightarrow{B_d}$ ($A_d = B_d$) exercées par les paliers A et B équilibre le couple gyroscopique M_g :

$$\vec{0} = \overrightarrow{M_g} + \overrightarrow{M_A(A_d)} + \overrightarrow{M_A(B_d)} \Rightarrow M_g + 0 - B_d \times 0,6 = 0 \text{ d'où } A_d = B_d = \frac{M g}{0,6} = 210 \text{ N}$$

Équilibre statique : A, = $B_s = \frac{m g}{2} = 98$ N

Action totale sur les paliers :

$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{A_s} + \overrightarrow{A_d}$; A = A, +A, = 210 + 98 = 308 N

$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B_s} + \overrightarrow{B_d}$; $B = B_s - B_d = 98 - 210 = -112$ N

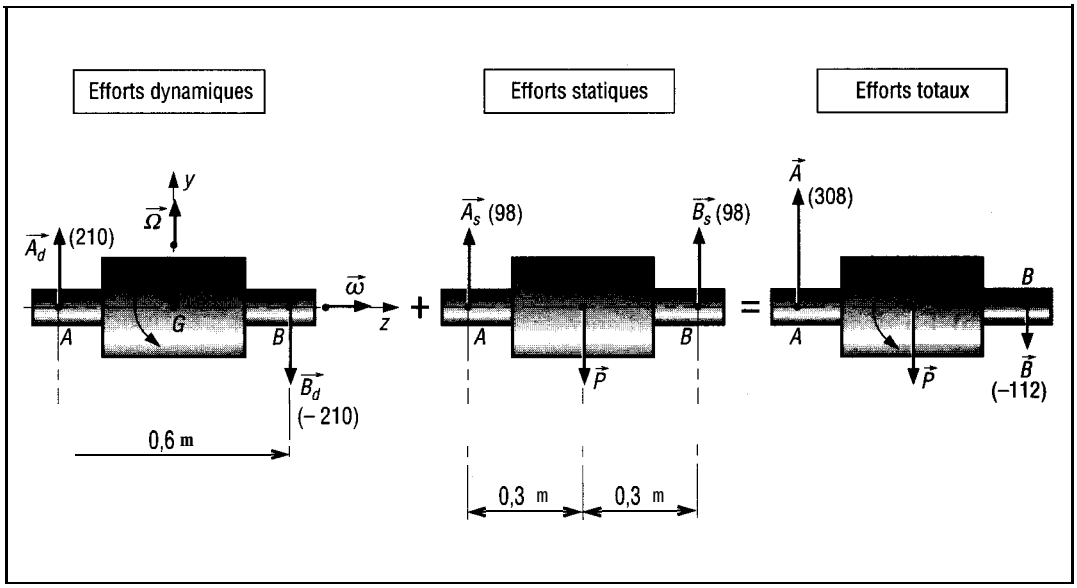


Fig. 19

EXERCICES À RÉSOUDRE

❑ Une tige mince AB, de longueur l et de masse m est fiée sur un disque (1) en rotation à la vitesse $\omega_{1/0}$ par rapport à un bâti fixe (0).

Déterminer le moment cinétique de la tige en 0, l'énergie cinétique et les actions d'encastrement en A.

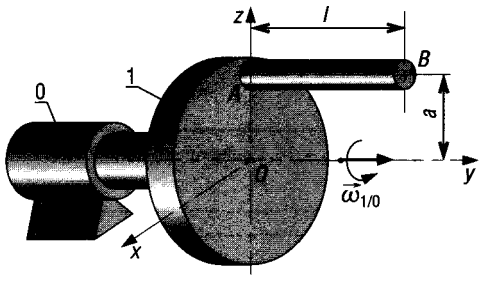


Fig. 20

❑ Deux masses concentrées m sont fiées sur un arbre (1) de diamètre négligeable, tournant à la vitesse $\omega_{1/0}$.

a) Déterminer le moment cinétique en A de l'ensemble arbre plus masses m ainsi que l'énergie cinétique.

b) Déterminer les actions exercées en A et B par les paliers.

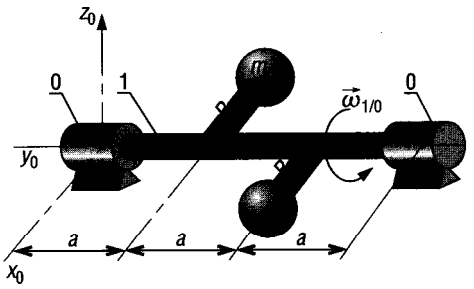


Fig. 21

Réponse

$\vec{\sigma}_A = m\,\omega R(-a\,\vec{i}_0 + 2R\,\vec{j}_0)$;
$T = m\,\omega^2 R^2$; $A_x = -B_x = \frac{m\omega^2 R}{3}$.

3 Un disque plat, de masse $m = 2$ kg, de rayon R = 200 mm, tournant à 1 500 $tr.min^{-1}$, est incliné de l'angle a = 20" par rapport au plan de rotation de l'arbre.

a) Déterminer le moment cinétique du disque en G et A, AG = 200 mm.

b) En déduire le moment d'encastrement au point A de l'arbre.

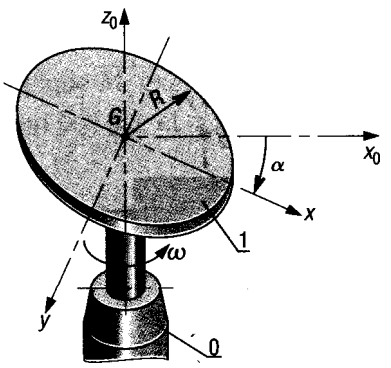
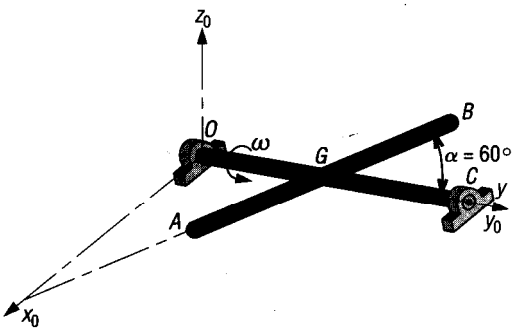


Fig. 22

❑ Une barre AB, de masse 4 kg, est solidaire d'un arbre OC tournant à la vitesse de 120 $tr.min^{-1}$. Les dimensions transversales de la barre et de l'arbre sont négligeables. AB est supposée dans le plan horizontal $(x_0, y,,)$.

Déterminer le moment cinétique en G et l'énergie cinétique de la barre AB.

$AG = BG = OG = CG = \frac{l}{2} = 1{,}2\,m$	
$J_{Gxx} = \frac{m\,l^2 \cos^2 \alpha}{12}$	$J_{Gxz} = 0$
$J_{Gyy} = \frac{m\,l^2 \sin^2 a}{12}$	$J_{Gyz} = 0$
$J_{Gxy} = \frac{m\,l^2 \sin 2\alpha}{6}$	$J_{Gzz} = \frac{m\,l^2}{12}$



Fii. 23

Réponse

$\sigma_G = 10{,}45\,\vec{i}_0 + 18{,}1\,\vec{j}_0 (kg\ m^2.s^{-1})$; T = 114 J.

❑ Reprendre l'exercice 4 et déterminer les actions exercées par les paliers sur l'arbre en 0 et C (pour la position de la figure).

6 Reprendre les exercices 4 et 5 avec une plaque triangulaire mince (base $2a$, hauteur a) soudée sur un arbre de dimensions négligeables .

Données :

a = 0,3m ; $m = 10\,kg$

$\omega_{1/0} = 100$ rad.s^{-1} ; $J_{Axx} = \frac{m a^2}{6}$

$J_{Ayy} = \frac{2 m a^2}{3}$; $J_{Azz} = \frac{5 m a^2}{6}$

$J_{Axz} = J_{Ayz} = 0$; $J_{Axy} = -\frac{m a^2}{3}$

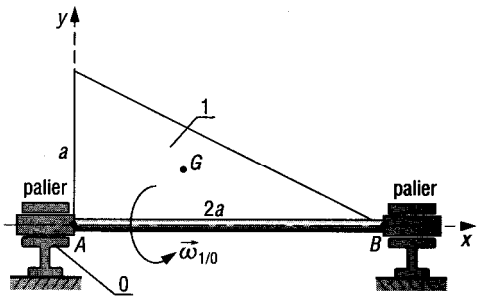


Fig. 24

7 Un arbre de transmission, tournant à la vitesse angulaire ω, comporte une partie cylindrique (rayon r, longueur 2 l, masse m, centre de gravité G sur l'axe de rotation de l'arbre) inclinée de l'angle a par rapport à l'axe de rotation de l'ensemble.

Déterminer les actions supportées par les paliers en A et B.

Réponse

$B_y = \left(\frac{m \omega^2 \sin 2\alpha}{2h}\right)\left(\frac{l^2}{3} - \frac{r^2}{4}\right) = -A_y.$

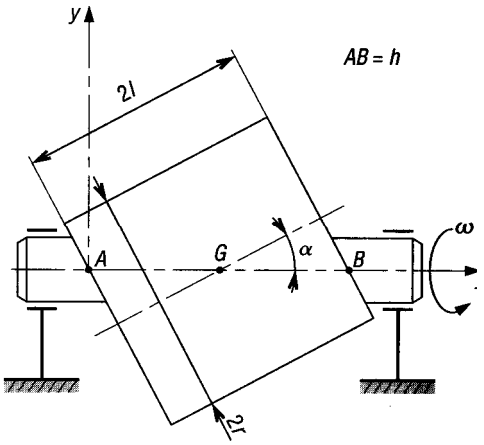


Fig. 25

8 Un disque (2), de masse $m = 5$ kg, de diamètre 600 mm, tourne à la vitesse $\omega_{2/1} = -40$ rad.s^{-1} par rapport à un bras (1) animé d'un mouvement de rotation ($\omega_{1/0} = 8$ rad.s^{-1}) par rapport au bâti (0).

Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{A2/0}}$ en A, centre du disque, ainsi que l'énergie cinétique de celui-ci (cas y parallèle à y,).

Réponse

$\vec{\sigma}_A = -0{,}9\,\vec{i}_0 - 9\,\vec{j}_0$; $T_{2/0} = 223{,}6$ J.

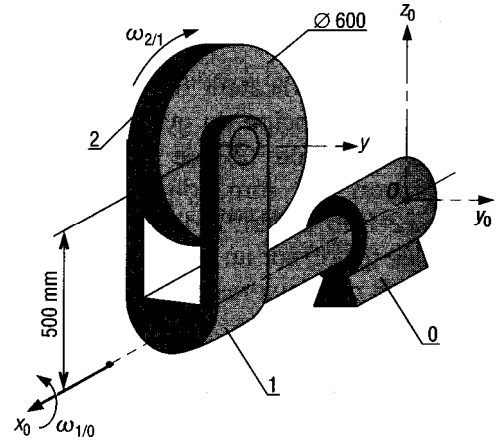


Fig. 26

9 Un gyroscope de grande dimension est monté sur un navire hôpital pour stabiliser les mouvements de roulis (ω).

Le mouvement de précession est fourni par un motoréducteur entraînant le bras (1) à la vitesse $\omega_{1/0} = 0{,}5$ rad.s^{-1}. Le rotor, de masse 80 000 kg, de rayon de gyration de 1,5 m, tourne à la vitesse $\omega_{2/1} = 100$ rad.s^{-1}.

Déterminer le couple gyroscopique engendré. Ce couple s'oppose-t-il au roulis du bateau ?

Réponse

$M = 9\,000$ kNm ; oui.

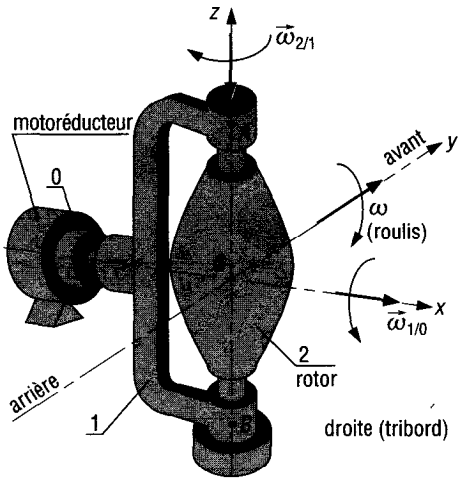


Fig. 27

Un arbre de turbine de bateau, masse 2 000 kg, rayon de gyration 0,3 m, tourne à 4 950 tr.min^{-1}.

Le bateau avance à 20 nœuds (1 nœud = 1,85 km.h^{-1}) puis tourne sur un rayon de 300 m

Déterminer les actions supportées par les paliers de l'arbre en A et B (AG = 0,8 m ; BG = 1,2 m).

Réponse

$A_y = 10\,400$ N ; $B_y = 9\,600$ N.

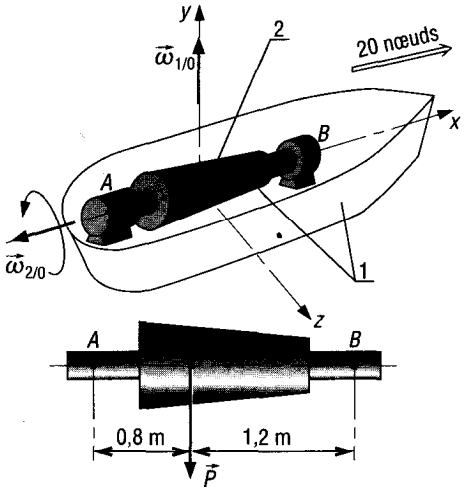


Fig. 28

Un indicateur de virage d'avion, basé sur le principe du gyroscope, se compose d'un disque (2) (de masse 0,15 kg, de rayon 30 mm, de vitesse de rotation 12 000 tr.min^{-1}), d'une fourche (1) articulée (pivot) sur un bâti (0) et maintenue en A et B par deux ressorts identiques de raideur k = 0,3 N.mm^{-1}.

Déterminer l'angle de rotation de la droite AZ3 si l'avion exécute un virage horizontal de rayon 600 m à la vitesse de 720 km.h^{-1}.

Réponse

$a = 1{,}69°$.

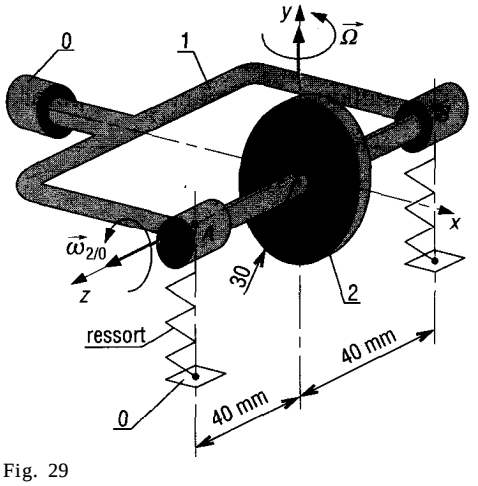


Fig. 29

20 RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX GÉNÉRALITÉS

OBJECTIFS

- Définir les notions de poutre, d'efforts intérieurs ou de cohésion, de sollicitations simples et composées, de contraintes.
- Préciser les hypothèses fondamentales de la résistance des matériaux.
- Donner des notions concernant les coefficients de sécurité.

La résistance des matériaux (RDM), outil de l'ingénieur et du technicien, est âgée de 300 ans ; Galilée, Hooke, Bernoulli et Coulomb en furent les pères fondateurs.
Le cours proposé concerne l'aspect théorique et les applications usuelles des principes fondamentaux de la RDM. Les développements portent sur les conditions d'équilibre ou de résistance, les déformations et les exigences concernant les matériaux.

I - Notion de poutre

Les résultats établis dans la suite de ce cours sont valables, avec une bonne approximation, pour des solides ayant la forme de poutre.
La ligne moyenne (L_m) d'une poutre est le lieu des centres de gravité ou centres de surface ou barycentres $A, \ldots, G, \ldots, B$ des sections droites successives (les trois désignations sont régulièrement utilisées).
Les sections droites sont des sections planes et perpendiculaires à la ligne moyenne de la poutre.

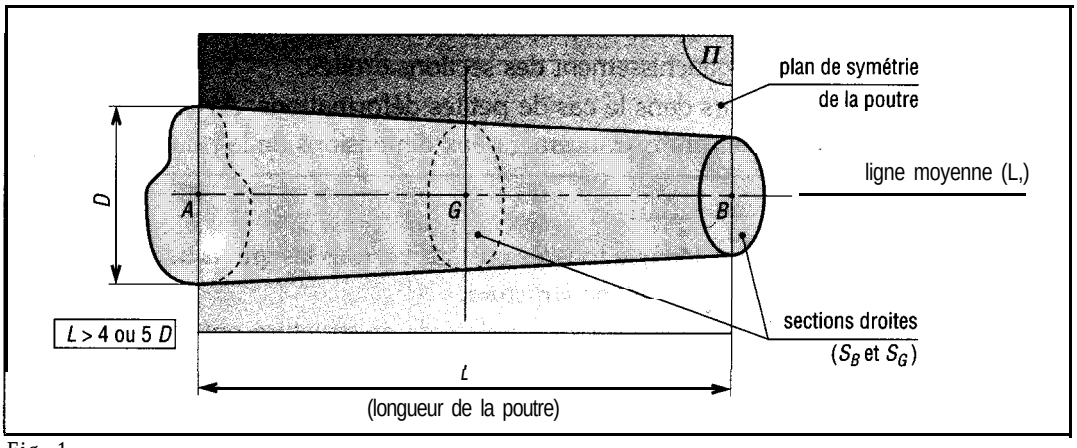


Fig. 1

Conditions : les sections droites doivent rester constantes ou ne varier que progressivement entre A et B. Les brusques variations de sections (trous, épaulements...) amènent des phénomènes de concentrations de contraintes, qui doivent être étudiés séparément. Les charges supportées sont contenues dans le plan de symétrie.

Remarque : une poutre est un solide long par rapport aux dimensions des sections droites.

Les équations et résultats établis par la suite donnent des résultats précis si la longueur (L) de la ligne moyenne est supérieure à 10 fois la plus grande dimension transversale (D). Ces équations donnent des résultats à 30 % près, si les proportions sont de l'ordre de 4 et 5.

Exemples de poutres

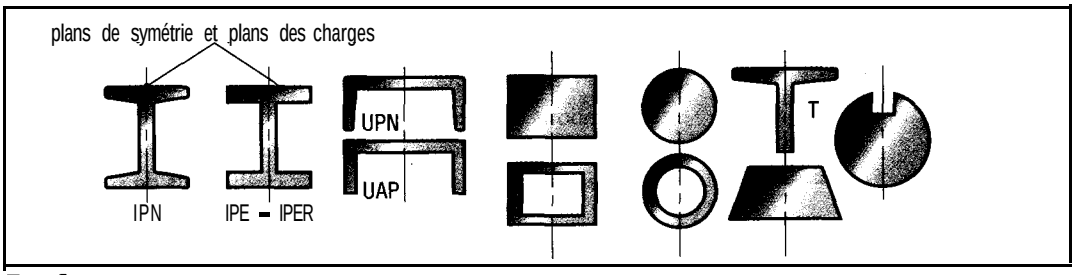


Fig. 2

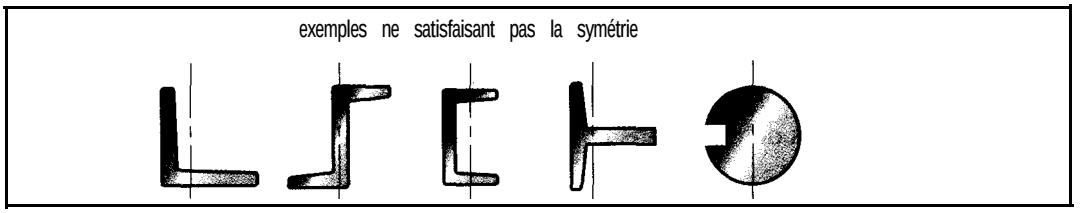


Fig. 3

II • Hypothèses fondamentales

Les formules et propriétés établies dans la suite de ce cours supposent que :
1) Les matériaux sont homogènes et isotropes.
2) Toutes les forces extérieures exercées sur la poutre sont contenues dans le plan de symétrie (Π).
3) Hypothèse de Navier Bernoulli : les sections droites, planes et perpendiculaires à la ligne moyenne, restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne après déformations. Il n'y a pas de gauchissement des sections droites.
4) On se place toujours dans le cas de petites déformations. Autrement dit, les déformations restent faibles comparativement aux dimensions de la poutre.

Définitions

Un corps est homogène lorsque tous les cristaux ou tous les grains de matières sont identiques : même constitution, même structure.

Un solide est isotrope lorsque tous les points de sa structure ont les mêmes caractéristiques mécaniques dans toutes les directions. Le bois n'est pas un matériau isotrope ; en effet, il est plus résistant dans le sens des fibres que dans le sens perpendiculaire aux fibres.

Remarques

Les métaux peuvent être supposes homogènes et isotropes, l'expérience montre que l'écart entre le modèle et la réalité est faible.

Compte tenu des hypothèses 3 et 4, on peut admettre que les forces extérieures conservent une direction fixe avant et après déformation.

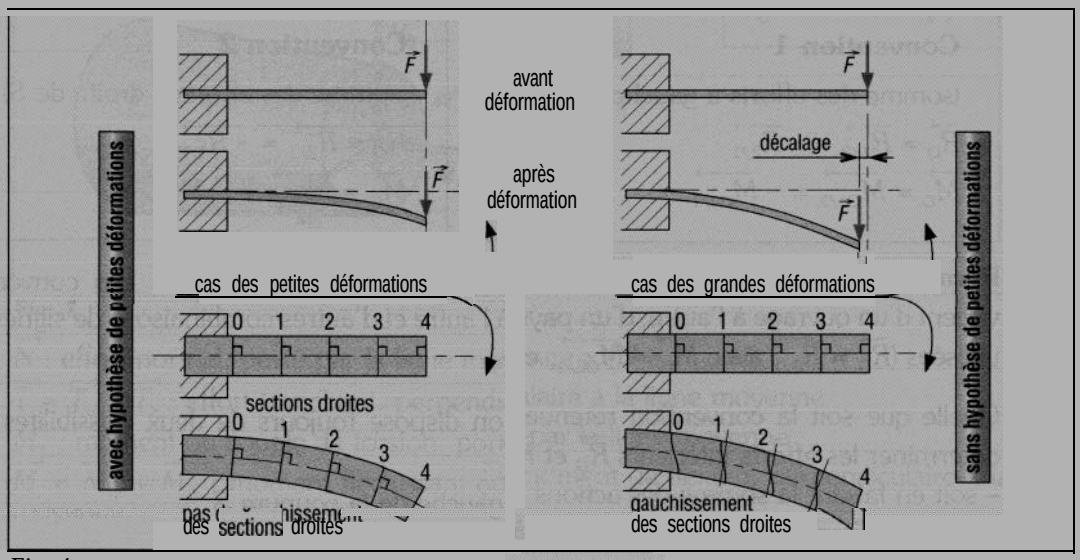


Fig. 4

III - Efforts intérieurs ou efforts de cohésion

Les efforts intérieurs ou de cohésion sont les efforts qui agissent à l'intérieur des poutres et qui assurent l'équilibre ou la cohésion de la structure sous l'action des charges extérieures exercées.

1. Principe de calcul

Les efforts intérieurs sont calculés avec le principe fondamental de la statique à partir des actions extérieures agissant sur la poutre.

À partir d'un plan de coupe imaginaire (section S de barycentre G), on divise la poutre en deux tronçons fictifs (AG et GB). Chaque tronçon est en équilibre et l'application du principe fondamental de la statique, à l'un ou l'autre, permet de faire apparaître et de calculer les efforts intérieurs exercés entre les deux tronçons, au niveau de la coupure.

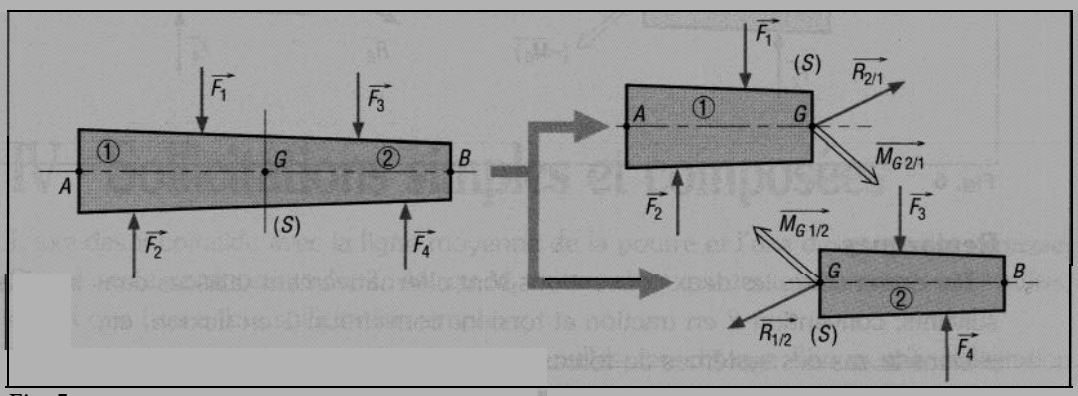


Fig. 5

2. Conventions de signe

L'action entre les deux tronçons est une action d'encastrement qui se modélise par une résultante $\overrightarrow{R_G}$ et un moment résultant $\overrightarrow{M_G}$ en G. Deux conventions de signe sont alors possibles :

Convention 1

(somme des efforts à gauche de S)

$\overrightarrow{R_G} = \overrightarrow{R_{1/2}} = -\overrightarrow{R_{2/1}}$

$\overrightarrow{M_G} = \overrightarrow{M_{G1/2}} = -\overrightarrow{M_{G2/1}}$

Convention 2

(somme des efforts à droite de S)

$\overrightarrow{R_G} = \overrightarrow{R_{2/1}} = -\overrightarrow{R_{1/2}}$

$\overrightarrow{M_G} = \overrightarrow{M_{G2/1}} = -\overrightarrow{M_{G1/2}}$

Remarque : aucune convention n'est ni normalisée ni imposée. Les conventions varient d'un ouvrage à l'autre, d'un pays à l'autre et d'autres combinaisons de signes sont utilisées ($\overrightarrow{R_G} = \overrightarrow{R_{1/2}}$ avec $\overrightarrow{M_G} = \overrightarrow{M_{G2/1}}$, etc.).

Quelle que soit la convention retenue, on dispose toujours de deux possibilités pour déterminer les efforts intérieurs $\overrightarrow{R_G}$ et $\overrightarrow{M_G}$:

- soit en faisant la somme des actions à gauche de la coupure S,
- soit en faisant la somme des actions à droite de S.

Avec la convention 1 et en appliquant le principe fondamental

$\overrightarrow{R_G} = \overrightarrow{R_{1/2}}$ = somme des forces à gauche de (S) = $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$

où : $\overrightarrow{R_G}$ = − (somme des forces à droite de (S)) = − $(\overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4})$

$\overrightarrow{M_G} = \overrightarrow{M_{G1/2}} = \overrightarrow{M_G(F_1)} + \overrightarrow{M_G(F_2)}$ = (moment résultant en G des efforts à gauche de (S))

où : $\overrightarrow{M_G} = -[\overrightarrow{M_G(F_3)} + \overrightarrow{M_G(F_4)}]$ = − (moment résultant en G des efforts à droite de (S))

Convention 1

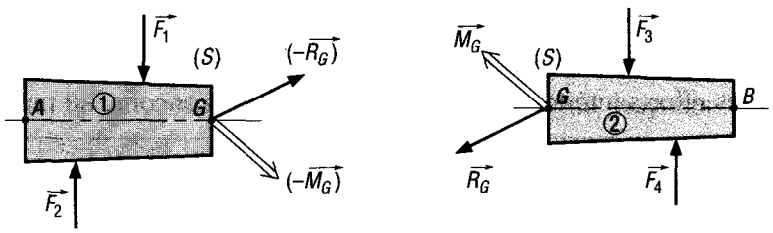
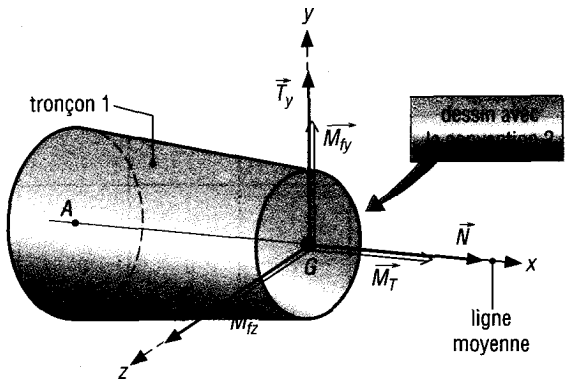


Fig. 6

Remarques

- Par commodité, les deux conventions sont alternativement utilisées dans les chapitres suivants, convention 2 en traction et torsion, convention 1 en flexion, etc.
- Dans le cas des systèmes de forces planes, le moment peut être utilisé avantageusement sous forme scalaire (ou algébrique).

3, Composantes des efforts intérieurs



$$\vec{R}_G = N\vec{x} + T_y\,\vec{y} + T_z\,\vec{z}$$
$$\vec{M_G} = M_T\vec{x} + M_{fy}\,\vec{y} + M_{fz}\,\vec{z}$$

Fig. 7

$\vec{N}$: effort normal, porté par la ligne moyenne x (N = $\vec{R_G} \cdot \vec{x}$)
$\vec{T} = \vec{T_y} + \vec{T_z}$: effort tranchant, perpendiculaire à la ligne moyenne
$\vec{M_T}$: moment ou couple de torsion, porté par la ligne moyenne
$\vec{M_f} = \vec{M_{fy}} + \vec{M_{fz}}$: moment fléchissant ou moment de flexion, perpendiculaire à la ligne moyenne.

4. Torseurs des efforts intérieurs ou de cohésion

L'action d'encastrement entre les deux tronçons peut aussi être schématisée par un torseur d'encastrement, appelé torseur des efforts intérieurs ou des efforts de cohésion.

Exemples de notation

$$\{\mathcal{T}_G\} = \left\{\begin{matrix}\vec{R_G}\\ \vec{M_G}\end{matrix}\right\}_G = \left\{\begin{matrix}N & M_T\\ T_y & M_{fy}\\ T_z & M_{fz}\end{matrix}\right\}_{G\,(x,y,z)}$$

ou

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = \left\{\begin{matrix}\vec{R_G}\\ \vec{M_G}\end{matrix}\right\}_{G\,(x,y,z)}$$

Avec la convention 1 :

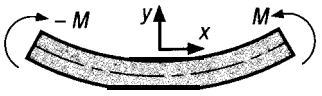
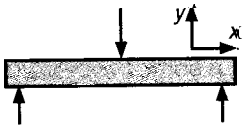
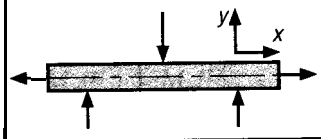
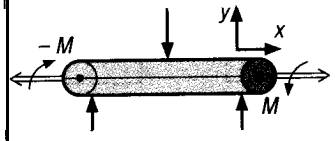
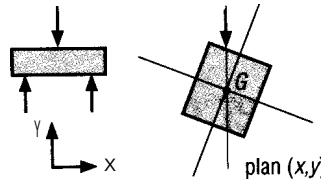
$\mathcal{T}_G = \{\mathcal{T}_{1/2}\}_G = -\{\mathcal{T}_{2/1}\}_G$ = somme des torseurs d'action à gauche de S,

ou $\mathcal{T}_G$ = − somme des torseurs d'action à droite de S.

IV • Sollicitations simples et composées

L'axe des x coïncide avec la ligne moyenne de la poutre et l'axe des y avec la verticale. Si une seule composante N, T, M_T ou M_f existe, alors que toutes les autres sont nulles, on dit que l'on a une sollicitation simple.

Si deux composantes au moins sont non nulles, on dit que l'on a une sollicitation composée.

Cas	Exemple	Composantes N	Composantes T	Composantes M_T	Composantes M_f	Observations
traction		N	0	0	0	Sollicitations simples
cisaillement		0	T	0	0	
torsion		0	0	M_T	0	
flexion pure		0	0	0	M_{fz}	
flexion simple		0	T_y	0	M_{fz}	Sollicitations composées
flexion + traction		N	T_y	0	M_{fz}	
flexion + torsion		0	T_y	M_T	M_{fz}	
flambage		N	0	0	M_{fz}	
flexion déviée		0	T_y T_z	0	M_{fz} M_{fy}	

ig. 8

Remarque : d'autres cas sont possibles : flexion + torsion + traction, flexion déviée + traction, traction + cisaillement, torsion + cisaillement, etc.

V • Notion de contrainte

1. Principe de détermination

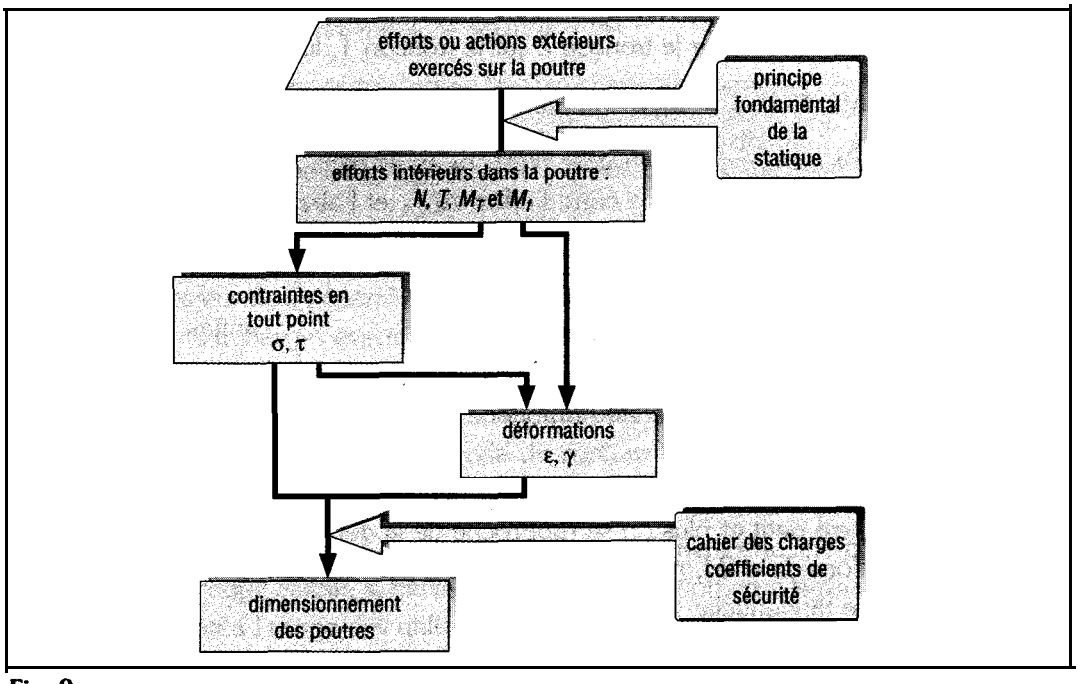


Fig. 9

Les efforts intérieurs schématisent les actions de cohésion s'exerçant dans une section droite de la poutre, mais ne donnent aucune indication en chacun des points de cette section. Ce sera le rôle des contraintes.

En pratique, la détermination préalable des efforts intérieurs est nécessaire pour calculer les contraintes (voir organigramme proposé).

2, Définitions

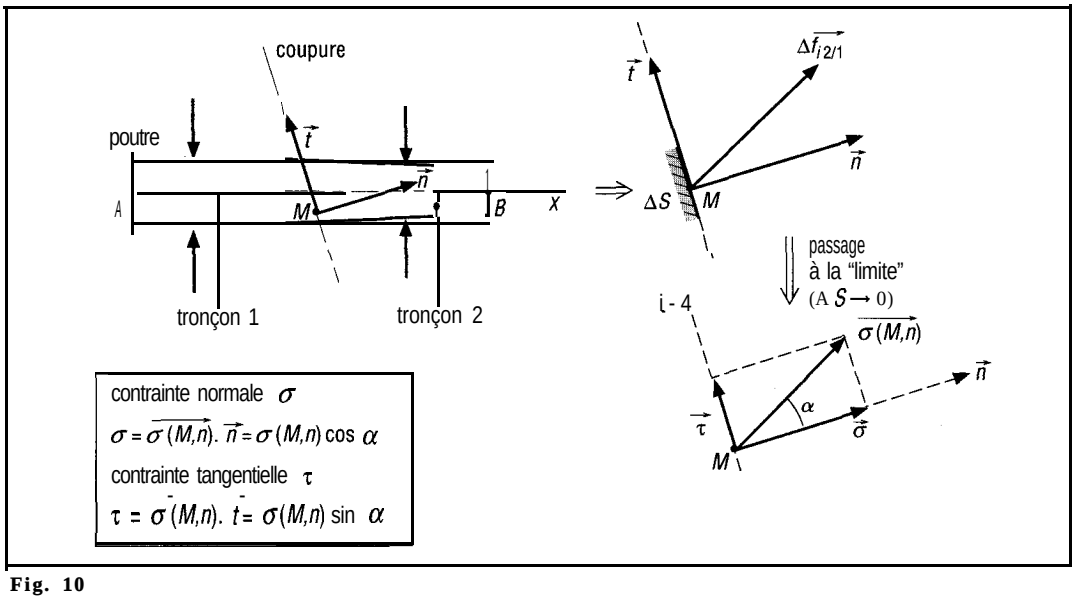


Fig. 10

M est un point quelconque de la coupure (S) dont l'orientation du plan de coupe peut ne pas être perpendiculaire à la ligne moyenne (x).

$\vec{n}$: normale à la coupure ou vecteur unitaire ($\| \vec{n} \| = 1$) perpendiculaire au plan de la coupure, $\vec{n}$ traduit l'orientation de cette dernière.

$\vec{t}$: vecteur unitaire ($\| \vec{t} \| = 1$) appartenant au plan de la coupure et perpendiculaire à $\vec{n}$.

AS : aire de l'élément de surface entourant le point M, AS est très petit.

$\overrightarrow{\Delta f_{i2/1}}$: action exercée par le tronçon 2 sur le tronçon 1, limitée à l'élément de surface AS.

Remarque : $\Sigma \overrightarrow{\Delta f_{i2/1}} = \vec{R}_G$ = somme des $\overrightarrow{\Delta f_i}$ pour toute la coupure.

Définition : on appelle contrainte $\overrightarrow{\sigma(M, \vec{n})}$ en M dans la direction $\vec{n}$ la limite, lorsque AS tend vers zéro, du rapport entre l'effort $\overrightarrow{\Delta f_{i2/1}}$ et l'aire AS entourant le point M.

Autrement dit :

$\overrightarrow{\sigma(M, \vec{n})} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta f_{i2/1}}}{\Delta S}$	unités : MPa ou $N.mm^{-2}$

Remarques : la contrainte est homogène à une pression, c'est une sorte de pression négative de cohésion.

Le passage à la limite (AS tendant vers 0) permet d'avoir l'effort de cohésion au point M, plus AS est petit et plus on se rapproche de la définition du point.

Les projections de σ (M, n) sur les directions $\vec{n}$ et $\vec{t}$ donnent la contrainte normale σ et la contrainte tangentielle τ.

3. Hypothèse de Barré de Saint-Venant

Exemple

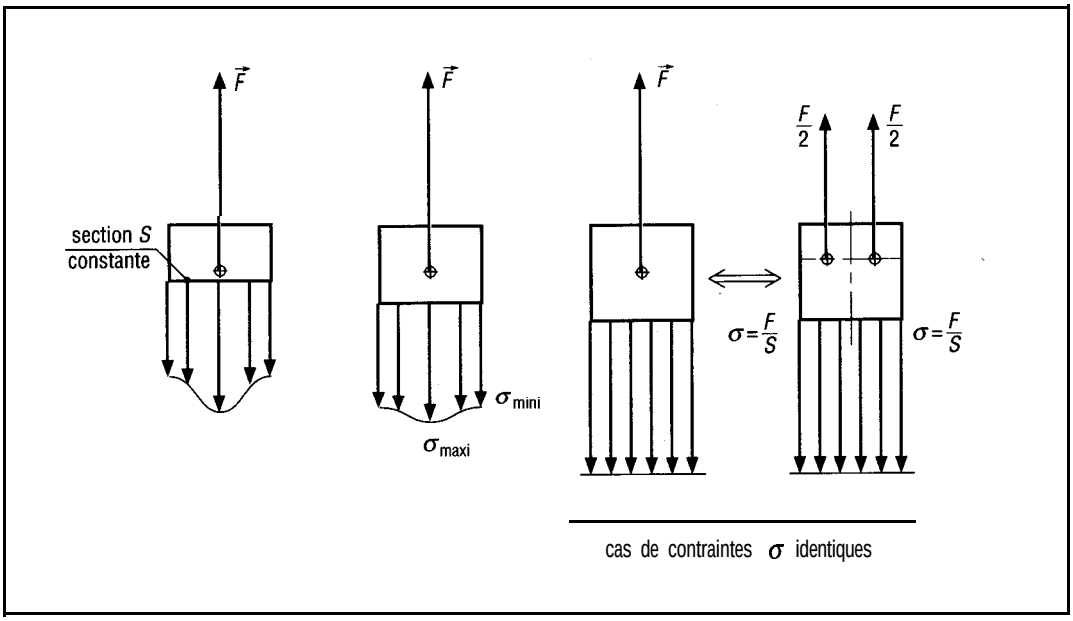


Fig. 11

Hypothèse : les contraintes (σ) ou les déformations (ε) engendrées en un point suffisamment éloigné de la zone d'application des charges seront identiques avec des charges différentes, ayant même résultante ou étant statiquement equivalentes (torseurs différents ayant mêmes éléments de réduction).

VI - Notions sur les coefficients de sécurité

Pour qu'une structure (machine, véhicule, avion, bateau, immeuble.. .) puisse supporter en toute sécurité les charges qui normalement la sollicitent, il suffit qu'elle puisse résister à des charges plus élevées. La capacité à supporter ces charges constitue la résistance de la structure. Le coefficient de sécurité s est :

$$s = \frac{\text{charges admissibles par la structure}}{\text{charges habituellement exercées}} = \frac{\text{résistance réelle de la structure}}{\text{résistance strictement nécessaire}}$$

Le choix de la valeur de s dépend de la connaissance (ou non) des phénomènes agissant sur la structure : surcharges éventuelles ; chocs ; type et degré de précision des charges (statiques, dynamiques, répétées.. .) ; phénomènes de fatigue ; concentrations de contraintes ; connaissance et variations des propriétés du matériau ; qualité de la fabrication ; effets de l'environnement ; mode de rupture (progressive ou brutale) ; conséquences d'une rupture sur l'environnement (dégâts matériels, humains.. .).

Le choix définitif du coefficient de sécurité est généralement effectué par un groupe de spécialistes. Ce groupe établit, si nécessaire, une codification, une législation ou une normalisation destinée à l'usage des utilisateurs.

Un coefficient de sécurité trop faible augmente exagérément les risques de rupture. Un coefficient de sécurité trop élevé peut aussi avoir des effets néfastes (augmentation du poids, du prix de revient...). s varie le plus souvent entre 1 et 10.

Définitions

Pour un grand nombre de structure, la sécurité est obtenue si, sous charge, les déformations du matériau restent élastiques (non plastiques). Ceci est réalisé lorsque les contraintes en n'importe quel point de la structure restent inférieures à la limite élastique R_e (ou $R_{e0,2}$) du matériau. s est alors défini par :

$$s = \frac{R_e}{R_p} = \frac{\text{limite élastique du matériau}}{\text{contrainte tolérée dans la structure (résistance pratique)}}$$

Pour des matériaux fragiles (béton, . . .), pour le bois et d'autres, il est souvent préférable d'utiliser la résistance à la rupture R_r du matériau plutôt que la limite élastique R_e, difficile ou impossible à obtenir. s est alors défini par :

$$s = \frac{R_r}{R_p} = \frac{\text{limite à la rupture du matériau}}{\text{contrainte tolérée dans la structure}}$$

La valeur de s est plus grande dans ce cas.

Une autre méthode, également souvent utilisée, consiste à appliquer un coefficient de sécurité aux charges plutôt qu'aux contraintes. s devient un facteur de charge et est défini par :

$$s = \frac{F_{adm}}{F_{usu}} = \frac{\text{charge maximale admissible par la structure}}{\text{charge habituelle en service normale}}$$

Dans certaines industries (aviation. ..), on parle plutôt de marge de sécurité rn que de coefficient de sécurité s, m est défini par :

$$m = \text{marge de sécurité} = s - 1$$

Valeurs indicatives				
s	**Charges exercées sur la structure**	**Contraintes dans la structure**	**Comportement du matériau**	**Observations**
$1 < s < 2$	régulières et connues	connues	testé et connu	fonctionnement constant sans à-coups
$2 < s < 3$	régulières et assez bien connues	assez bien connues	testé et connu moyennement	fonctionnement usuel avec légers chocs et surcharges modérées
$3 < s < 4$	moyennement connues	moyennement connues	non testé	
	mal connues ou incertaines	mal connues ou incertaines	connu	

Les valeurs indiquées devront être corrigées en hausse si les matériaux sont fragiles, en cas de chocs, de fonctionnement incertain ou s'il y a menace sur l'environnement ou sur la sécurité des personnes et des biens.

EXERCICES À RÉSOUDRE

❑ Une poutre sur deux appuis A et B supporte une charge concentrée $\vec{F}$ (300 daN) en C. a) Déterminer les actions exercées par les appuis. b) Déterminer les efforts intérieurs dans la poutre en E et G.

Réponse

A, = 100 daN ; B_y = 200 ; A, = B_x = 0 ;
N_E = 0 ; T_E = 100 ; M_{fE} = – 1 500 Nm ; N_G = 0 ;
T_G = – 200 ; M_{fG} = – 1 000 Nm.
(convention 1)

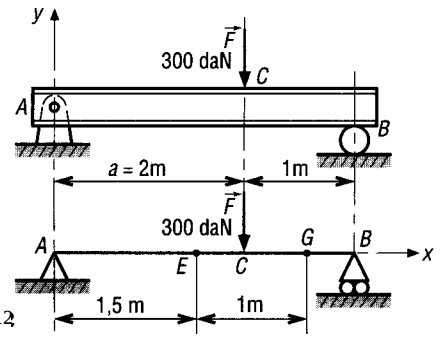


Fig. 12

2 Reprendre l'exercice 1 avec a = 4 m et F = 400 daN.

3 Reorendre l'exercice 1 avec la poutre proposée et deux charges concentrées $\vec{F_1}$ (300 daN) et $\vec{F_2}$ (ZOO daN) agissant en C et D.

Réponse

A,= 50 daN ; B_y = 450 ; N_E = 0;
T_E = – 250 ; M_{fE} = 1 500 Nm ; N_G = 0 ;
T_G = 200 ; M_{fG} = 2 000 Nm.
(convention 1)

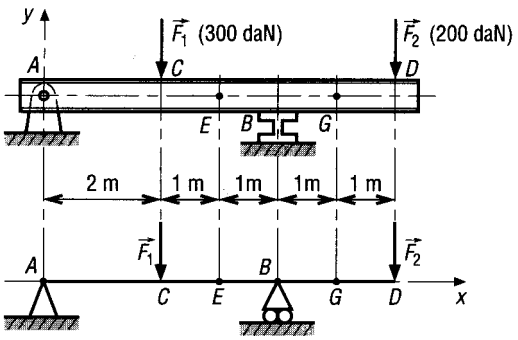


Fig. 13

❑ Reprendre l'exercice 3 avec F_1 = F_2 = 300 daN.

5 Une canalisation est encastrée en 0 dans un mur et se compose de deux tuyaux OA et AB reliés entre eux par un coude. Les actions supportées à l'extrémité B sont schématisées par la force F verticale20 daN ($\vec{F} = -20\ \vec{k}$) et par le couple M_B de 20 Nm ($\vec{M_B} = -20\ \vec{j}$).

a) Déterminer les actions exercées par l'encastrement en 0.

b) Déterminer les efforts intérieurs dans les sections droites passant par G et A.

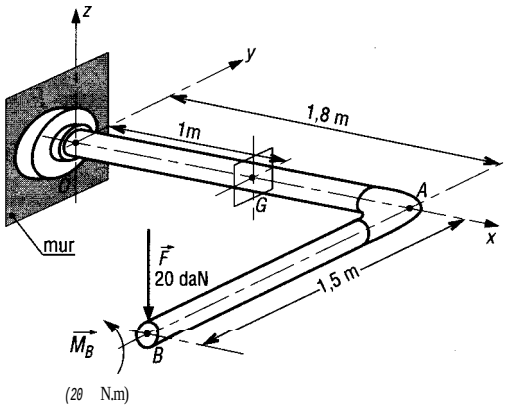


Fig. 14

❑ Une barre cintrée est soumise à deux forces égales et opposées $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ (800 daN). Déterminer les efforts intérieurs dans la section droite passant par G. d = 100 et a = 200 mm.

Réponse

$N = 800$ daN ; $T = 0$; $M_T = 0$;
$M_{fy} = 0$; $M_{fz} = -800$ Nm.
(convention 1)

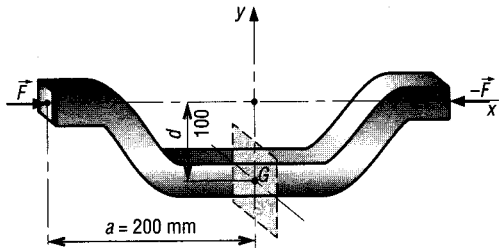


Fig. 15

7 Reprendre l'exercice 6 avec $a = 150$; $d = 200$ et $F = 1\,000$ daN.

❑ Un panneau de signalisation supporte une charge F de 100 daN en B résultant de l'action du vent. Le panneau est encastré (scellé) en 0 dans un trottoir. Les poids sont négligés. a) Déterminer les actions exercées par l'encastrement 0. b) Déterminer les efforts intérieurs dans la section droite du poteau passant par G.

Réponse

$\overrightarrow{Ox} = 0$; $Oy = 0$; $Oz = -100$ daN ;
$\overrightarrow{M_0} = 1\,000\,\vec{i} + 3\,000\,\vec{j}$ (Nm) ;
$N_G = 0$; $T_y = 0$;
$T_z = 100$; $M_T = 1\,000$ Nm ; $M_{fy} = 1\,000$; $M_{fz} = 0$
(convention 1).

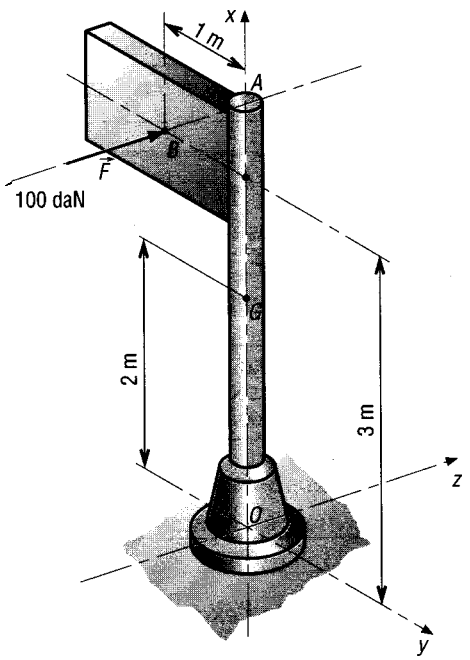


Fig. 16

❑ Renrendre l'exercice 8 avec $\vec{F} = 50\,\vec{j} + 80\,\vec{k}$.

21 TRACTION

OBJECTIFS

- Définir l'effort normal N, la contrainte normale σ, les allongements AL et ε.
- Décrire l'essai de traction et indiquer la loi de Hooke.
- Traiter les cas particuliers : concentration de contrainte, contraintes d'origine thermique, systèmes hyperstatiques et contrainte dans une section inclinée.

1 • Définition • Exemple

Une poutre droite est sollicitée en traction chaque fois que les actions aux extrémités (A et B) se réduisent à deux forces égales et opposées $(\vec{F}$ et $-\vec{F})$ de direction la ligne moyenne (L_m).

Fig. 1

Exemple

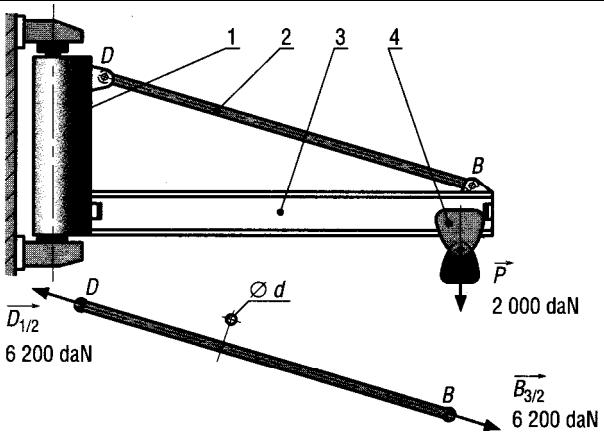


Fig. 2

La potence à tirant proposée est utilisée en manutention pour lever et déplacer des charges. Elle se compose d'un palan 4, d'une poutre-rail 3, d'un fût pivotant 1 et du tirant 2 (voir description complète chapitre « statique plane - exercice 8 »).
Le tirant 2 est soumis à une sollicitation de traction : il est soumis à l'action de deux forces $\overrightarrow{D_{1/2}}$ et $\overrightarrow{B_{3/2}}$, égales et opposées, direction BD, intensité maximale 6 200 daN (cas où le palan 4 est à l'extrême droite).
Le tirant est cylindrique, de diamètre d inconnu, de longueur 2,8 m, et est réalisé en acier (résistance à la rupture R_r = 500 MPa, limite élastique R_e = 300 MPa). Le diamètre d sera déterminé dans les paragraphes suivants.

II - Effort normal *N*

Pour la poutre du paragraphe I, faisons une coupure fictive (section droite S située à x de ***A)*** entre les deux extrémités ***A*** et *B* pour faire apparaître les efforts intérieurs dans la poutre. Utilisons la convention 2 (voir chapitre « résistance des matériaux-généralités »).
La coupure S divise la poutre en deux tronçons AG et GB. Quelle que soit la position de la coupure (ou de la valeur de x), chaque tronçon est soumis à deux forces égales et opposées.

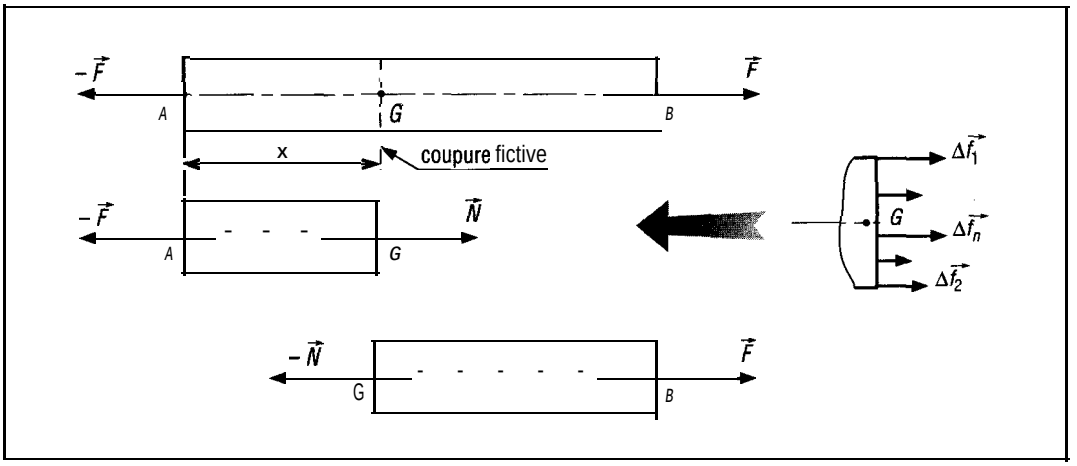


Fig. 3

En effet, si on isole le tronçon AG, la résultante des actions $\overrightarrow{\Delta f_1}$, $\overrightarrow{\Delta f_2}$, . . . , $\overrightarrow{\Delta f_n}$ exercées en chaque point de la coupure par le tronçon GB se réduit au seul effort normal $\vec{N}$ en G (centre de gravité ou barycentre de la coupure S), tel que :

$\vec{N} = \overrightarrow{\Delta f_1} + \overrightarrow{\Delta f_2} + \ldots + \overrightarrow{\Delta f_n} = \vec{F}$ (direction AGB)

$N = F$ (quel que soit x)

Exemple du tirant

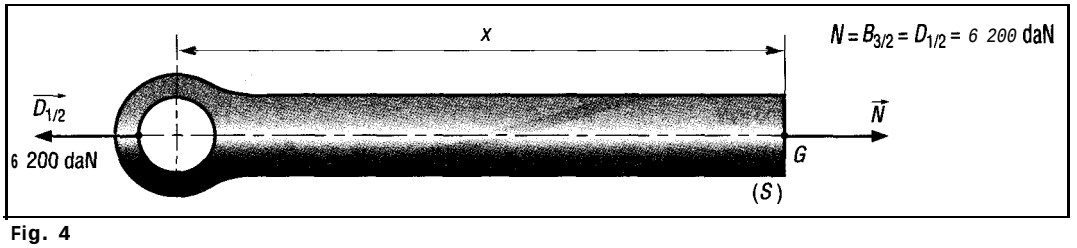


Fig. 4

III-Contrainte normale

Divisons la coupure S précédente en n petites surfaces élémentaires. AS,, AS,, . . . , AS,, telle que AS = AS, + AS, + . . . + AS,,.

Chaque élément de surface (AS) supporte un effort de traction $\overrightarrow{\Delta f_1}, \overrightarrow{\Delta f_2}, \ldots, \overrightarrow{\Delta f_n}$ parallèle à la ligne moyenne AB.

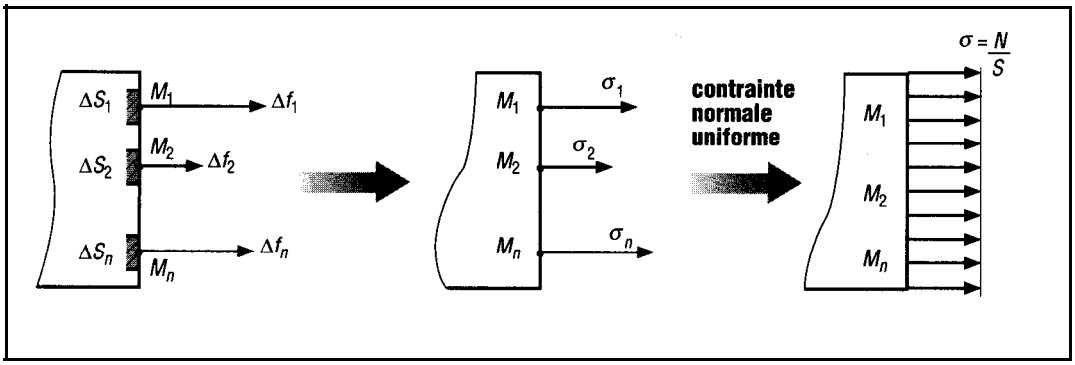


Fig. 5

Si $M_1, M_2, \ldots . M_n$ sont les centres des petites surfaces AS, en chaque point, la contrainte σ est définie comme la limite du rapport Δf sur AS lorsque AS tend vers zéro (devient très petit).

$$\sigma_1 = \lim_{\Delta S_1 \to 0}\left(\frac{\Delta f_1}{\Delta S_1}\right) \quad ; \quad \sigma_2 = \lim_{\Delta S_2 \to 0}\left(\frac{\Delta f_2}{\Delta S_2}\right) \quad ; \ldots ; \quad \sigma_n = \lim_{\Delta S_n \to 0}\left(\frac{\Delta f_n}{\Delta S_n}\right)$$

Contrainte normale uniforme : dans le cas général et sauf cas particuliers de concentrations de contrainte (voir paragraphe VII), on admettra que toutes les contraintes précédentes sont identiques.

$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_n$

On dit qu'il y a répartition uniforme des contraintes dans la coupure ou section droite S. Il en résulte que :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

σ : contrainte normale en MPa ou $N.mm^{-2}$

N : effort normal en N

S : aire de la section droite en mm^2

Exemple : reprenons l'exemple du tirant en supposant d = 20 mm.

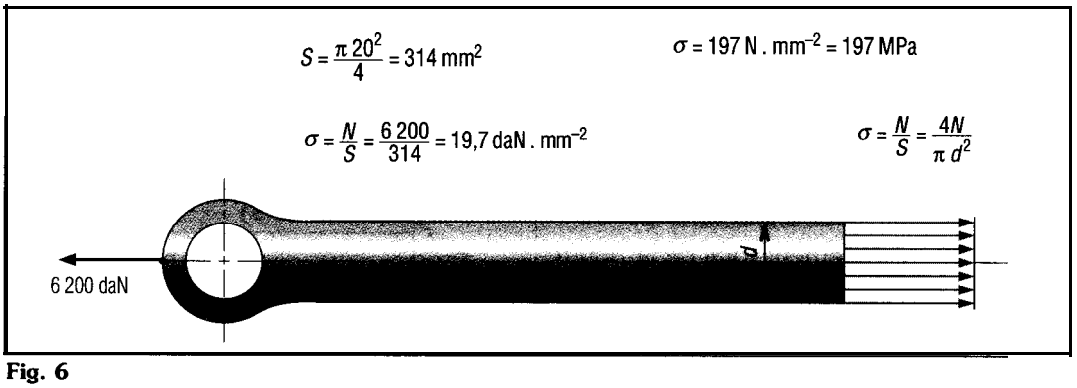


Fig. 6

IV - Étude des constructions - Conditions de résistance

Pour des questions de sécurité liées à l'usage de l'appareil, la contrainte σ précédente doit rester inférieure à une contrainte limite admissible, appelée résistance pratique à l'extension R,,. Il en sera ainsi pour toutes les constructions de ce type.

La résistance pratique R_{pe} est fixée par des normes ou par le constructeur. Dans le cas général, R_{pe} est définie à partir de la limite élastique R_e du matériau. R_e est une donnée (voir essai de traction).

$$\sigma_{maxi} = \frac{N}{S} \leqslant R_{pe} = \frac{R_e}{s}$$

s est le coefficient de sécurité adopté pour la construction de l'appareil. Sauf pour les cas où la rupture est recherchée, le coefficient de sécurité est choisi de façon à ce qu'en cours de fonctionnement normal, les contraintes normales maximales ne dépassent pas la limite élastique R_e du matériau.

Remarque : dans certains cas (matériaux fragiles, etc.), on préfère utiliser la résistance à la rupture R_r du matériau, à la place de R_e, pour définir s (voir chapitre « résistance des matériaux - généralités »).

Exemple : reprenons l'exemple du tirant ; si on impose une contrainte admissible de 100 MPa, déterminons le diamètre d minimal pour la construction de celui-ci et les coefficients de sécurité adoptés. Rappel : N = 62 000 N.

a) $\sigma_{maxi} = \frac{N}{S} = \frac{62\,000}{\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)} \leqslant 100$ d'où $\frac{62\,000 \times 4}{100\,\pi} \leqslant d^2$

après calcul : d $\geqslant 28{,}1$ mm.

Le constructeur de l'appareil devra choisir, dans les catalogues de fournisseurs, un rond de diamètre aussi proche que possible de 28,1 mm, tout en restant supérieur à cette valeur.

b) Coefficients de sécurité adoptés

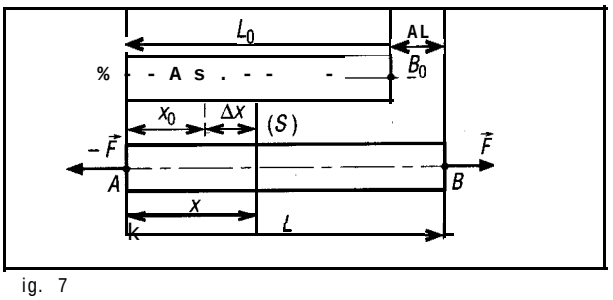
L'acier employé a pour caractéristiques : R_e = 300 MPa ; R_r = 500 MPa

$R_{pe} = \frac{R_e}{s}$ o ù $s \leqslant \frac{R_e}{R_{pe}} \leqslant \frac{300}{100} \leqslant 3$; $s' = \frac{R_r}{R_{pe}} = \frac{500}{100} = 5.$

V - Déformations

1. Allongements

L_0 = longueur initiale de la poutre
L = longueur finale de la poutre
ΔL = allongement total de la poutre
X_0 = longueur initiale du tronçon
X = longueur finale du tronçon
ΔX = allongement du tronçon



ig. 7

L'expérimentation montre que les allongements sont proportionnels aux longueurs initiales. L'allongement relatif ε traduit cette propriété :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\Delta X}{X_0} = \text{allongement relatif (sans unité)} \quad \text{où} \quad \Delta L = \varepsilon L_0$$

Remarques : ε caractérise l'allongement d'une poutre de longueur 1 (égale à l'unité). ε ne doit pas être confondu avec A % (voir paragraphe VI).

Exemple : sous charge, le tirant des exemples précédents s'allonge de 4 mm. Déterminons ε et l'allongement d'un tronçon de longueur 1 m.

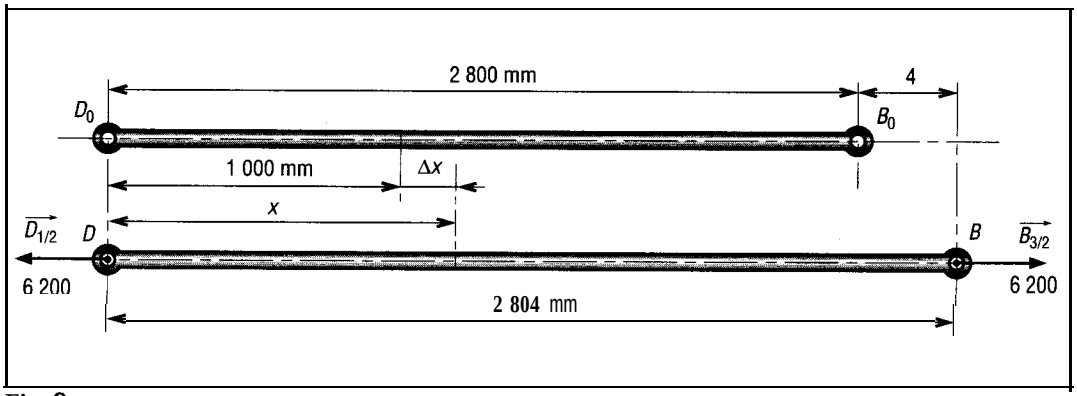


Fig. 8

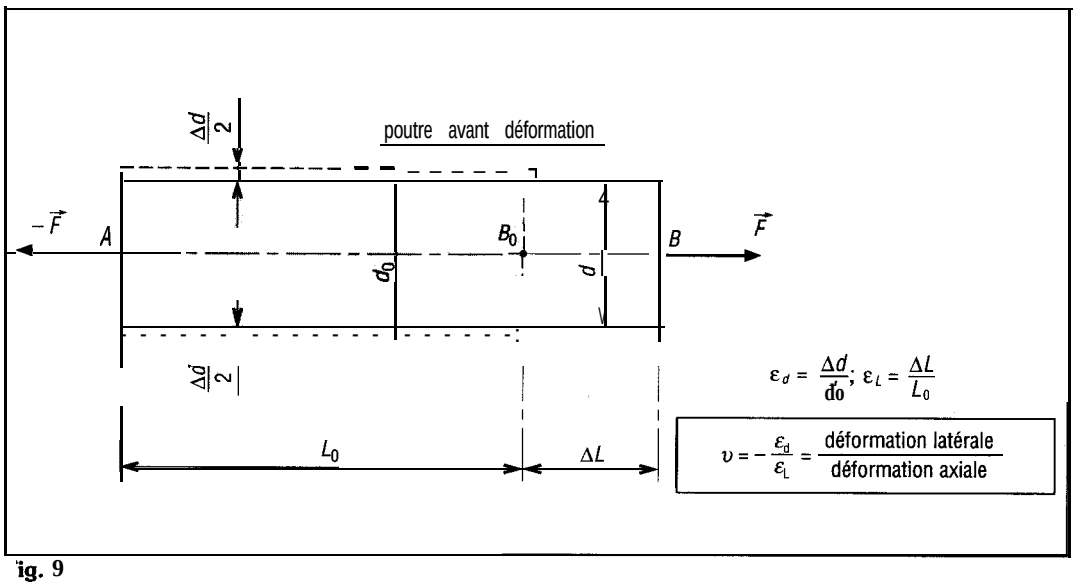
$$\varepsilon = \frac{4}{2\,800} = \frac{1}{700} = 0{,}00143$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta X}{1\,000} = 0{,}00143 \quad \text{d'où} \quad \Delta X = 0{,}00143 \times 1\,000 = 1{,}43\,\text{mm}$$

$$X = 1\,001{,}43\,\text{m}$$

2. Contraction latérale • Coefficient de Poisson υ

Le coefficient de Poisson caractérise le rapport entre la contraction latérale ε_d et l'allongement relatif de la poutre ε_L.



ig. 9

VI - Relation entre contraintes et déformations - Loi de Hooke

1. Loi de Hooke

Pour un grand nombre de matériaux (métaux, etc.), l'essai de traction (voir paragraphe 2) montre qu'il existe une zone élastique pour laquelle l'effort F de traction est proportionnel à l'allongement ΔL. Autrement dit, le rapport $F/\Delta L$ est constant, analogie avec un ressort ($F = kx$).

Cette propriété est énoncée par la loi de Hooke :

En déformation élastique, la contrainte normale σ est proportionnelle à l'allongement relatif ε.

$$\sigma = E\varepsilon$$

σ : contrainte normale MPa ou $N.mm^{-2}$
ε : allongement relatif (sans unité)
E : module d'élasticité longitudinale MPa

Remarques : E est une constante, caractéristique du matériau.

La loi de Hooke est à la résistance des matériaux ce que la loi d'Ohm est à l'électricité.

Exemple

Reprenons l'exemple du tirant
$d = 28$ mm, $\sigma = 100$ MPa
E = 200 GPa, $L = 2,8$ m
Déterminons l'allongement ΔL du tirant :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E}$$
$$= \frac{100}{200\,000}$$
$$= 0,0005$$

$$\Delta L = \varepsilon L$$
$$= 0,0005 \times 2\,800$$
$$= 1,4 \text{ mm}$$

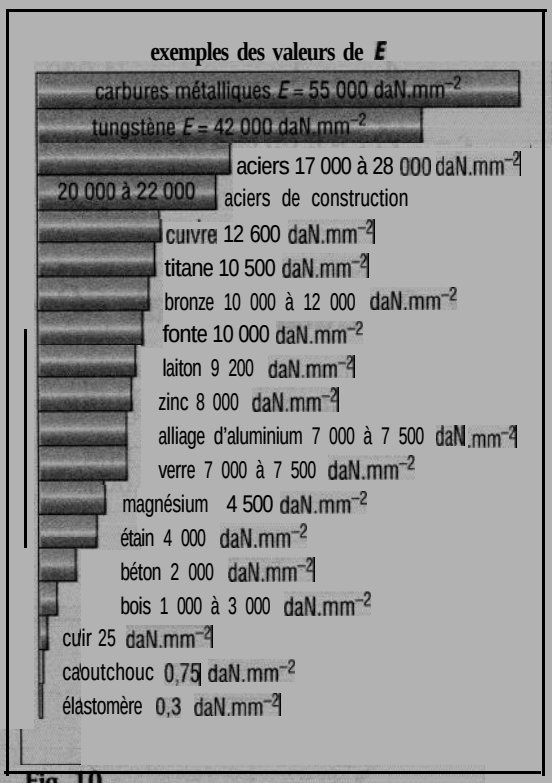


Fig. 10

2. Essai de traction

L'essai consiste à exercer sur une éprouvette de forme cylindrique ou parallélépipédique (« plate ») des forces croissantes, qui vont la déformer progressivement puis la rompre.

a) Machine d'essai, éprouvette et caractéristiques définies

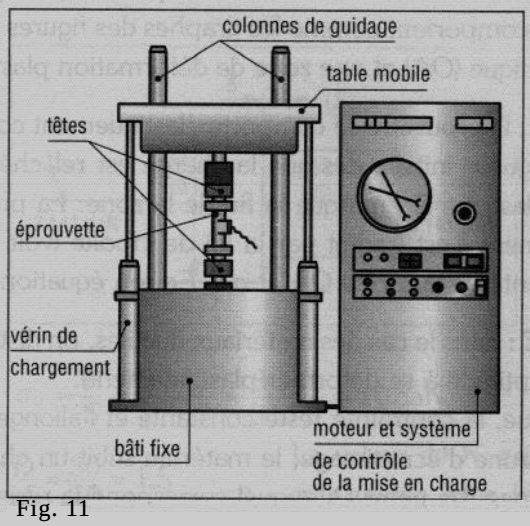


Fig. 11

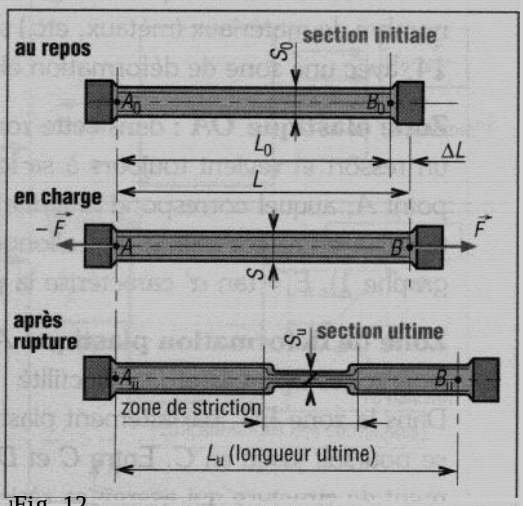


Fig. 12

Caractéristiques fondamentales définies par l'essai de traction

Limite élastique R_e et Résistance à la rupture R_r

L'allongement pour cent $A\,\%$: $A\,\% = 100\,\dfrac{L_u - L_0}{L_0}$

L_u = longueur ultime entre repères après rupture

L_0 = longueur initiale

Coefficient de striction $Z\,\%$: $Z\,\% = 100\,\dfrac{S_u - S_0}{S_0}$

S_u = section ultime après rupture,

S_0 = section initiale de la partie calibrée de l'éprouvette

Module d'élasticité longitudinale E

Coefficient de Poisson ν

b) Courbes contraintes - déformations

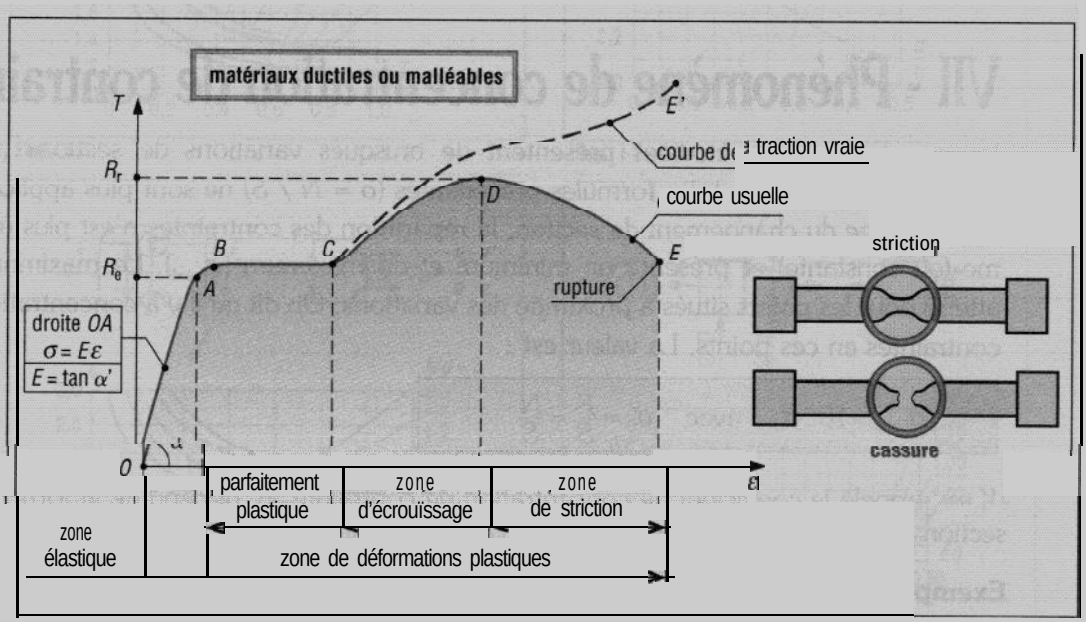


Fig. 13

Les courbes obtenues par essai varient d'un matériau à l'autre. Cependant, un grand nombre de matériaux (métaux, etc.) se comportent comme les graphes des figures 13 et 14, avec une zone de déformation élastique (*OA*) et une zone de déformation plastique.

Zone élastique *OA* : dans cette zone, l'éprouvette se comporte élastiquement comme un ressort et revient toujours à sa longueur initiale dès que la charge est relâchée. Le point A, auquel correspond la limite élastique R_e, marque la fin de la zone. La proportionalité entre contrainte σ et allongement ε est traduit par la loi de Hooke (voir paragraphe 1). E = tan a' caractérise la pente de la droite *OA* et $\sigma = E\varepsilon$ son équation.

Zone de déformation plastique AE : dans le cas des matériaux ductiles, on distingue trois zones BC, CD et *DE* (ductilité : aptitude à se déformer plastiquement).
Dans la zone BC, parfaitement plastique, la contrainte reste constante et l'allongement se poursuit jusqu'en C. Entre C et *D*, zone d'écrouissage, le matériau subit un changement de structure qui accroît sa résistance. Le point *D*, auquel correspond la résistance à la rupture R_r marque la fin de la zone.
Entre *D* et *E*, l'éprouvette subit une striction amenant une diminution de la section avec étranglement. La rupture se produit en *E*.

Remarque : dans le cas des matériaux fragiles (fig. **14**), il n'y a ni zone parfaitement plastique BC, ni zone de striction *DE*. De plus, pour ces matériaux, *A %* et Z % sont beaucoup plus petits.

La courbe de traction vraie (fig. **13**) 0, *A*, *B*, C, *E'* prend en compte la section réelle S de l'éprouvette, à la place de la section initiale S_0 pour la courbe usuelle.

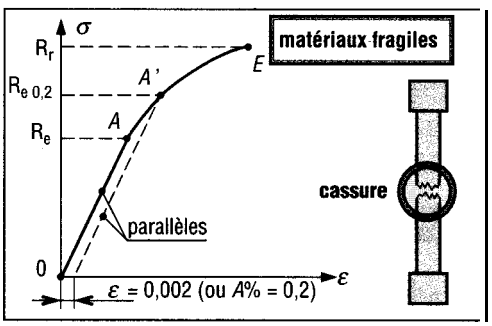


Fig. 14

Dans certains cas, lorsque R_e est difficile à définir, on utilise $R_{e0,2}$ pour le remplacer. Lorsque $\sigma = R_{e0,2}$, l'éprouvette s'est allongée de 0,2 % **(fig. 14)**.

VII - Phénomène de concentration de contrainte

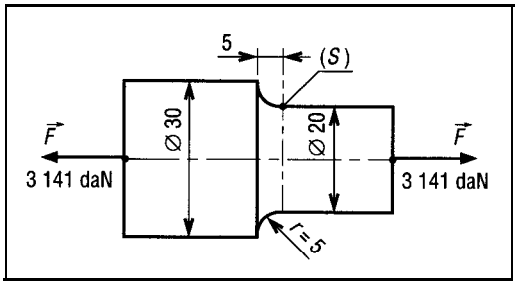
Lorsque les poutres étudiées présentent de brusques variations de sections (trous, gorges, épaulements.. .), les formules précédentes ($\sigma = N / S$) ne sont plus applicables. Au voisinage du changement de section, la répartition des contraintes n'est plus uniforme (ou constante) et présente un minimum et un maximum (σ_{maxi}). Le maximum est atteint pour les points situés à proximité des variations. On dit qu'il y a concentration de contraintes en ces points. La valeur est :

$$\sigma_{maxi} = K_t \cdot \sigma_0 \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{F}{S} = \frac{N}{S}$$

K_t est appelé le coefficient de concentration de contrainte. K_t dépend de la forme de la section et du type de la variation (voir tableaux suivants).

Exemple : Déterminons σ_{maxi} près de l'épaulement, au niveau de la section S, pour la pièce proposée.

Résolution



$$\sigma_0 \frac{3}{S} \frac{F}{-} \frac{B141}{\pi . 10^2} \frac{4}{\equiv} \frac{1}{314,1} = 10 \text{ daN.mm}^{-2}$$

$\frac{D}{d} = \frac{30}{20} = 1,5$ $\Rightarrow$ La valeur de K_t est déterminée avec le graphe indiqué.

$\frac{r}{d} = \frac{5}{20} = 0,25$ $K_t = 1,5$

La contrainte est maximale à la périphérie de S, pour toute la circonférence de 0 20 et a pour valeur :

$\sigma_{maxi} = K_t \, . \, \sigma_0 = 1,5.10 = 15 \text{ daN.mm}^{-2}$

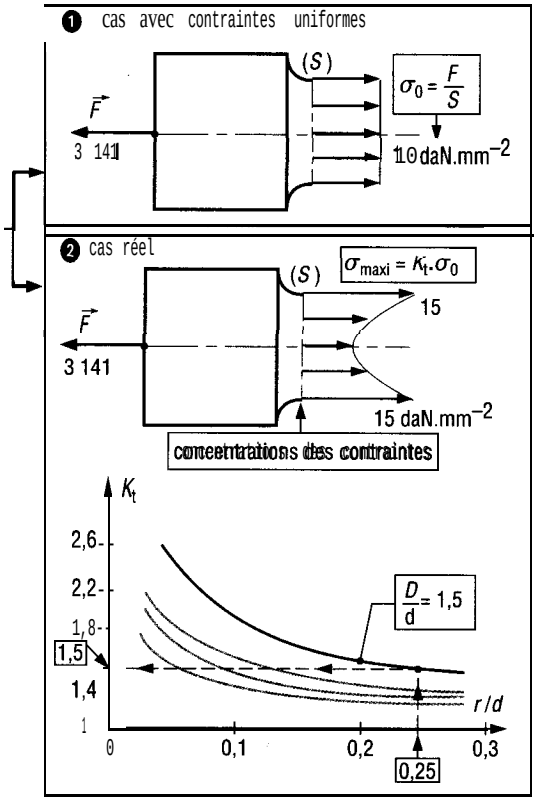


Fig. 15

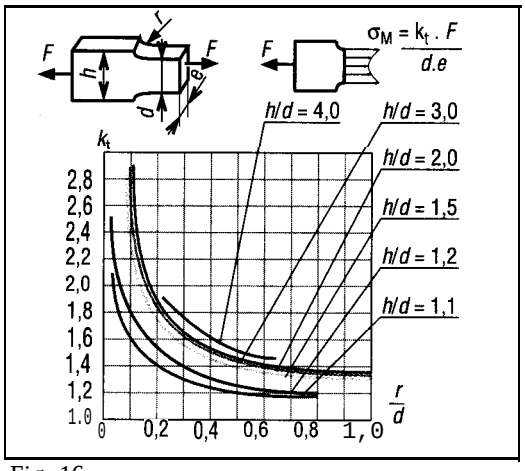


Fig. 16

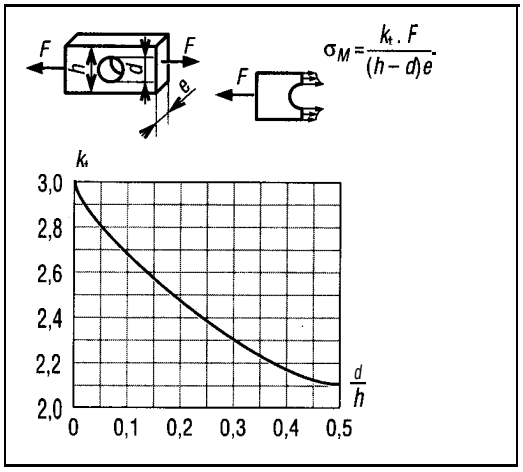


Fig. 17

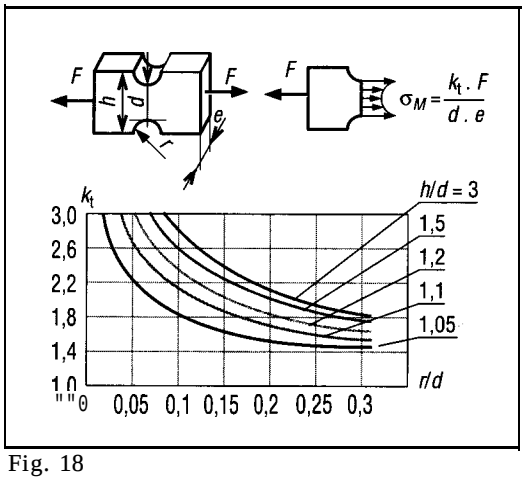


Fig. 18

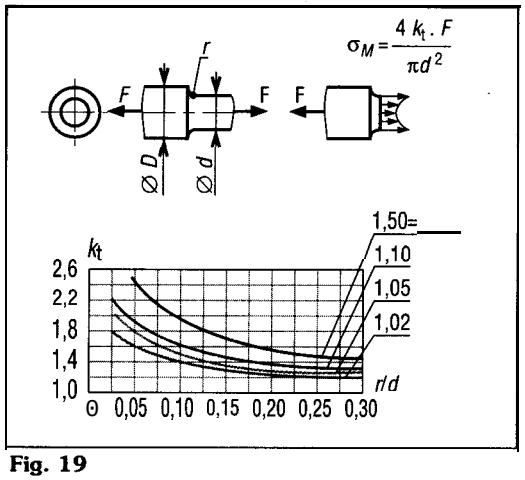


Fig. 19

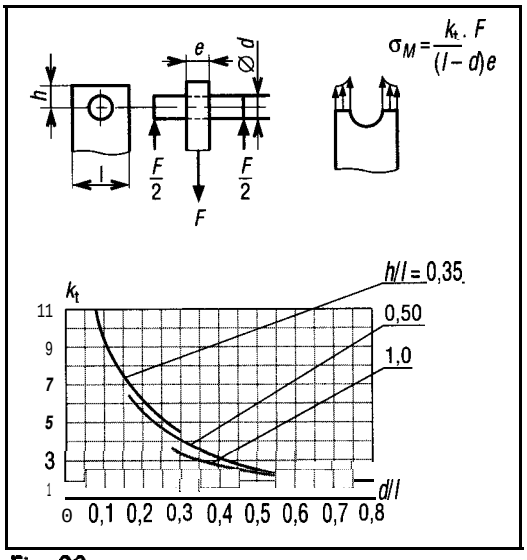


Fig. 20

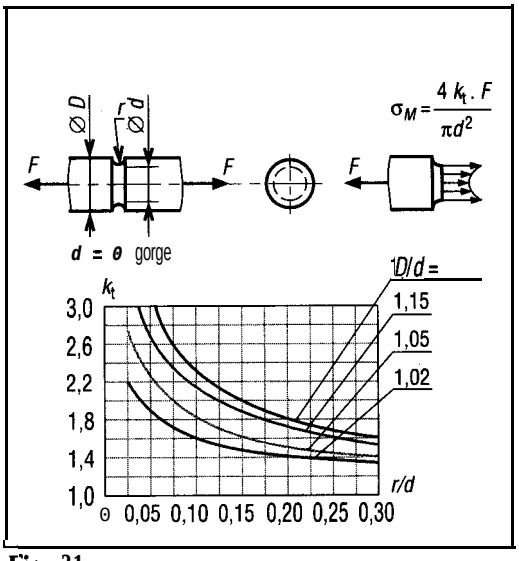


Fig. 21

VIII • Contraintes et déformations d'origine thermique

Un changement de température engendre une modification des dimensions des poutres. Si la température augmente, la poutre en général s'allonge (dilatation) et inversement (contraction). Le plus souvent, les dilatations ou contractions varient linéairement avec la température et suivent la loi :

$$\Delta L = \alpha_L . L . \Delta T$$

$$\varepsilon = \alpha_L . \Delta T$$

ΔL : allongement de la poutre (m)
L : longueur de la poutre (m)
AT : accroissement de température (K, °C)
α_L : coefficient de dilatation linéique ($°C^{-1}$, K^{-1})

Exemple : une barre en cuivre de 1 m, à 20 °C, est chauffée jusqu'à 200 "C. Déterminons sa longueur finale.

AL = $(16{,}6 \times 10^{-6}) \times 1000 \times (200 - 20) \simeq 3$ mm

$L = 1000 + 3 = 1003$ mm

Exemples de valeurs de α_L (10^{-6} mm.°C)

Aluminium	25,0	Acier inox	17,3	Polyéthylène	
Magnésium	23,0	Invar (Fe + 36 % Ni)	1,5	avec 33 % fibres de verre	48,0
Cuivre	16,0	Fontes (FGL)	12,0	Polystyrène	70,0
Fer	12,0	Laiton	18,9	Al_2O_3	6,7
Nickel	13,0	Epoxyde	55,0	ZrO_2 stabilisé	10,6
Plomb	29,0	Nylon 6-6	80,0	SiC	4,3
Silicium	3,0	Nylon 6-6 avec		Si_3N_4	3,3
Tungstène	4,5	33 % fibres de verre	20,0	Granite	8,7
Zinc	30,0			Grès	17,1
Acier	12,0	Polyéthylène	100,0	Verre	9,0

IX - Systèmes hyperstatiques

Le plus souvent, les actions aux appuis et les efforts intérieurs sont déterminés à partir de l'application du principe fondamental de la statique. Cependant, dans un certain nombre de cas, la statique seule ne suffit pas car le nombre des inconnues est trop élevé.
Les problèmes sont dits hyperstatiques ou statiquement indéterminés.
Les résolutions sont possibles grâce à des équations supplémentaires écrites à partir des déformations du dispositif.

Exemple

Une barre est fixée en A et B sur un support rigide (bâti) supposé indéformable (L = constante).
La barre supporte en C une charge verticale F.
Déterminons les actions exercées par les appuis en A (F_A) et en B (F_B).

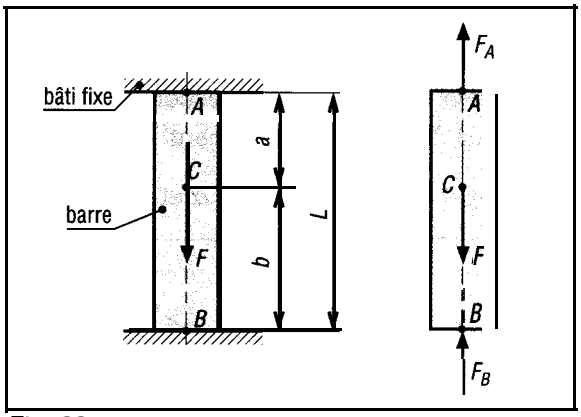


Fig. 22

Résolution

Le principe fondamental de la statique donne une seule équation :

$$F_A + F_B = F \qquad (1)$$

On ne dispose que d'une équation pour deux inconnues F_A et F_B, le système est dit hyperstatique d'ordre 1.
Écrivons une équation supplémentaire à partir des déformations en remarquant que l'allongement total de la poutre est nul.

$\Delta L_{AB} = \Delta L_{AC} + \Delta L_{CB} = 0$

ΔL_{AC} est l'allongement (positif) du tronçon AC et ΔL_{CB} le raccourcissement (négatif) du tronçon CB.

$\sigma = F / S = E\varepsilon = E\,(\Delta L / L)$ donne $\Delta L = (F\,L / E\,S)$

$$\Delta L_{AC} + \Delta L_{CB} = \frac{F_A \cdot L_{AC}}{E\,S} - \frac{F_B \cdot L_{CB}}{E\,S} = \frac{F_A \cdot a}{E\,S} - \frac{F_B \cdot b}{E\,S} = 0$$

d'où : $F_A \cdot a - F_B \cdot b = 0 \qquad (2)$

La combinaison des équations (1) et (2) donne :

$$F_A = \frac{F\,b}{a+b} \quad \text{et} \quad F_B = \frac{F\,a}{a+b}$$

X - Contraintes dans une section inclinée

Déterminons les contraintes exercées dans une section inclinée de l'angle a, $\vec{n}$ est la normale à la coupure et $\vec{t}$ appartient au plan de celle-ci.

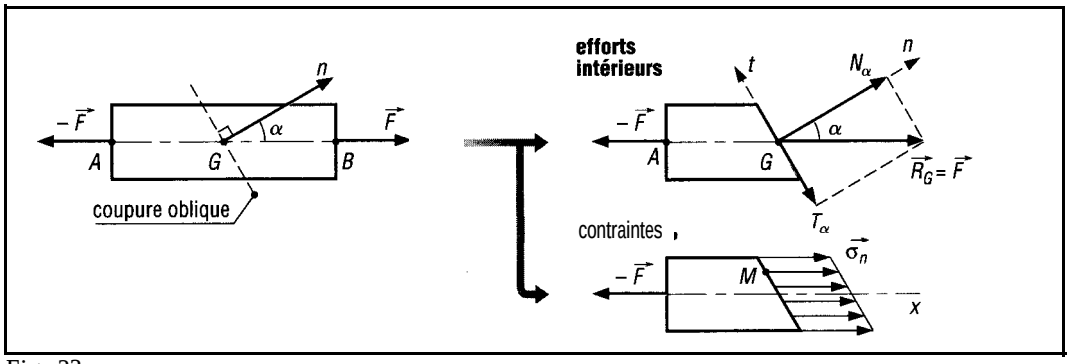


Fig. 23

L'équilibre statique du tronçon AG montre que les efforts intérieurs se réduisent à $\vec{R}_G = \vec{F}$ en G barycentre de la section inclinée. En projetant $\vec{R}_G$ sur n et t, on obtient l'effort normal N_α et l'effort tranchant T_α dans la coupure :

$N_\alpha = R_G \cos a = F \cos a$ et $T_\alpha = R_G \sin a = F \sin a$.

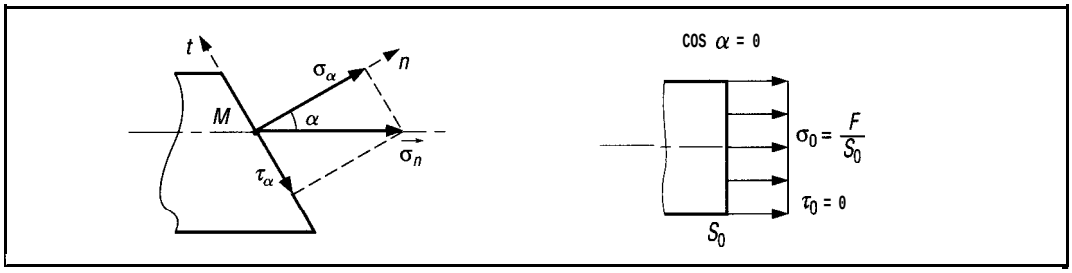


Fig. 24

Les contraintes $\vec{\sigma}_n$ dans la section sont identiques en tout point et parallèles à l'axe (x) de la poutre. En projetant $\vec{\sigma}_n$ sur n et t, on obtient la contrainte normale à la coupure σ_α et tangentielle τ_α. En remarquant que $S_0 = S \cos a$ (S_0 = aire de la section droite et S = aire de la section inclinée) et que $\sigma_0 = F/S_0$:

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{S} = \frac{N_\alpha}{S_0}\cos\alpha = \frac{F}{S_0}\cos^2\alpha = \sigma_0\cos^2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{T_\alpha}{S} = \frac{F\sin\alpha\cos\alpha}{S_0} = \sigma_0\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha$$
$$\tau_\alpha = \sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha$$

σ_α est maximale pour a = 0 ($\sigma_{\alpha\ maxi} = \sigma_0$)
et τ_α est maximale pour a = 45° ($\tau_{\alpha\ maxi} = {}^1/_2\ \sigma_0$).

Remarques : lorsque les matériaux ont une résistance au cisaillement plus faible, la rupture par traction ou compression se produit dans un plan incliné à 45°, plan ou les contraintes de cisaillement τ_α sont maximales.

En revanche, si la résistance en traction est proportionnellement plus faible, la rupture a lieu dans une section droite (a = 0).

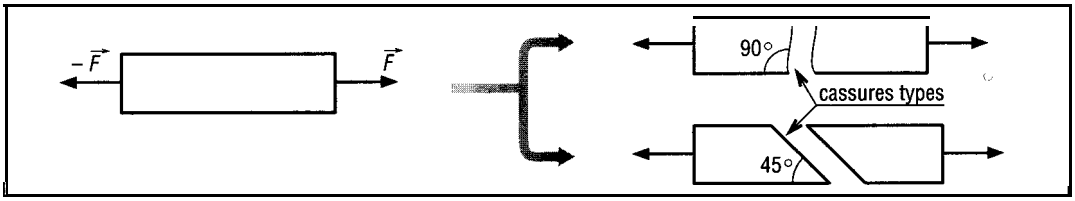


Fig. 25

EXERCICES À RÉSOUDRE

1 Le tableau ci-dessous récapitule les résultats d'un essai de traction effectué sur une éprouvette en acier à haute teneur en carbone traité thermiquement. F est la charge sur l'éprouvette et ΔL son allongement :

F (kN)	0	51,8	72	93,2	109	141,6	149,6	161	170
ΔL (mm)	0	0,0255	0,035	0,046	0,0535	0,076	0,101	0,152	0,203
F (kN)	177,2	186,8	197,6	214,4	227	235	242	246,6	rupture
ΔL (mm)	0,254	0,355	0,508	0,762	1,016	1,270	1,524	1,780	

Le diamètre initial de l'éprouvette est de 17,68 mm, le diamètre ultime de 16,41 mm, la longueur testée de 25 mm et la longueur ultime 26,75 mm.

a) Tracer le graphe contrainte σ - déformation ε.

b) En déduire R_r, R_e, E, A % et Z %.

Réponse

$R_r = 1000\ N.mm^{-2}$; $R_e = 570\ N.mm^{-2}$; $E \simeq 200$ GPa ; $A\ \% = 7$; $Z\ \% = 13,85$.

2 Reprendre l'exercice 1 avec une éprouvette en alliage d'aluminium ; diamètre initial 17,82 mm ; diamètre ultime 15,93 mm ; longueur testée 250 mm ; longueur ultime 316,5 mm et résultats d'essai :

F (kN)	0	14,94	18,06	23,4	28,46	31,68	34,16	35,06	37,36
ΔL (mm)	0	0,2	0,25	0,50	1,00	1,50	2,05	2,55	3,80
F (kN)	38,44	42,08	45,28	49,90	56,04	58,72	60,86	63,08	65,12
ΔL (mm)	3,80	7,60	10,15	15,25	30,50	40,65	50,80	60,95	69,60

3 Reprendre l'exercice 1 avec une éprouvette en alliage de magnésium ; diamètre initial 12 mm ; diamètre ultime 11,74 mm ; longueur initiale 30,000 mm ; longueur ultime 32,61 mm et résultats d'essai (L = longueur de l'éprouvette) :

F (kN)	0	5	10	15	20	25	26,5	27	26,5	25
L (mm)	30,000	30,030	30,059	30,089	30,15	30,51	30,90	31,50	32,10	32,79

4 Deux tronçons (1) et (2) en matière plastique sont collés comme l'indique la figure. La résistance à la rupture par traction de la colle est de 235 da $N.cm^{-2}$ pour des températures variant de - 60 °C à 120 °C. Si la section collée est rectangulaire (50 x 70 mm), déterminer l'effort de traction admissible par le joint collé.

Réponse

8 225daN.

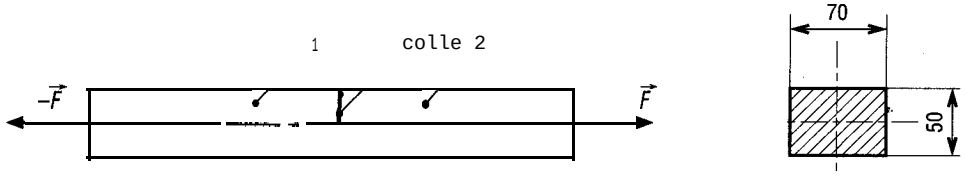


Fig. 26

5 Reprendre l'exercice 4 avec la section circulaire creuse proposée.

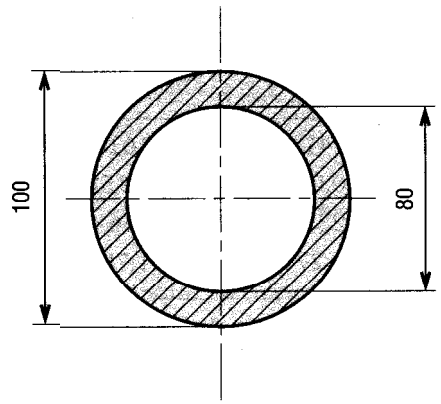


Fig. 27

❑ Une chaîne se compose d'une suite de maillons soudés les uns derrière les autres. La limite à la rupture de l'acier utilisé est de 63 daN.mm^{-2}. Déterminer la force d'extension maximale F que peut supporter la chaîne si le coefficient de sécurité adopté est de 5.

Réponse

☞ = 7 917 daN.

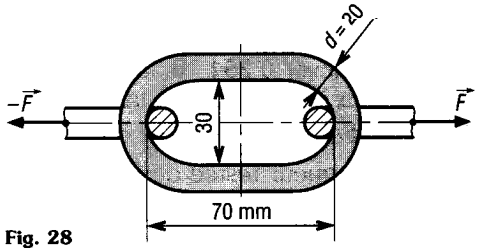


Fig. 28

7 Une poutre tubulaire (diamètre extérieur 400 mm, épaisseur e) en acier (limite à la rupture R_r = 380 MPa ; limite élastique R_e = 240 MPa), appartenant à la charpente métallique du Centre Pompidou à Paris, supporte un effort de traction de 400 kN. Le coefficient de sécurité adopté, par rapport à R_e, est égal à 6. a) Déterminer l'épaisseur e minimale admissible pour la construction. b) La longueur de la partie tubulaire de la poutre est de 3,5 m ; déterminer son allongement si E = 200 GPa.

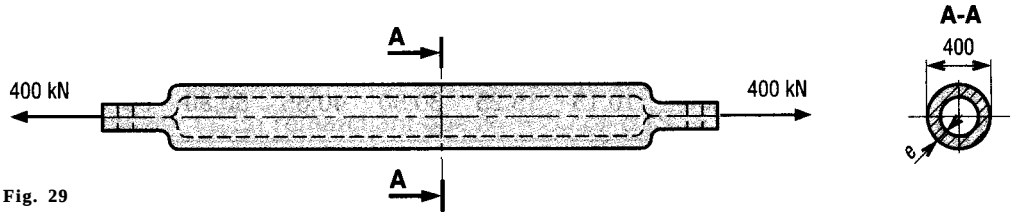


Fig. 29

❑ Le fer H, repéré 1 sur la figure, support un effort de compression de 50 000 daN. Le fer est soudé sur un plat carré en acier de côté b repéré 2. L'ensemble repose sur un support circulaire 3 en béton de diamètre d posé à même le sol. a) Calculer la section du fer H si la contrainte admissible de l'acier est de 10 daN.mm^{-2}. b) Déterminer le côté b du carré 2 si la contrainte admissible en compression du béton est de 0,4 daN.mm^{-2}. c) Calculer le diamètre d du socle 3 si la contrainte admissible à l'écrasement du sol est de 2,5 daN.cm^{-2}.

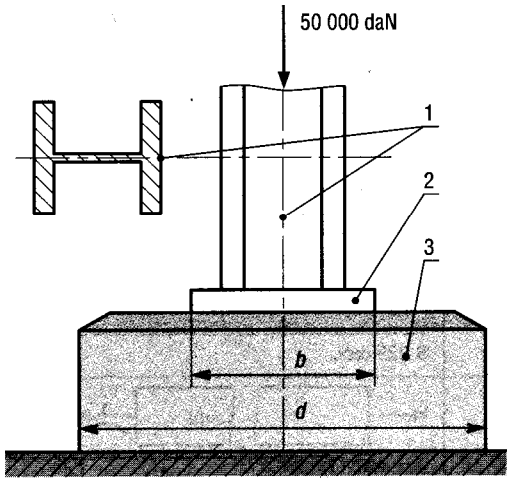


Fig. 30

9 L'appareil proposé est utilisé pour la rééducation des muscles. Il se compose de deux brides 1 et 2, supposées indéformables, liées par cinq sandows 3, 3', 4, 4' et 5. Le sandow 5 a pour longueur L_0, les sandows 4 et 4' ont pour longueur $1{,}1\,L_0$ et les sandows 3 et 3' $1{,}2\,L_0$. Les sandows ont tous la même section S = 200 mm², lesdéformations sont élastiques.

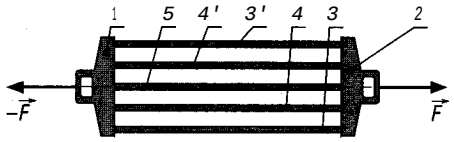


Fig. 31

a) Déterminer l'intensité des efforts $\vec{F_5}$, $\vec{F_4}$ et $\vec{F_3}$ appliqués dans chaque sandow lorsque la longueur commune des cinq sandows est égale à $1{,}5\,L_0$. On donne $E_{caoutchouc} = 0{,}75$ N.mm^{-2}. b) En déduire l'effort total $\vec{F}$ à exercer sur les poignées pour maintenir l'appareil en équilibre.

Réponse

$F_5 = 75$ N ; $F_4 = 54{,}55$ N ; $F_3 = 37{,}5$ N ; $F = 259{,}1$ N.

❑ Un bloc de béton est testé en compression diamètre initial 100,000 mm ; diamètre final 100,007 ; longueur initiale 200,00 mm, longueur finale 199,88 m m ; charge d'essai F = 118 kN. Déterminer E et le coefficient de Poisson.

Réponse

$E = 25$ kN.mm^{-2} ; $\nu = 0{,}116$.

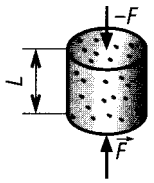


Fig. 32

❑ Une barre en fonte, E = 100 GPa, $\nu = 0{,}3$, supporte une charge de compression de 140 kN. Déterminer le raccourcissement de la longueur, l'augmentation du diamètre et la diminution du volume.

Réponse

$\Delta L = -0{,}1426$; $\Delta d = 0{,}0107$; $\Delta V = 112$ mm³.

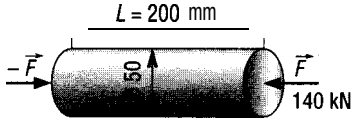


Fig. 34

❑ Pour contrôler la charge d'un avion, on place des jauges de contrainte sur le train d'atterrissage. Une jauge collée sur un pied de forme tubulaire donne les indications : $\varepsilon_1 = 0{,}000\,68$ en position déchargée et $\varepsilon_2 = 0{,}001\,36$ en charge. Déterminer la charge supplémentaire si $D = 200$ mm, $d' = 188$ mm et $E = 75$ GPa.

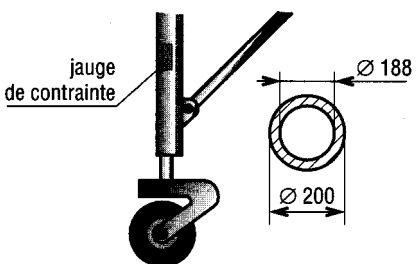


Fig. 33

❑ Une tige en acier, de diamètre 12,5 mm et de longueur 1 m, supporte une charge de traction de 1 500 daN. a) Déterminer la contrainte et l'allongement dans la tige si $E = 200$ GPa. b) La tige en acier est remplacée par une autre en aluminium (même longueur). Quel doit être le diamètre d pour que les allongements des deux tiges soient identiques ($E_{alu} = 75$ GPa). c) En déduire la contrainte dans la tige en aluminium. d) Si la masse volumique de l'acier est de 7 800 kg.m^{-3} et celle de l'aluminium de 2 500 kg.m^{-3}, déterminer le rapport des masses des deux tiges.

Réponse

$\sigma_1 = 122$ N.mm^{-2} ; $\Delta L = 0{,}61$ mm ; $d_2 = 20{,}4$ mm ;
$\sigma_2 = 45{,}8$ N.mm^{-2} ; $m_1/m_2 \simeq 1{,}17$.

❑ Un plat (60 x 10) comporte un rétrécissement de rayon r = 10 mm et un trou de diamètre d = 8 mm. Si la force de traction F = 1 000 daN, déterminer les contraintes maximales au niveau du rétrécissement (σ_r) et au niveau du trou (σ_t).

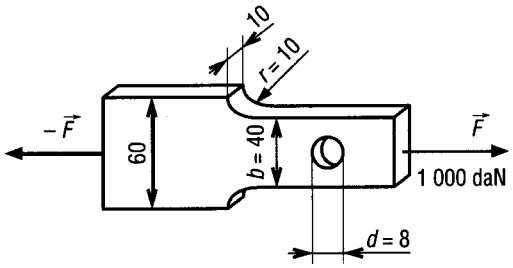


Fig. 35

Réponse

σ_r = 41,2 MPa ; σ_t = 76,6 MPa.

15 Reprendre l'exercice 14 avec d = 12 et r = 6. Si la contrainte admissible en traction est de 100 MPa, déterminer la charge F maximale tolérable.

16 Pour le plat proposé avec trou et rétrécissement, déterminer les contraintes maximales engendrées si la force de traction F = 1 000 daN.

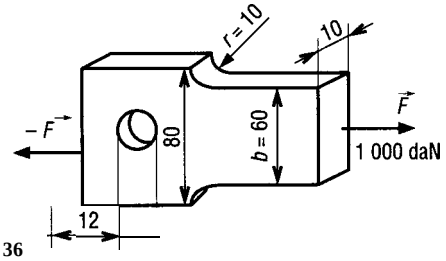


Fig. 36

Réponse

σ_t = 37,5 MPa rétrécissement σ_r = 30 MPa.

❑ Reprendre l'exercice 16 avec d = 8 et r = 20. Pour quelle valeur de r les contraintes au niveau du trou et du rétrécissement sont-elles égales ($\sigma_t = \sigma_r$) ?

18 Une éprouvette en aluminium (E = 70 GPa), symétrique, est utilisée pour un essai de traction. a) Si la limite élastique du matériau est de 200 MPa, déterminer la charge F limite correspondante et l'allongement.
b) Comparer avec une barre de section constante 60 x 10.

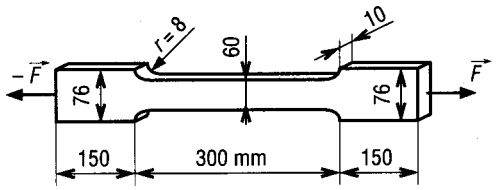


Fig. 37

19 Une transmission est construite à partir de trois fers plats de 6,5 mm d'épaisseur, de 32 mm de largeur et de 800 mm de longueur. Au moment de l'assemblage, il apparaît que la barre centrale mesure exactement 0,75 mm de moins que les deux autres barres. Déterminer la contrainte dans chaque barre après assemblage (E = 20 000 daN.mm^{-2}). On suppose qu'aucune charge extérieure n'est appliquée à l'ensemble monté.

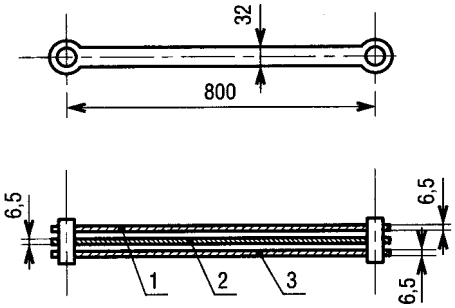


Fig. 38

Réponse

$\sigma_1 = \sigma_3$ = 6,25 daN.mm^{-2} ; σ_2 = 12,5 daN.mm^{-2} **(problème** hyperstatique).

20 Une poutre en béton est renforcée avec 4 fers en acier de diamètre d inconnu. La poutre est rectangulaire (ZOO x 220). La contrainte admissible en compression du béton est de 7 $N.mm^{-2}$ (E_b = 1400 $daN.mm^{-2}$) ; celle de l'acier est de 150 $N.mm^{-2}$ (E_a = 20 000 $daN.mm^{-2}$). Si la poutre doit supporter une charge de compression F = 50 000 daN, déterminer le diamètre d des fers.

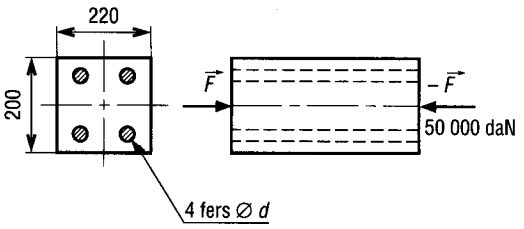


Fig. 39

❑ Le montage d'essai proposé se compose de deux barres 1 et 3 en bronze de même section (S_1 = S_3 = 9,35 cm^2) et d'une barre 2 en acier (S_2 = 6,25 cm^2). La barre 2 mesure 250 mm et les barres 1 et 3 mesurent 250,3 mm, On applique la charge de compression F de 30 000 daN sur le bloc 4 suppose parfaitement indéformable. a) Déterminer les contraintes dans les trois barres après chargement. b) Déterminer le raccourcissement des barres.

E_{bronze} = 105 GPa ; E_{acier} = 200 GPa.

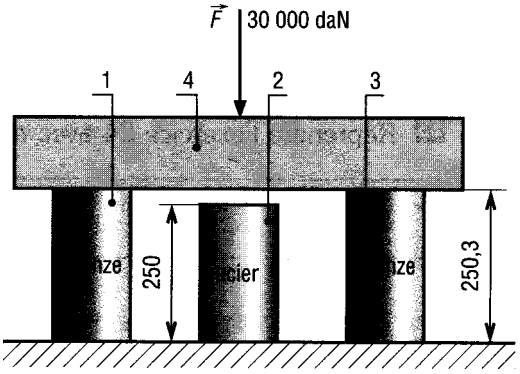


Fig. 40

Réponse

$\sigma_1 = \sigma_3$ = 14,7 $daN.mm^{-2}$;
σ_2 = 4,03 $daN.mm^{-2}$;
$\Delta L_1 = \Delta L_3$ = 0,35 mm ; ΔL_2 = 0,05 mm.

22 Deux barres de même diamètre (30 mm) sont assemblées comme l'indique la figure. Le jeu au montage est de 0,2 mm à la température ambiante. La barre 1 est en cuivre (α_C = 16,6 x $10^{-6}/°C$; L_C = 50 mm ; E = 105 GPa) et la barre 2 en aluminium (a, = 25 x $10^{-6}/°C$; L_a = 100 ; E_a = 75 GPa). a) À partir de quel accroissement de température le jeu s'annule-t-il ? b) Si la température croît de 150 °C, déterminer les contraintes et les rétrécissements des barres.

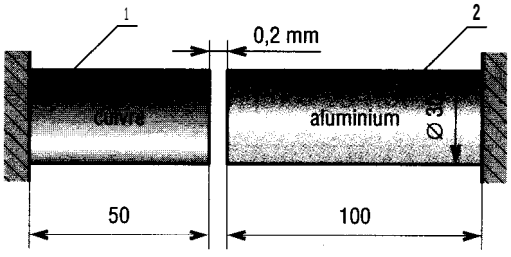


Fig. 41

Réponse

AT= 60°C; $\sigma_1 = \sigma_2$ = 166 $N.mm^{-2}$;
ΔL_a = 0,221 ; ΔL_C = 0,079.

❑ Le dispositif de l'exercice 22 est utilisé comme système de contrôle thermique, le cuivre est remplacé par du laiton (E_L = 103 GPa ; L_L = 20 ; section 50 mm² ; α_L = 19,1 x 10^{-6}/°C) et l'aluminium par du magnésium (E_m = 45 GPa ; L_m = 30 ; section 100 mm² ; a,,, = 26,1 x 10^{-6}/°C). Reprendre les mêmes questions si le jeu initial est de 0,1 mm.

❑ Deux poutres en bois de section rectangulaire (a x b) sont collées comme l'indique la figure, a = 30" ; a = 100 mm ; b = 60 mm. Si la charge de traction supportée est F = 1 000 daN, déterminer les contraintes normales et tangentielles dans le joint collé.

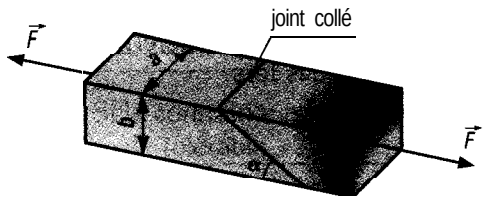


Fig. 42

❑ Reprendre l'exercice 24 avec a = 65" ; a = 120 ; b = 80 et F = 400 daN.

Réponse

σ_α = 0,342 N.mm^{-2} ; τ_α = 0,160 N.mm^{-2}.

❑ Reprendre l'exercice 24 avec a = 120 ; b = 80 et F = 960 daN. On impose les contraintes admissibles σ_a = 1,1 MPa et τ_a = 1,4 MPa dans le joint collé.
Quels sont les coefficients de sécurité de l'assemblage pour a = 20" ; a = 35" ; a = 45" et le mode de rupture aux charges élevées ?

Réponse

S_{20} = 4,35 (cisaillement) ; S_{35} = 2,98 (cisaillement) ; S_{45} = 2,2 (traction).

❑ Un tube de 400 mm de diamètre est réalisé à partir d'une tôle d'épaisseur e = 6 mm soudée en hélice (angle d'hélice = 22"). Déterminer les contraintes normale et tangentielle dans le cordon si l'effort de compression supporté par le tube est F = 300 kN.

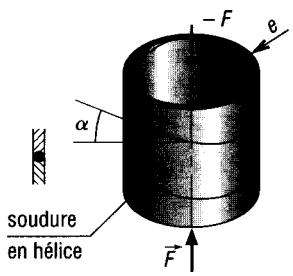


Fig. 43

28 Reprendre l'exercice 27, les contraintes admissibles par le matériau du cordon sont σ_a = 165 MPa et τ_a = 110 MPa. Déterminer la charge maximale (F_{maxi}) supportable.

22 CISAILLEMENT

OBJECTIFS

- Définir l'effort tranchant T, la contrainte de cisaillement τ, l'angle de glissement γ, le module d'élasticité transversal G et la loi liant τ avec γ.
- Donner quelques applications usuelles du cisaillement.

1 • Définition • Exemples

L'étude du cisaillement ressemble à celle de la traction (formules analogues, etc.).

Exemple 1

Une cisaille hydraulique est utilisée pour couper des ronds, fers et plats de petites dimensions. Elle se compose d'un bâti (0), d'un coulisseau (4) en liaison glissière par rapport au bâti (translation verticale), d'une lame fie (2), d'une lame mobile (1) (liée au coulisseau) et d'un vérin hydraulique fournissant l'effort de coupe (5).

Les efforts de cisaillement $\overrightarrow{A_{1/3}}$ et $\overrightarrow{B_{2/3}}$ exercés par les lames sont perpendiculaires à la poutre (3). Le cisaillement du rond se traduit par le glissement de la section droite S_1 par rapport à la section droite S_2 qui lui est directement en contact (fig. 2).

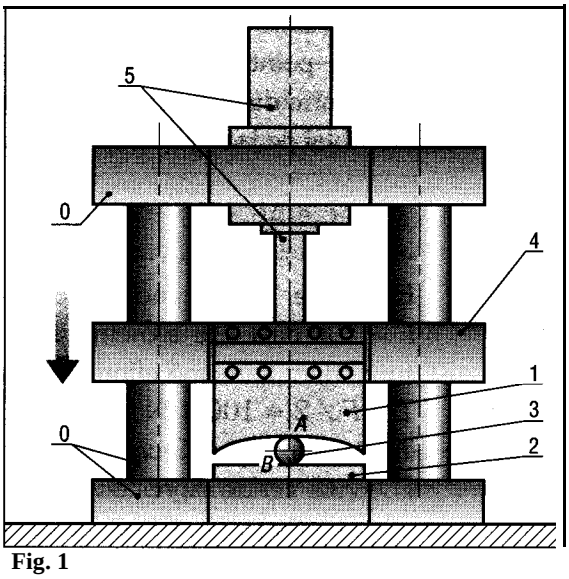


Fig. 1

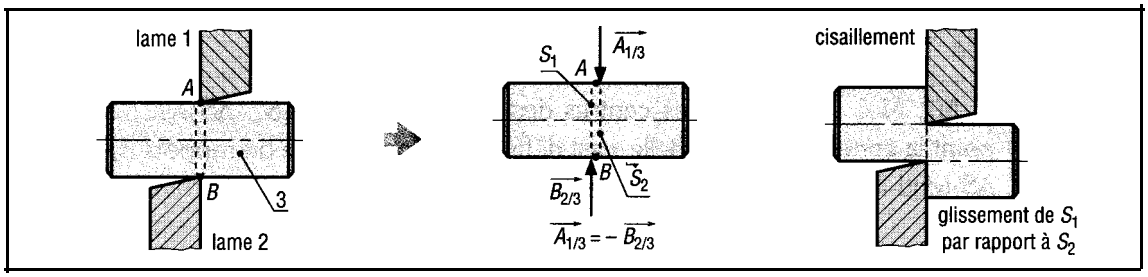


Fig. 2

Exemple 2

Trois blocs de bois identiques (1), (2) et (3), de forme parallélépipédique, sont collés en chape comme l'indique la figure. L'assemblage supporte une charge $\vec{F}$ suivant son axe de symétrie. Les deux faces collées $ABCD$ et A'B'C'D', de même aire, sont soumises à un cisaillement de même nature que celui de l'exemple 1.

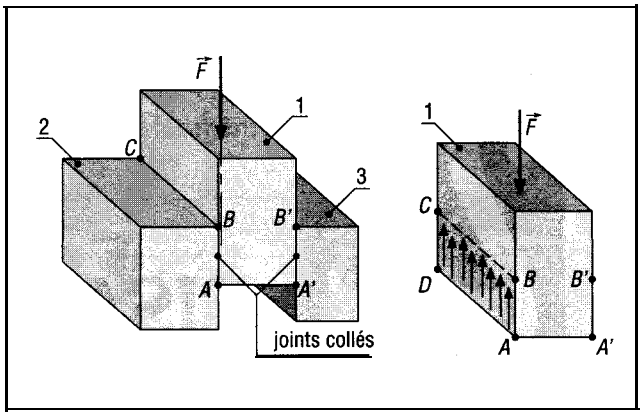


Fig. 3

II - Effort tranchant T

Pour l'exemple 1 du paragraphe 1, les actions exercées par S_2 sur S_1 sont schématisées par une infinité de petites forces $\overrightarrow{\Delta f_1}, \overrightarrow{\Delta f_2}, \ldots, \overrightarrow{\Delta f_n}$ agissant sur les surfaces élémentaires ΔS_1, AS,, . . . AS, et telles que :

S_1 = AS, + AS, + .., + AS,,.

$\vec{T}$, résultante des actions précédentes, point d'application G le barycentre de la section S_1, est égal et opposé à $\vec{A}_{S}$ (par application du principe fondamental de la statique).

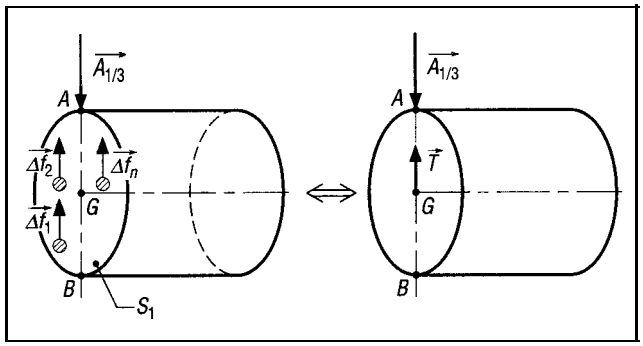


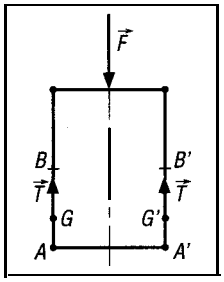
Fig. 4

$$\vec{T} = \overrightarrow{\Delta f_1} + \overrightarrow{\Delta f_2} + \ldots + \overrightarrow{\Delta f_n} = -\overrightarrow{A_{1/3}} = \text{effort tranchant}$$

Exemple : reprenons l'exemple 2 du paragraphe 1 avec F = 200 daN. Par symétrie, les faces cisaillées $ABCD$ et A'B'C'D' supportent le même effort tranchant T. L'équilibre du bloc donne :

$T = F / 2 = 100$ daN

T est appliqué en G centre du rectangle $ABCD$ et en G' centre du rectangle A'B'C'D'.



'ig. 5

III - Contrainte de cisaillement τ

Si $M_1, M_2, \ldots . M_n$ sont les centres des petites surfaces AS,, AS,, . . ., AS,, en chaque point la contrainte tangentielle τ est définie comme la limite du rapport Af sur AS lorsque AS tend vers 0 ou devient très petit :

$$\tau_1 = \lim_{\Delta S_1 \to 0}\left(\frac{\Delta f_1}{\Delta S_1}\right) \quad ; \quad \tau_2 = \lim_{\Delta S_2 \to 0}\left(\frac{\Delta f_2}{\Delta S_2}\right) \quad ; \ldots ; \quad \tau_n = \lim_{\Delta S_n \to 0}\left(\frac{\Delta f_n}{\Delta S_n}\right)$$

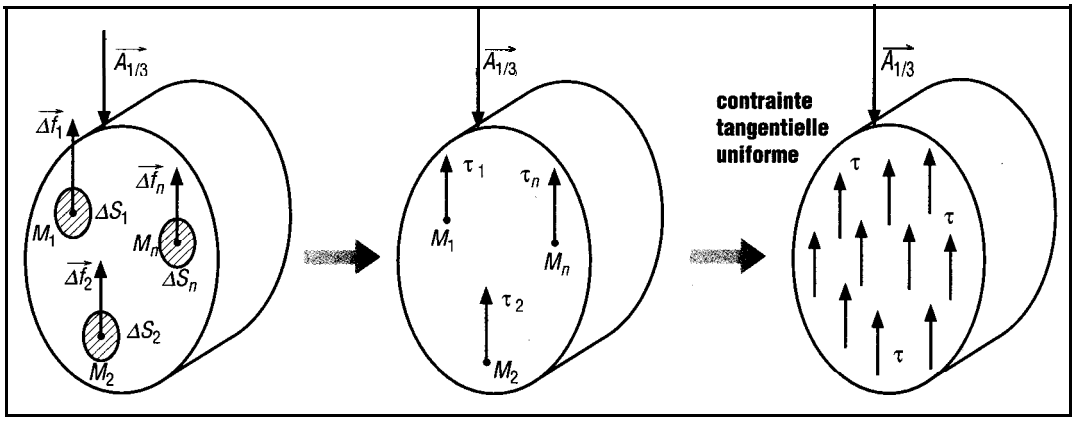


Fig. 6

Remarque : $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ sont contenues dans la section droite, contrairement aux contraintes normales σ qui lui sont perpendiculaires.

Contrainte tangentielle uniforme τ

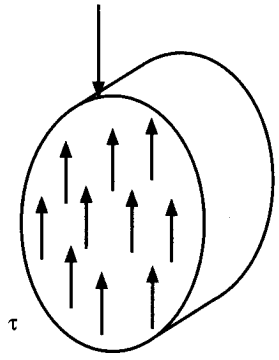


Fig. 7

Dans le cas du cisaillement, on suppose que toutes les contraintes tangentielles sont identiques. Autrement dit, il y a répartition uniforme des contraintes dans la section cisaillée ($\tau = \tau_1 = \tau_2 = \ldots \tau_n$). Il en résulte que :

$$\tau = \frac{T}{S}$$

τ : contrainte tangentielle $N.mm^{-2}$ ou MPa
T : effort tranchant (N)
S : aire de la section droite cisaillée en mm^2

Exemple : reprenons l'exemple 2 du paragraphe I avec F = 200 daN, AB = CD = 3 cm, AD = BC = 10 cm et déterminons la contrainte de cisaillement dans le joint collé.

S = 30 x 100 = 3 000 mm^2 ; $T = \frac{F}{2}$ = 1 000 N

$$\tau = \frac{T}{S} = \frac{1\,000}{3\,000} = 0{,}333 \ N.mm^{-2} = 0{,}333 \ MPa$$

IV - Calcul des constructions

On utilise le même raisonnement qu'en traction, pour la plupart des constructions, sauf pour les cas où la rupture est recherchée, la contrainte tangentielle τ dans la section cisaillée doit toujours être inférieure à. la contrainte admissible au cisaillement du matériau τ_{adm} ou R,,.

$$\tau = \frac{T}{S} \leq \tau_{adm} \text{ ou } R_{pg}$$

avec :

$$\tau_{adm} = R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$$

R_{pg} : résistance pratique au glissement ou au cisaillement
R_{eg} : limite élastique au cisaillement (analogue à R_e)
R_g : limite à la rupture par cisaillement (analogue à R,)
s : coefficient de sécurité.

Remarques : R_{eg} et R_g sont des données obtenues par essais sur les matériaux. Pour la plupart des métaux et alliages, en première approximation :

$$R_g \simeq \frac{R_r}{2} \quad et \quad R_{eg} \simeq \frac{R_e}{2}.$$

τ_{adm} ou R_{pg} peuvent également être définis à partir de R_g (voir chapitre "généralités de la RDM").

Exemple : reprenons l'exemple 2 du paragraphe 1, avec $AB = A'B' = 30$ mm ; BC = B'C' = 100 mm. Si la contrainte admissible au cisaillement dans le joint collé est de 900 kPa, déterminons la charge F maximale supportable.

$S = 30 \times 100 = 3\,000 \text{ mm}^2$; $T = F/2$

$$\tau = \frac{T}{S} = \frac{F}{2S} = \frac{F}{2 \times 3\,000} \leqslant 0{,}9 \text{ N.mm}^{-2}$$

$$F \leqslant 0{,}9 \times 2 \times 3\,000 = 5400\text{N}$$

V - Déformation - Angle de glissement y - Relation entre τ et y

Dans le cas du cisaillement, les déformations sont caractérisées par un glissement des sections droites les unes par rapport aux autres. Le glissement est mesuré par l'angle y (gamma) appelé angle de glissement (unité : radian).

Exemple 1

Un bloc en élastomère est collé entre une plaque rigide et un support fixe. La plaque permet de bien répartir l'effort de cisaillement T sur tout le bloc.

Le cisaillement amène un glissement des sections droites successives les unes par rapport aux autres (analogie avec un jeu de cartes que l'on étale sur une table).

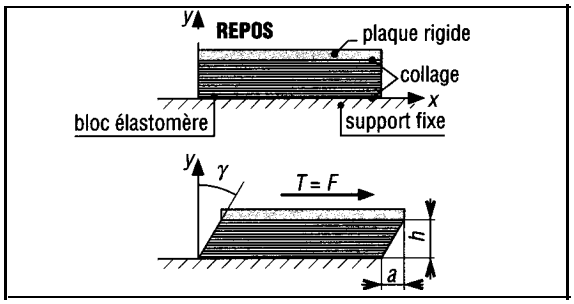


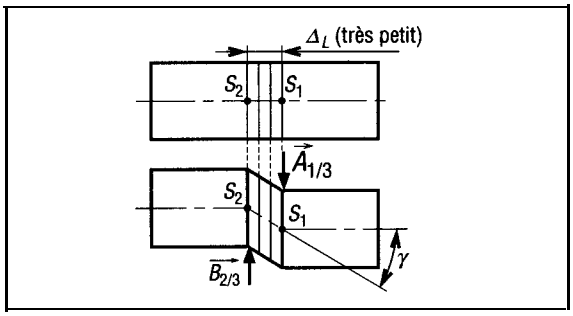
Fig. 8

Le glissement peut être caractérisé par l'angle γ, appelé angle de glissement et tel que tan y= a/h.

Si y est petit : tan y $\simeq$ y = a/h.

Exemple 2

Même raisonnement pour la cisaille du paragraphe 1. Le glissement de la section droite S_1 par rapport à la section droite S_2 peut être défini par un angle de glissement y analogue à celui de l'exemple 1.



ig. 9

Remarque : comme en traction, il existe des déformations élastiques (cas du bloc élastomère) et des déformations plastiques (cas de la cisaille).

Relation entre τ et y

Lorsque les déformations sont élastiques, la contrainte de cisaillement τ est proportionnelle à l'angle de glissement γ.
Autrement dit :

$\tau = G\gamma$

τ : contrainte tangentielle ($N.mm^{-2}$ ou MPa)
y: angle de glissement (radian)
G : module d'élasticité transversal ($N.mm^{-2}$ ou MPa)

r - 1

Remarques : la loi est analogue à la loi de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ avec G constante caractéristique du matériau comme E (pour les métaux G $\simeq 0{,}4$ E).

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

E : module d'élasticité longitudinal
G : module d'élasticité transversal
v : coefficient de Poisson.

Exemple : reprenons l'exemple du bloc élastomère parallélépipédique (c x b x h) avec c = 50, b = 100 mm et G = 800 kPa. Déterminons γ si T = 100 daN et a si h = 25 mm.

$$\tau = \frac{T}{cxb} = \frac{1000}{50x100} = 0{,}2\ N.mm^{-2}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{0{,}2}{0{,}8} = 0{,}25 \text{ rad} = 14{,}3° \quad \text{et} \quad a = h \tan y = 6{,}4 \text{ mm}.$$

VI - Applications

1, Calcul approché des articulations cylindriques

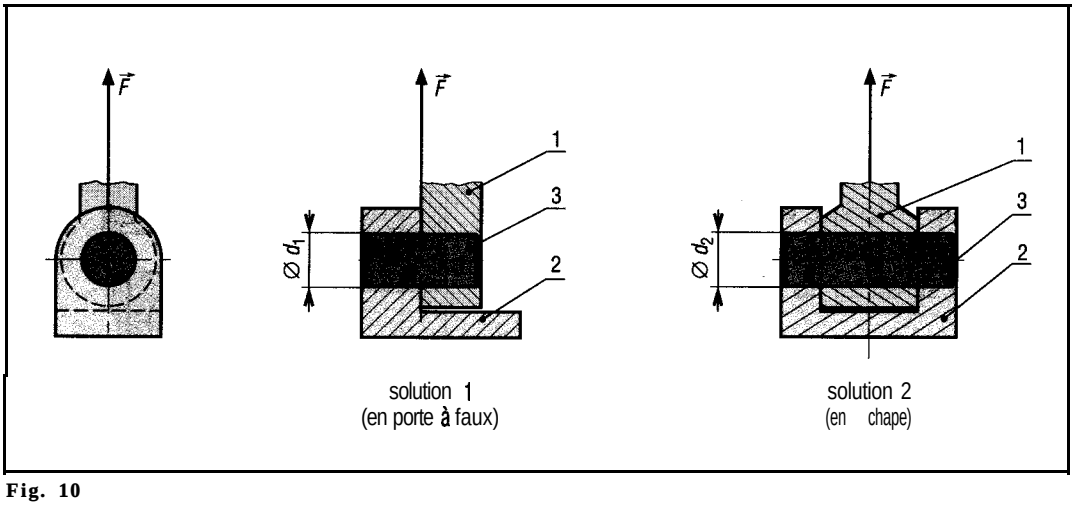


Fig. 10

La liaison pivot entre 1 (tirant) et 2 est réalisée par l'intermédiaire d'un axe cylindrique 3. Dans les deux cas, l'action exercée par le tirant est F = 10 000 daN. Les axes 3 sont réalisés dans le même acier dont la contrainte admissible au- cisaillement est de 5 $daN.mm^{-2}$.

Déterminons et comparons les diamètres d_1 et d_2 des deux solutions.

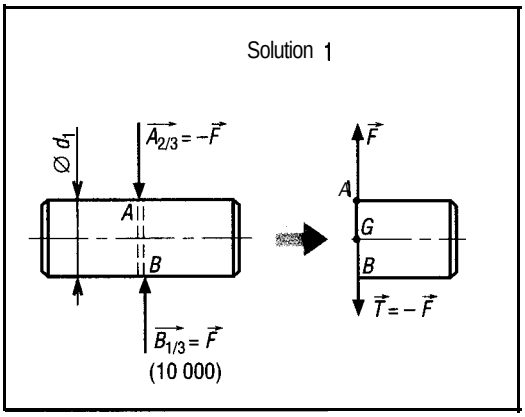


Fig. 11

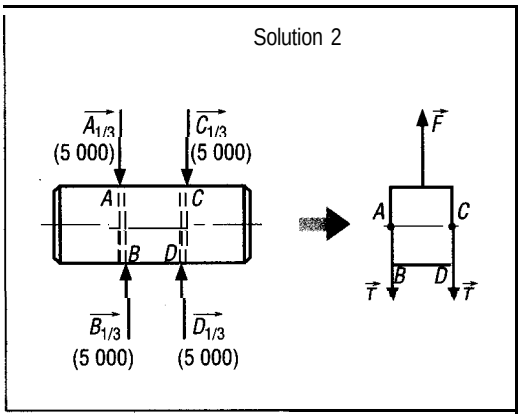


Fig. 12

$$T = F = 10\,000 \text{ daN}$$

$$\tau = \frac{T}{S} = \frac{10\,000}{\left(\frac{\pi d_1^2}{4}\right)} \leqslant R_{pg} = 5 \text{ daN.mm}^{-2}$$

$$d_1^2 \geqslant \sqrt{\frac{10\,000 \times 4}{5\pi}}$$

$$d_1 \geqslant 50{,}5 \text{ mm}$$

$$T = \frac{F}{2} = 5\,000 \text{ daN}$$

$$\tau = \frac{T}{S} = \frac{5\,000}{\left(\frac{\pi d_2^2}{4}\right)} \leqslant R_{pg} = 5 \text{ daN.mm}^{-2}$$

$$d_2^2 \geqslant \sqrt{\frac{5\,000 \times 4}{5\pi}}$$

$$d_2 \geqslant 35{,}7 \text{ mm}$$

Remarques : $\frac{d_1}{d_2} = \sqrt{2} = 1{,}414$

Lorsque les efforts sont importants, les constructions adoptent 2, 3, 4 (ou plus) sections cisaillées en parallèle.

Un calcul plus précis peut être réalisé en flexion.

2. Assemblages rivetés et boulonnés • Calcul siiplifié

a) Assemblages rivetés

Pour certains types de construction (carlingues d'avion, etc.), les assemblages rivetés sont préférés aux assemblages soudés plus sensibles au phénomène de fatigue.

Exemple : les barres (1) et (2) sont liées par un rivet (3) en aluminium de diamètre d = 10 mm et de résistance à la rupture par glissement R_g = 10 daN.mm^{-2}.
Déterminons l'effort $\vec{F}$ admissible.

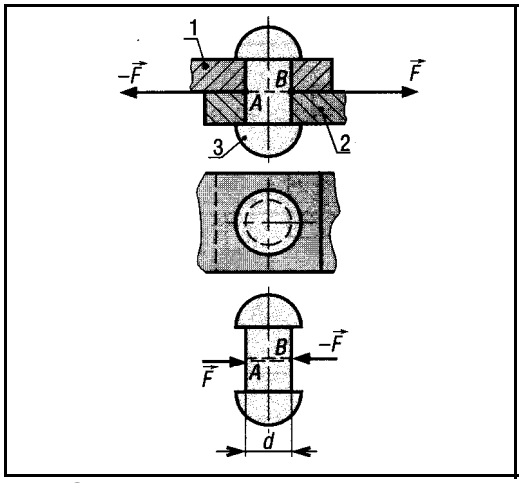


Fig. 13

Résolution

Nous avons une seule section cisaillée :

$$F = T = \tau\, S = R_g \,.\, S = 10 \times \left(\frac{\pi \times 10^2}{4}\right) = 785 \text{ daN}$$

Remarque : pour déterminer l'effort $\vec{F}$ admissible par l'assemblage, il faut également tenir compte de la résistance au matage des barres et du rivet ainsi que de la résistance à la traction des barres.

b) Assemblages boulonnés

Le mode de calcul et les remarques sont identiques aux assemblables rivetés.

Exemple (fig. 14) : pour l'assemblage proposé, à trois boulons ajustés en acier, d = 12 mm, la contrainte admissible au cisaillement des boulons R_{pg} = 30 daN.mm^{-2}. Déterminons l'effort $\vec{F}$ admissible.

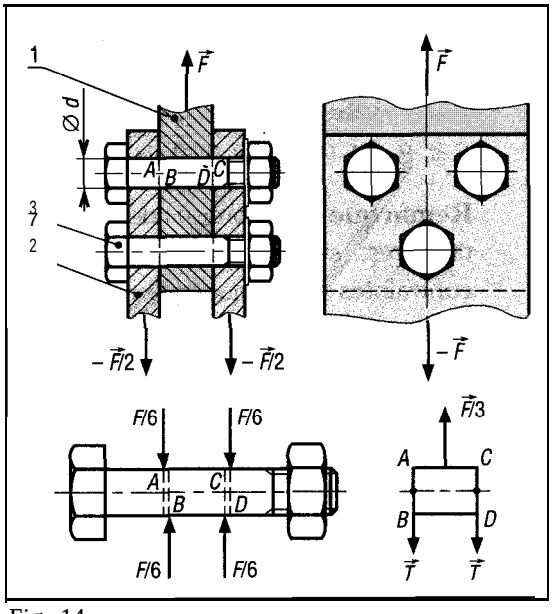


Fig. 14

Résolution

Si les trois boulons sont chargés de la même façon, chacun supporte une charge égale à $F/3$. Il y a deux sections cisaillées par boulon et chaque section supporte un effort tranchant T égal à $F/6$.

$$T = F/6 = \tau \,.\, S = R_{pg} \,.\, S = 30 \times \left(\frac{\pi \times 12^2}{4}\right) = 3\,393 \text{ daN}$$

d'où : F = 6 x 3 393 = 23 358 daN

3, Assemblages soudés

Nous nous limiterons ici au cas du cisaillement.

Exemple

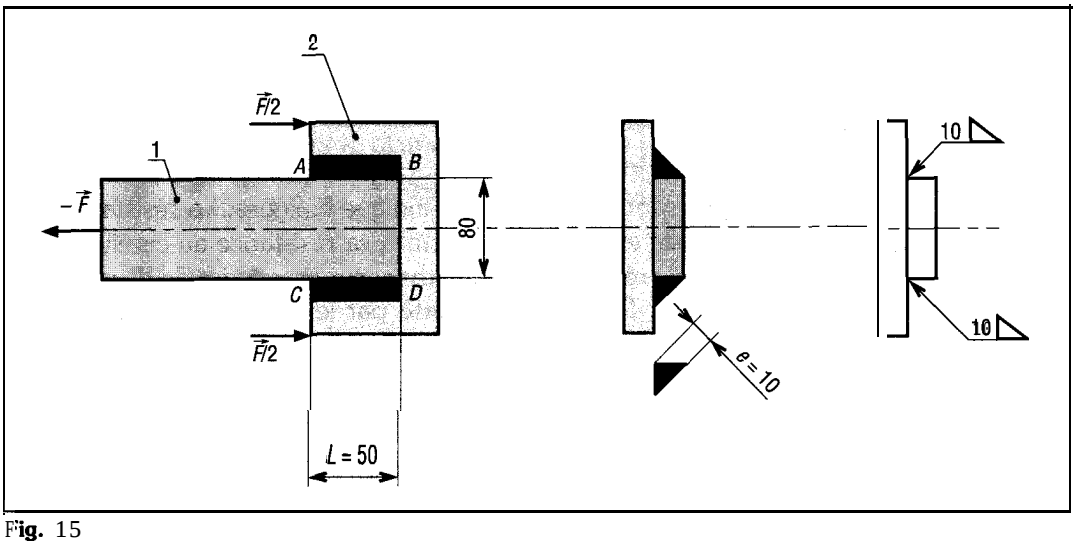


Fig. 15

L'assemblage des fers plats (1) et (2) est réalisé par l'intermédiaire des cordons de soudure AB et CD. L'épaisseur e des cordons est de 10 mm, la longueur de 50 mm. La limite admissible au cisaillement du métal d'apport est R_{pg} = 8 daN.mm^{-2}.
Déterminons l'effort F admissible par le montage.

Résolution

Dans le cas de l'assemblage proposé, les contraintes de cisaillement sont prépondérantes. Le calcul au cisaillement sera effectué dans la plus petite section transversale du cordon (section e . L = 10 x 50). On supposera que dans cette section, les contraintes sont uniformes.

$F = \tau . S \leqslant R_{pg} . S$ (S = S_{AB} + S_{CD} = e . L + e . L = 1000 mm^2)

F $\leqslant$ 8 x 1 000 = 8 000 daN

Remarque : les cordons de soudure sont soumis à une législation et à des normes particulières, surtout en ce qui concerne les appareils soumis à des pressions, des contraintes thermiques (flamme, vapeur) et à de la fatigue. Des coefficients de qualité sont à appliquer en plus des coefficients de sécurité habituels.

EXERCICES À RÉSOUDRE

1 Les plats 1 et 2 sont collés comme l'indique la figure. La résistance à la rupture en traction de la colle est de 235 daN.cm^{-2}, sa résistance au cisaillement est de 175 daN.cm^{-2}. La colle étant uniformément répartie sur la surface rectangulaire (30 x 70), déterminer l'effort de traction admissible $\vec{F}$ par l'assemblage.

Réponse

3 675 daN.

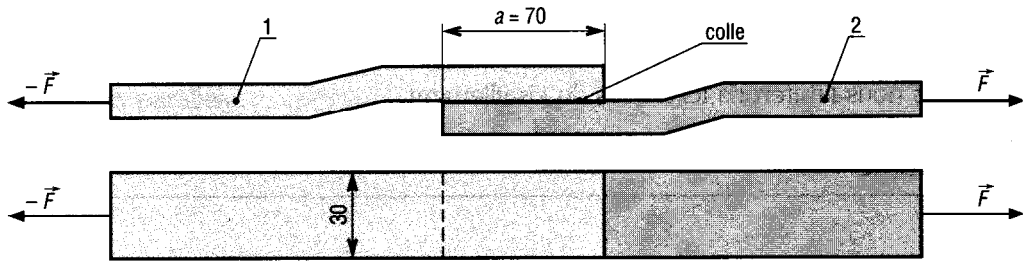


Fig. 16

• I Les cylindres 1 et 2 sont collés comme l'indique la figure. La résistance à la rupture par traction de la colle est de 240 daN.cm^{-2}, sa résistance au cisaillement est de 180 daN.cm^{-2}. La colle est répartie uniformément sur le cylindre de diamètre 30 mm et de longueur l inconnue. L'effort $\vec{F}$ supporté par le montage est de 2 600 daN. Calculer la longueur l minimale à donner au joint collé du montage.

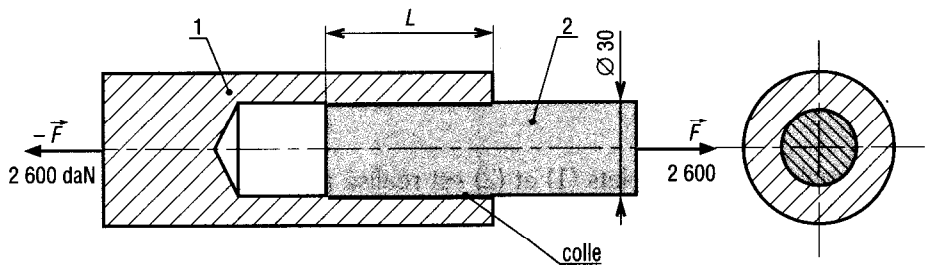


Fig. 17

3 Les feuilles de plastique 1 et 2 sont collées comme l'indique la figure proposée. La contrainte de cisaillement admissible dans le joint collé est de 8 daN.cm^{-2}. Quelle est la longueur L nécessaire si l'ensemble supporte un effort de traction $\vec{F}$ de 3 000 daN ?

Réponse

$L \geqslant 250$ mm.

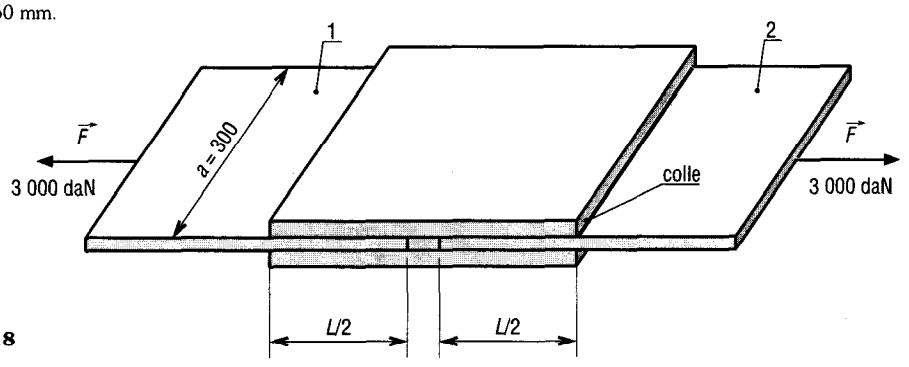


Fig. 18

❑ Une articulation cylindrique entre deux barres plates 1 et 2 est réalisée comme l'indique la figure. La liaison est assurée par un axe cylindrique 3 de diamètre d inconnu. L'effort maximal supporté par la liaison est de 5 000 daN. La résistance pratique (ou admissible) au cisaillement du matériau de l'axe est de 5 daN.mm^{-2}. Déterminer le diamètre a' de l'axe 3. Indiquer la (ou les) section(s) cisaillée(s).

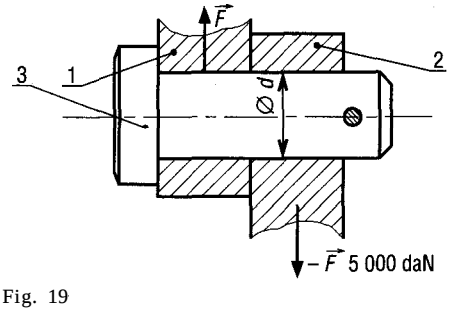


Fig. 19

5 L'articulation proposée assure la liaison (pivot) entre la chape 1 et le tirant 2 au moyen d'un axe 3 arrêté en translation par deux circlips 4. La résistance admissible au cisaillement de l'axe 3 est égale à 80 MPa. Si le diamètre d de l'axe est égal à 50 mm, déterminer l'effort F maximal transmissible par la liaison.

Réponse

$F \leqslant 31416$ daN.

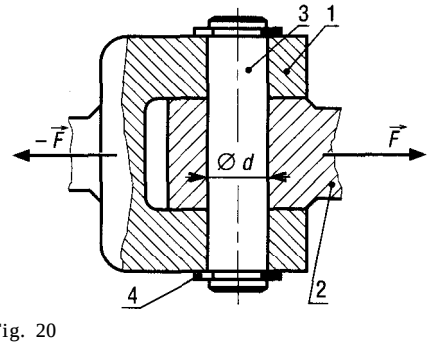


Fig. 20

6 Le maillon de chaîne de transmission proposé se compose de deux flasques 1 et 2 dont la liaison est assurée par un axe 3. Compte tenu des dimensions indiquées, calculer les contraintes de cisaillement dans l'axe 3.

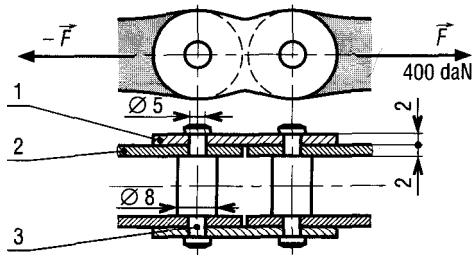


Fig. 21

7 L'ensemble proposé est un maillon de chaîne à montage et démontage rapide. Le maillon permet la constitution rapide d'élingues, ainsi que des assemblages entre chaînes, crochets et anneaux. Le maillon est construit à partir de deux demi-anneaux 1 et 2. La liaison est assurée par l'axe 3 de diamètre d (d = 8 mm). L'effort $\vec{F}$ admissible par le maillon est de 2 010 daN. Déterminer les contraintes de cisaillement dans l'axe 3.

Réponse

10 daN.mm^{-2}.

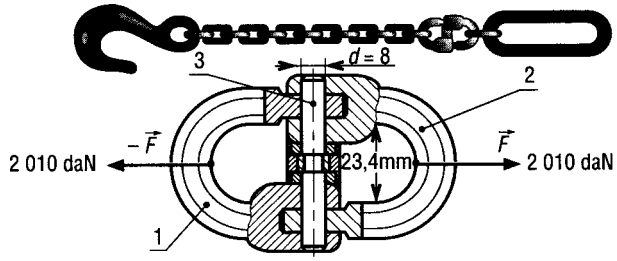


Fig. 22

❑ Deux planches de bois 1 et 2, d'épaisseur e = 20 mm, sont collées comme l'indique la figure. Si la contrainte admissible au cisaillement du joint collé est de 900 kPa et si F = 300 daN, déterminer la longueur a nécessaire pour faire l'assemblage.

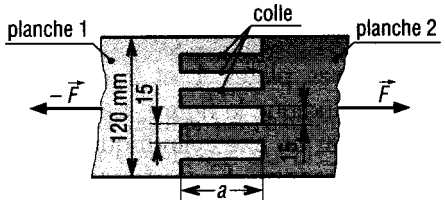


Fig. 23

9 L'assemblage des plats 1 et 2 de la figure ci-contre est réalisé par l'intermédiaire de, deux cordons de soudure. L'effort F supporté par le montage est de 8 000 daN. La contrainte de cisaillement admissible du métal d'apport est de 10 daN.mm^{-2}. Déterminer l'épaisseur minimale e des cordons.

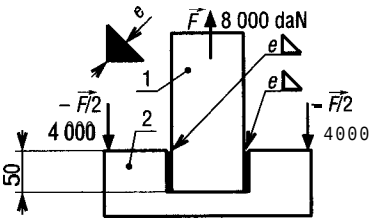


Fig. 24

❑ Reprendre l'exercice 9, e = 12 mm, en déduire l'effort $\vec{F}$ admissible par l'assemblage.

❑ Une poutre en bois supporte une charge de compression F = 400 daN. La poutre est maintenue par une cale fixe. Les frottements sont négligés.
Déterminer les contraintes de cisaillement engendrées dans la section ABCD et les contraintes de compression dans la section $DJEA$.

Réponse

τ = 1,33 MPa ; σ = 4 MPa.

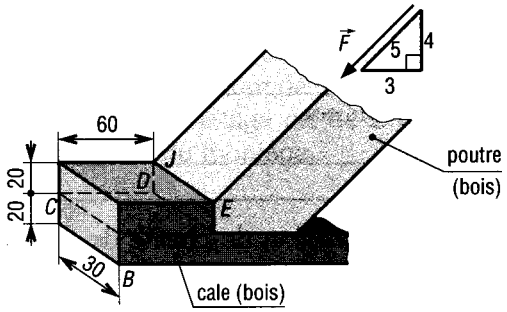


Fig. 25

12 Reprendre l'exercice 11. On impose pour le bois une contrainte admissible en compression de 20 MPa et une contrainte limite au cisaillement de 2,5 MPa. Quelle est la charge $\vec{F}$ admissible par l'assemblage ?

❑ L'assemblage proposé axe acier et poutre en bois supporte une charge F de 500 daN. Déterminer les contraintes dans la partie cisaillée de la poutre ($ABCD$ et $A'B'C'D'$) et les contraintes de cisaillement dans l'axe en acier.

Réponse

τ_{bois} = 2,08 MPa ; τ_{acier} = 31,8 MPa.

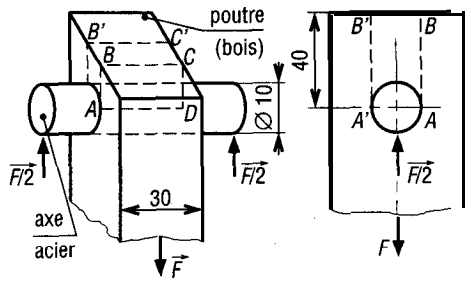


Fig. 26

❑ Reprendre l'exercice 13. On impose pour le bois une contrainte admissible au cisaillement de 3 MPa et pour l'acier une contrainte admissible au cisaillement de 80 MPa. Déterminer la charge $\vec{F}$ maximale tolérable par l'assemblage.

❑ Un crochet est fié dans un plafond de hauteur h et supporte une charge verticale $\vec{F}$ de 200 daN. a) Si la contrainte admissible au cisaillement du matériau du plafond est de 1 MPa, déterminer h. b) Si la contrainte admissible en traction du crochet est de 100 MPa, déterminer son diamètre d.

Réponse

$h \geqslant 10{,}6$ mm ; $d \geqslant 5$ mm.

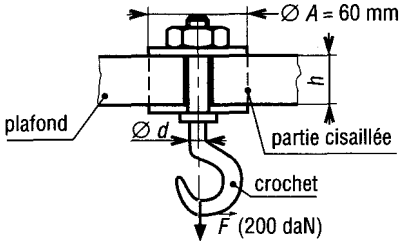


Fig. 27

❑ Un axe épaulé en acier supporte un effort de tension $\vec{F}$. a) Si la contrainte admissible en traction de la partie de 0 28 mmegt de 160 MPa, déterminer la charge F maximale tolérable. b) Si la contrainte admissible au cisaillement du matériau de l'axe est de 80 MPa, en déduire la valeur de h.

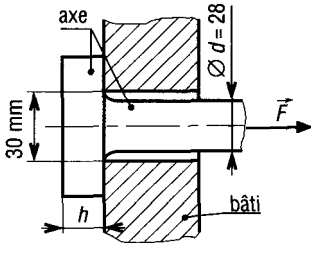


Fig. 28

17 Un poinçon 1 réalise un trou oblong dans une tôle de 3 mm d'épaisseur (2). a) Si la résistance à la rupture par cisaillement du matériau de la tôle est de 25 daN.mm^{-2}, déterminer l'effort $\vec{F}$ nécessaire au poinçonnage. b) En déduire la contrainte de compression dans le poinçon.

Réponse

F = 19 712 daN ; σ = 8,52 daN.mm^{-2}.

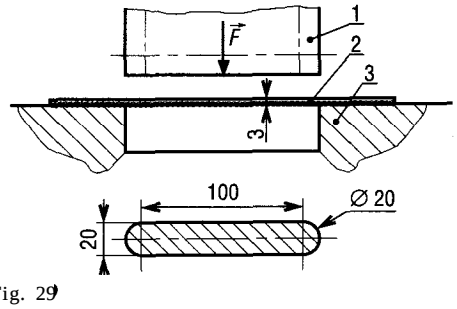


Fig. 29

18 Reprendre ici l'exercice 17 avec le trou proposé.

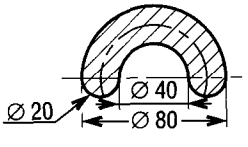


Fig. 30

❑ Un accouplement 3 à deux goupilles 4 et 5 permet la transmission de puissance d'un arbre 1 vers un arbre 2. Le couple maximal à transmettre est de 300 Nm, le diamètre des arbres est de 40 mm. Si la contrainte admissible au cisaillement du matériau des goupilles est de 300 MPa, déterminer leur diamètre d.

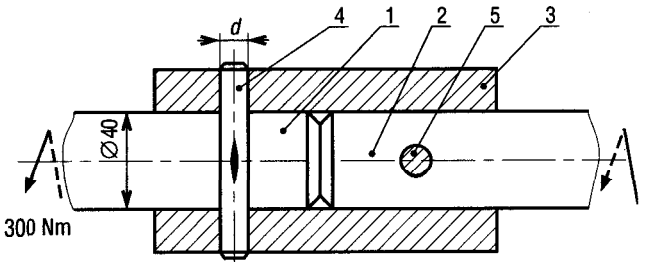


Fig. 31

Réponse

$d \geqslant 5{,}64$ *mm.*

❑ La transmission du couple entre un levier 1 et un axe 2 est réalisé par une clavette de section 16 x 10 et de longueur l = 30 mm. Déterminer les contraintes de cisaillement dans la clavette si l'effort F appliqué au levier est égal à 90 daN.

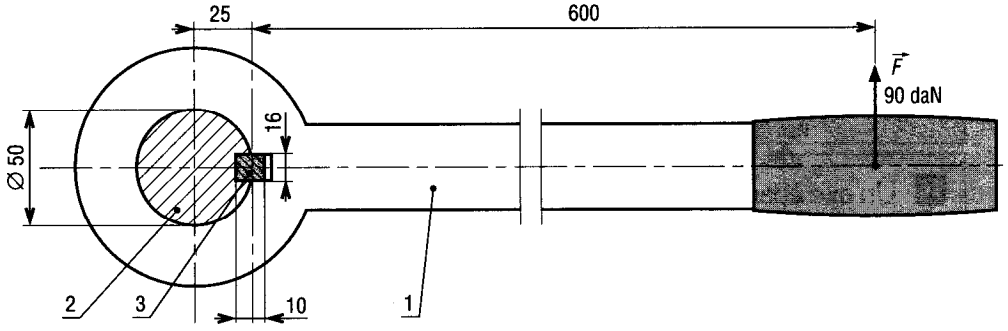
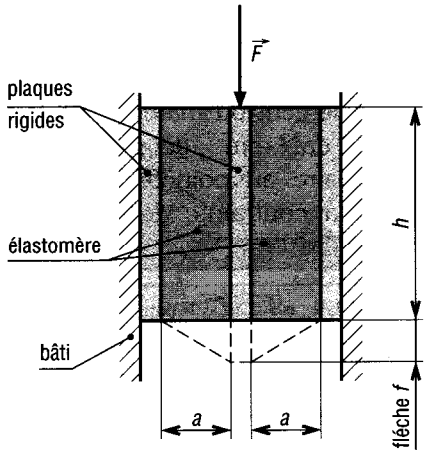


Fig. 32

21 Un amortisseur est réalisé à partir de deux blocs en élastomère parallélépipédiques (a x h x b) collés sur trois plaques rigides.
G est le module d'élasticité transversal de l'élastomère.
a) Déterminer la relation entre la+ flèche f et la charge supportée F. On se place dans le cas des petites déformations : y= tan γ.
b) Exprimer la raideur K ($K = F/f$) de l'amortisseur.



Réponse

$f = \frac{aF}{2hbG}$; $k = \frac{2hbG}{a}$.

Fig. 33

23 TORSION

OBJECTIFS

- Définir l'angle unitaire de torsion, le moment de torsion M_T, les contraintes tangentielles τ.
- Donner les formules fondamentales et des éléments concernant le calcul des constructions.
- Traiter les cas particuliers : concentrations de contrainte et poutres non circulaires.

I-Définition-Exemple

Une poutre droite est sollicitée en torsion chaque fois que les actions aux extrémités (A et B) se réduisent à deux couples M et − M égaux et opposes d'axe la ligne moyenne L_m.

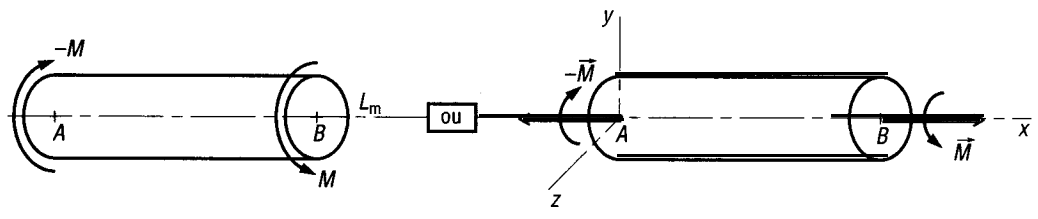


Fig. 1

Exemple : tige de tournevis.

Le tronçon AB de la tige du tournevis proposé (longueur 200 mm, diamètre 7 mm) est soumis à une sollicitation de torsion. Le couple de torsion supporté par la tige est :

$M_B = -M_A = F \,.\, a = 24$ Nm

Quelles sont les contraintes exercées et les déformations correspondantes ? C'est ce que nous allons découvrir dans les paragraphes suivants.

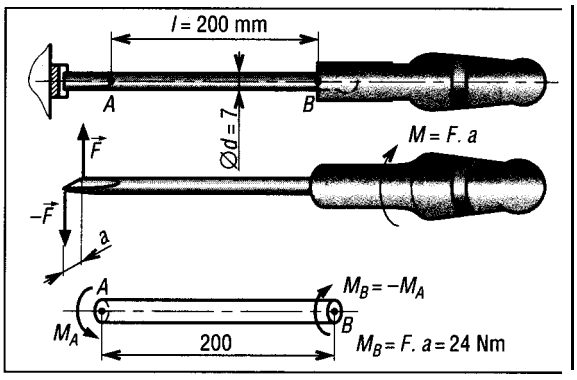


Fig. 2

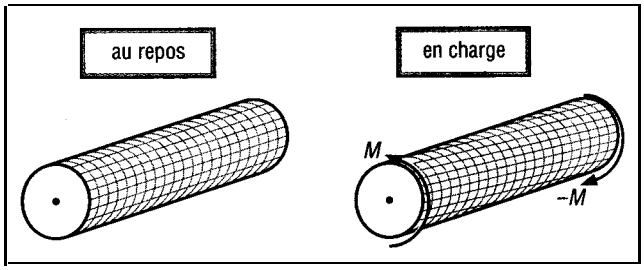
II - Déformations - Angle unitaire de torsion θ

1. Constatations expérimentales

Les sections droites avant déformations restent droites après déformations (restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne).

Les fibres ou génératrices initialement parallèles à la ligne moyenne (ou axe de la poutre) s'enroulent suivant des hélices autour de cet axe. La longueur des fibres restent sensiblement invariable ou constante (hypothèse de petites déformations).

Les sections droites tournent ou glissent en bloc les unes par rapport aux autres (rotations d'axe la ligne moyenne). Les rayons GK restent droits dans le domaine élastique et s'incurvent dans le domaine plastique.



ig. 3

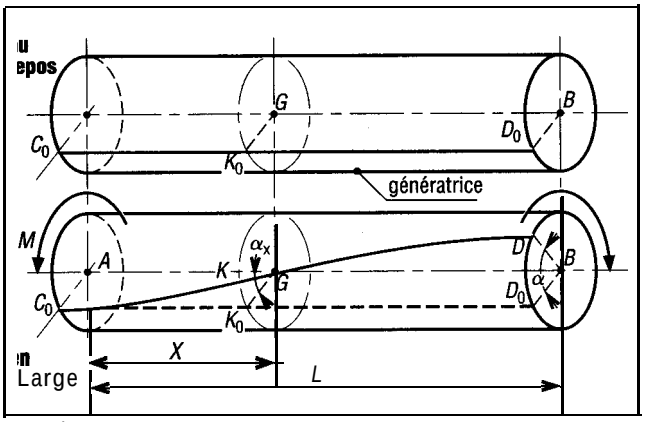


Fig. 4

α_x = angle (GK_0, GK) = angle de torsion entre les sections droites A et G

a = angle **(BD,, BD)** = angle de torsion de la poutre

2. Angle unitaire de torsion θ

Si on suppose que les sections droites tournent toutes entre elles de la même façon, alors l'angle de torsion entre deux sections droites quelconques est proportionnel à la distance entre celles-ci.

Autrement dit :

$$\frac{\alpha}{L} = \frac{\alpha_X}{X} = \theta = \text{angle unitaire de torsion}$$

Exemple : reprenons l'exemple du tournevis avec M = 24 Nm, si l'angle de torsion a,, mesuré entre **A** et B est égal à $14{,}6°$; déterminons θ.

$$\theta = \frac{\alpha_{AB}}{L_{AB}} = \frac{14{,}6°}{200} = 0{,}073\text{". mm-'}$$

$$= 73\text{". m}^{-1} = \frac{73 \times \pi}{180} = 1{,}274 \text{ rad.m}^{-1}$$

III - Efforts intérieurs - Moment de torsion M_T

La démarche reste la même qu'aux chapitres précédents, on pratique une coupure fictive (S) dans la poutre afin de la diviser en deux tronçons pour faire apparaître et calculer (statique) les efforts intérieurs ou de cohésion (S est une section droite).

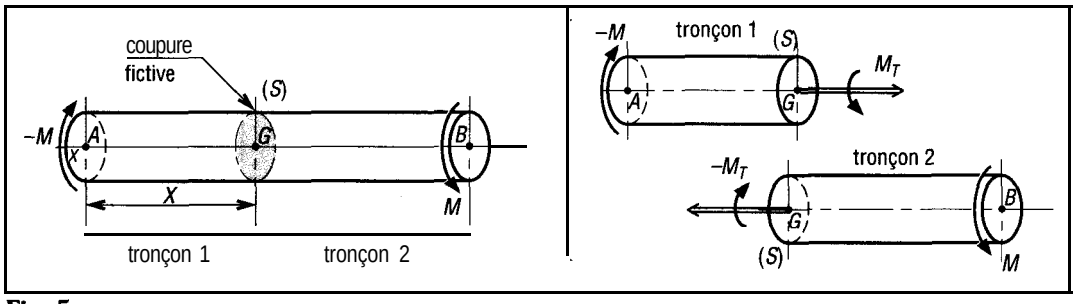


Fig. 5

L'étude de l'équilibre de l'un ou l'autre tronçon (avec la convention des efforts à droite) montre que les actions de cohésion se réduisent à un couple de torsion M_T, d'axe la ligne moyenne (x), tel que : $M_T = M$

Remarque : dans le cas de la torsion, tous les autres efforts intérieurs sont nuls $(N = T = M_f = 0)$.

IV - Contraintes tangentielles de torsion τ

En torsion, et dans le cas des petites déformations, les contraintes normales σ sont négligeables.

Les contraintes dans la coupure (S) se réduisent à des contraintes tangentielles ou de cisaillement τ.

À partir de la relation $\tau = G\gamma$ obtenue au chapitre cisaillement, on montre que la contrai- t K ? τ_M, en un point M quelconque de la coupure (S) est proportionnelle à la distance $GM = \rho$ entre le point et la ligne moyenne.

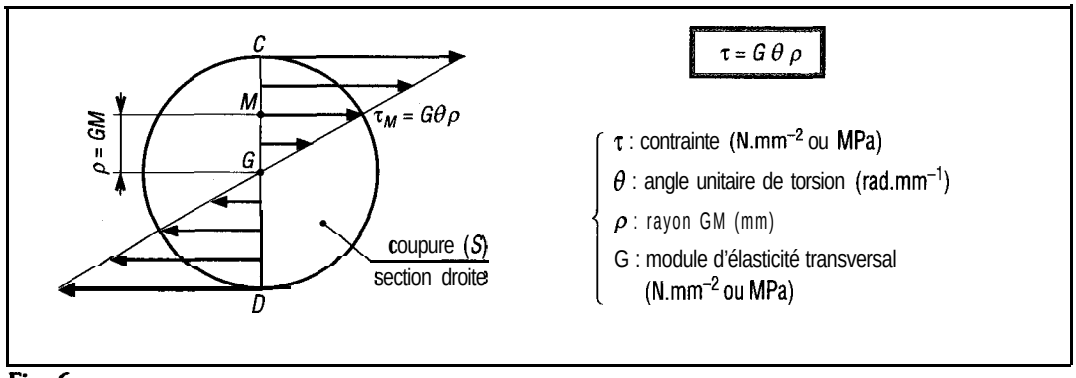


Fig. 6

Remarques : tous les points situés sur un même cercle de centre G et de rayon ρ ont même contrainte. Les contraintes sont maximales à la périphérie : $\tau_{maxi} = G\theta R$ pour $\rho_{maxi} = R$. Pour les métaux : G $\simeq 0{,}4$ E.

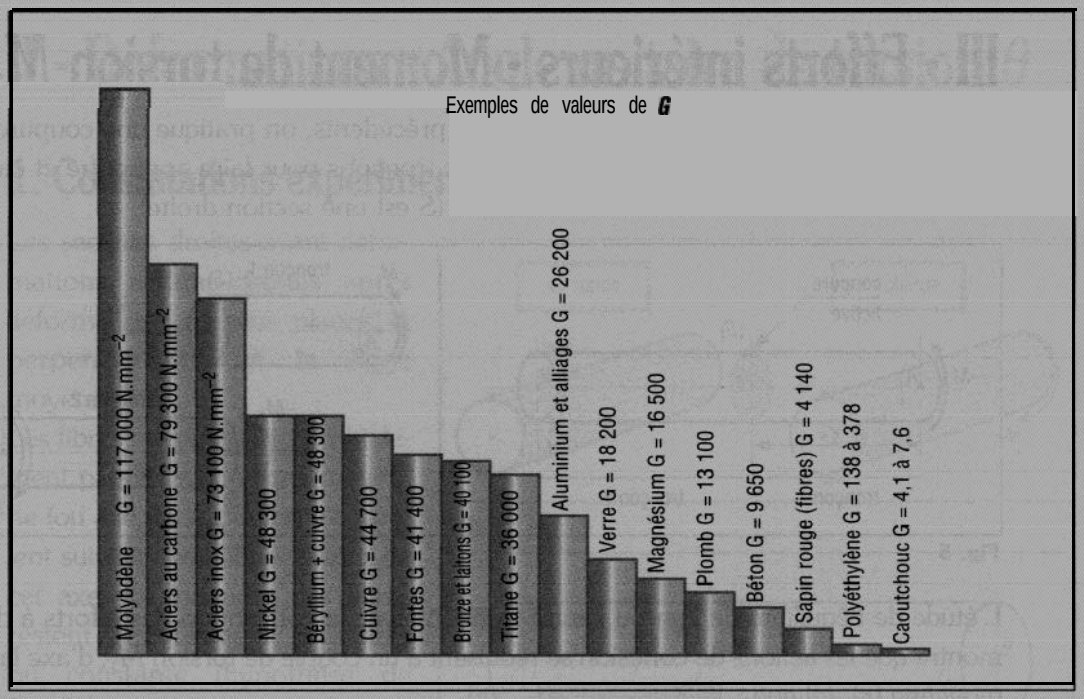


Fig. 7

Exemple : cas de la tige de tournevis, G = 80 GPa ; $\theta = 73°.m^{-1}$. Déterminons la contrainte de cisaillement maximale dans la tige.

Diamètre de la tige : d = 7 mm d'où $\rho_{maxi} = d/2 = 3{,}5$ mm

$\theta = 73°.m^{-1} = \frac{73 \times \pi}{180} = 1{,}27$ rad.m^{-1} = 0,001 27 rad.mm^{-1}

Contrainte : $\tau_{maxi} = G\theta\rho_{maxi} = 80\,000 \times 0{,}001\,27 \times 3{,}5 = 356$ N.mm^{-2}

V - Relation entre M_T et θ

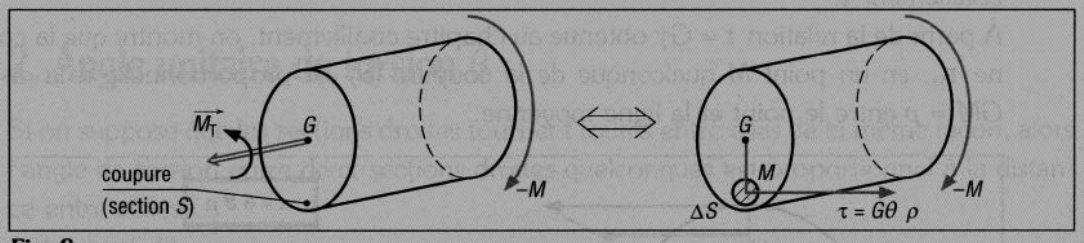


Fig. 8

En chaque point M de la coupure s'exerce, pour l'élément de surface AS autour de M, une force $\overrightarrow{Af} = \vec{\tau}$. AS dont la direction est perpendiculaire à GM.

Le moment en G de cette force est $M_G(\overrightarrow{\Delta f}) = \Delta f \times GM = \Delta f.\rho$

Le moment de torsion M_T est égal au moment résultant en G de toutes les forces $\overrightarrow{\Delta f}$ de la section (S).

$$M_T = \sum_{(s)} M_G(\overrightarrow{\Delta f}) = \sum_{(s)} \Delta f.\rho = \sum_{(s)} \tau.\rho\Delta S = \sum_{(s)} G\theta\rho^2\Delta S$$

$$= G\theta \sum_{(s)} \rho^2\Delta S = G\theta \int_{(s)} \rho^2 dS = G\theta I_0$$

Le terme $\sum_{(s)} \rho^2\Delta S = \int_{(s)} \rho^2 dS = I_0$ est le moment quadratique de la section (S) par rapport au point G (voir chapitre « moment quadratique » en fin d'ouvrage).

Cas particuliers à retenir :

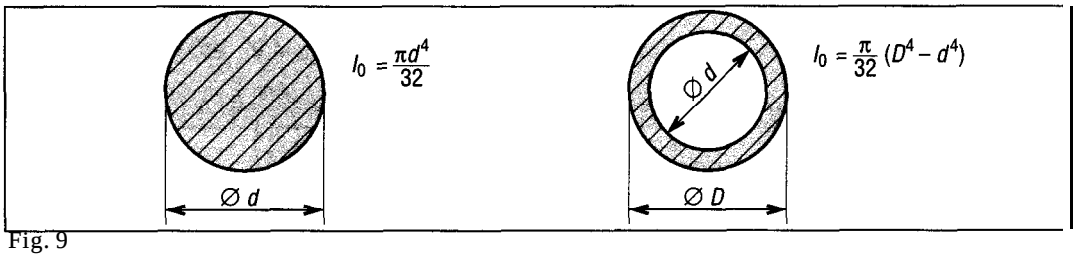


Fig. 9

$M_T = G\theta I_0$ (ors)

L'angle unitaire de torsion θ est proportionnel au moment de torsion M_T

M_T : moment de torsion (Nmm)
G : module d'élasticité transversal (N.mm^{-2} ou MPa)
θ : angle unitaire de torsion (rad.mm^{-1})
I_0 : moment quadratique par rapport au point G (mm^4)

Exemple : reprenons l'exemple du tournevis avec M_T = 24 Nm, d = 7 mm, G = 80 GPa, et déterminons l'angle unitaire de torsion.

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi 7^4}{32} = 235{,}7\ \text{mm}^4$$

$$\theta = \frac{M_t}{G I_0} = \frac{24.10^3}{80\,000 \times 235{,}7} = 0{,}00127\ \text{rad.mm}^{-1}\ (72{,}8°.\ \text{m}^{-1})$$

VI - Relation entre τ et M_T

À partir de $\tau = G\theta\rho$ et $M_T = G\theta I_0$, on peut écrire : $G\theta = \frac{\tau}{\rho} = \frac{M_T}{I_0}$

On obtient ainsi :

$$\tau = \frac{M_T}{I_0} \times \rho$$

τ : N.mm^{-2}
M_T : Nmm
ρ : mm
I_0 : mm^4

Exemple : cas du tournevis, M_T = 24 Nm, d = 7 mm, la contrainte maximale est :

I_0 = 235,7 mm^4 et $\tau = \frac{24\ 000}{235{,}7} \times \rho = 102\ \rho$ N.mm^{-2}

$\tau_{maxi} = 102\ \rho_{maxi} = 102 \times 3{,}5 = 356$ N.mm^{-2}

VII - Calcul des constructions

Sauf pour les cas où la rupture est recherchée, la contrainte tangentielle maximale (τ_{maxi}) doit toujours rester inférieure à la résistance pratique au glissement ou au cisaillement (R_{pg}) du matériau.

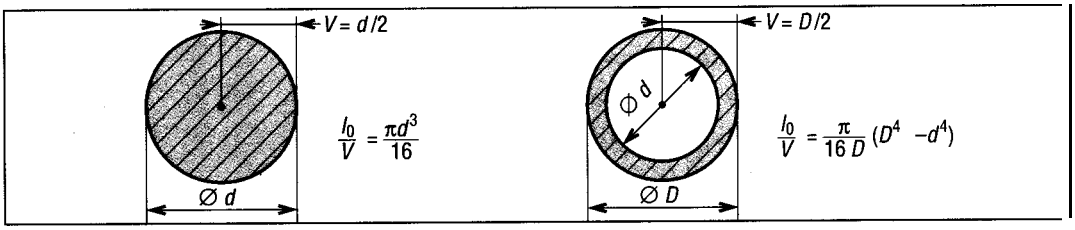
Autrement dit :

$$\tau_{maxi} = \frac{M_T}{I_0} \times \rho_{maxi} = \frac{M_T}{\left(\frac{I_0}{V}\right)} \leqslant R_{pg} \quad \text{avec} \quad \rho_{maxi} = V \quad \text{et} \quad R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$$

R_{eg} : limite élastique au cisaillement du matériau
s : coefficient de sécurité

pour les métaux $R_{eg} \simeq \frac{R_e}{2}$

$\frac{I_0}{V}$: module de torsion (mm^3), cas à retenir :



$\frac{I_0}{V} = \frac{\pi d^3}{16}$ $\qquad$ $\frac{I_0}{V} = \frac{\pi}{16D}(D^4 - d^4)$

Fig. 10

Exemple : si, pour le tournevis précédent, on impose une contrainte admissible au cisaillement de 200 MPa, déterminons la valeur minimale du diamètre d lorsque $M_{T\ maxi} = 24 Nm$.

$$\tau_{maxi} = \frac{24\,000}{\left(\frac{I_0}{V}\right)} = \frac{24\,000}{\left(\frac{\pi d^3}{16}\right)} \leqslant R_{pg} = 200\,N.mm^{-2}$$

$$d^3 \geqslant \frac{24\,000 \times 16}{\pi \times 200} \quad \text{et} \quad d \geqslant 8{,}5\,mm$$

VIII - Cas des concentrations de contrainte

Lorsque les arbres étudiés présentent de brusques variations de section (gorge, épaulement, trou de perçage.. .), les formules précédentes ne sont plus applicables. Au voisinage du changement de section, la répartition des contraintes est modifiée, τ_{maxi} est supérieure à τ calculée, on dit qu'il y a concentration de contraintes.

Si k_{ts} est le coefficient de concentration de contrainte : $\tau_{maxi} = K_{ts} . \tau_0$ avec $\tau_0 = \frac{M_T}{\left(\frac{I_0}{V}\right)}$

Exemple : déterminons la contrainte au fond d'une gorge d'un arbre de transmission soumis à un couple de torsion de 400 Nm.

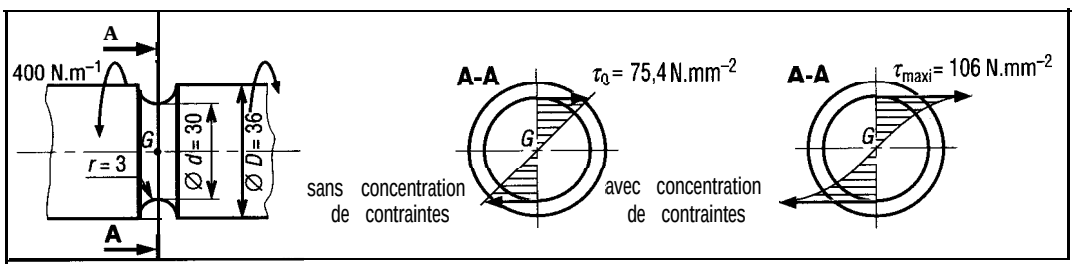


Fig. 11

Déterminons k_{ts} :

$r/d = 3/30 = 0{,}1$; $D/d = 36/30 = 1{,}2$; le tableau (fig. **13)** nous donne $k_{ts} \simeq 1{,}4$.

Contrainte τ_0 : $\tau_0 = \dfrac{M_T}{\left(\dfrac{I_0}{V}\right)} = \dfrac{M_T \times 16}{\pi d^3} = \dfrac{400\,000 \times 16}{\pi\, 30^3} = 75{,}45\ \text{N.mm}^{-2}$

Contrainte maxi : $\tau_{maxi} = k_{ts}\ .\ \tau_0 = 1{,}4 \text{ x } 75{,}45 = 105{,}63\ \text{N.mm}^{-2}$

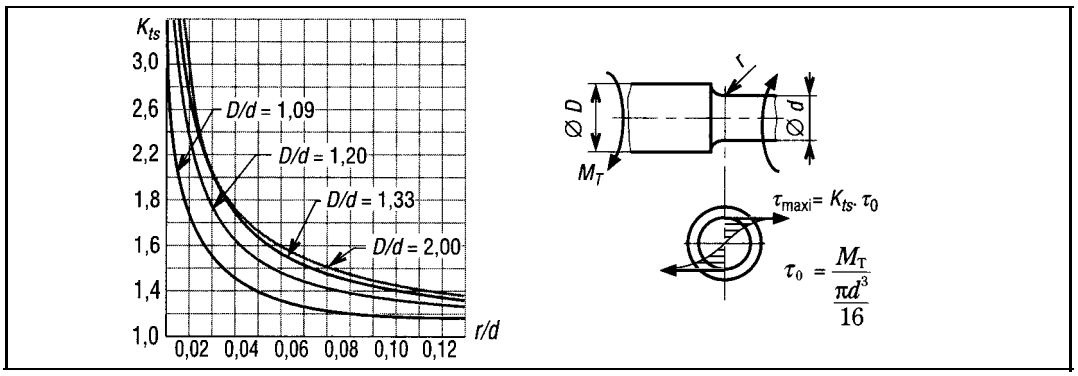


Fig. 12

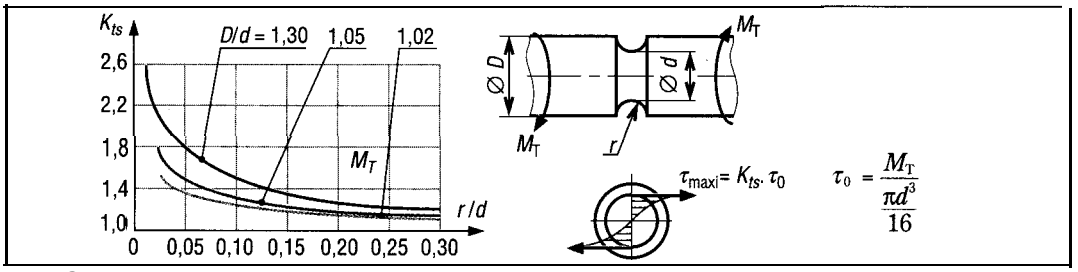


Fig. 13

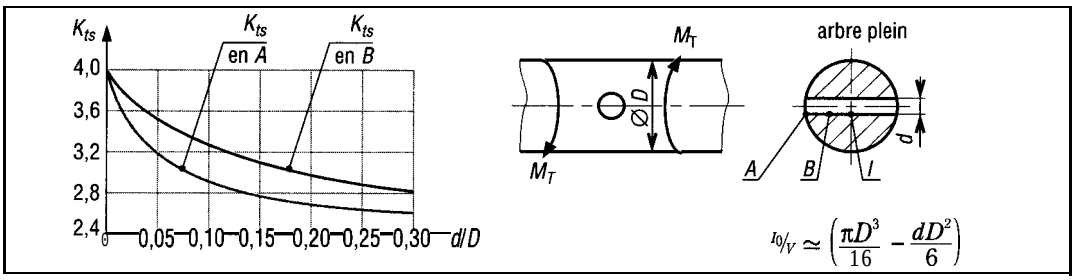
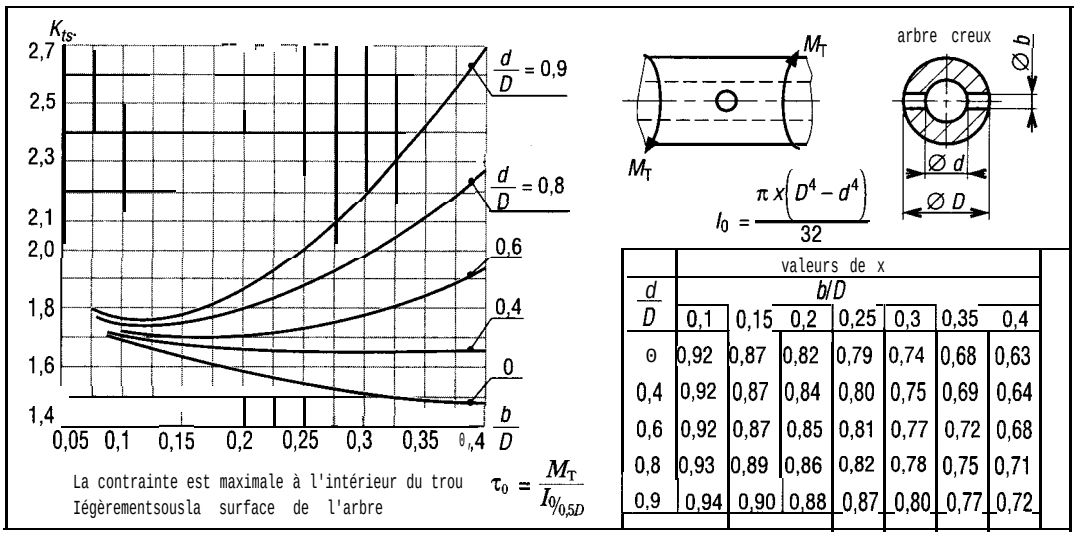


Fig. 14



d/D	valeurs de x b/D						
	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
0	0,92	0,87	0,82	0,79	0,74	0,68	0,63
0,4	0,92	0,87	0,84	0,80	0,75	0,69	0,64
0,6	0,92	0,87	0,85	0,81	0,77	0,72	0,68
0,8	0,93	0,89	0,86	0,82	0,78	0,75	0,71
0,9	0,94	0,90	0,88	0,87	0,80	0,77	0,72

Fig. 15

IX - Application : comparaison entre arbre plein et arbre creux

Soit deux arbres de transmission construits à partir du même acier, G = 8 000 daN.mm^{-2}. Le premier est plein (diamètre d_1) ; le second est creux (diamètre extérieur D, diamètre intérieur $d = 0{,}8D$).

Le couple à transmettre est de 200 Nm ; la résistance pratique au cisaillement adoptée pour les deux cas est de 10 daN.mm^{-2}.

Déterminons les dimensions optimales des deux arbres et comparons les poids respectifs des deux constructions.

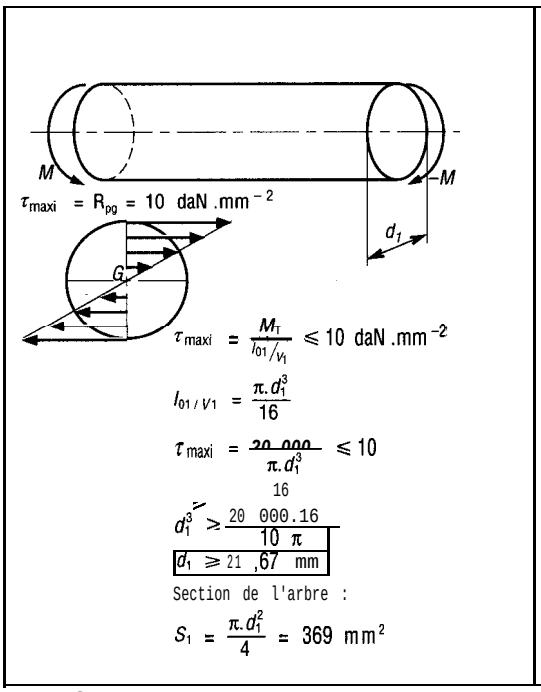


Fig. 16

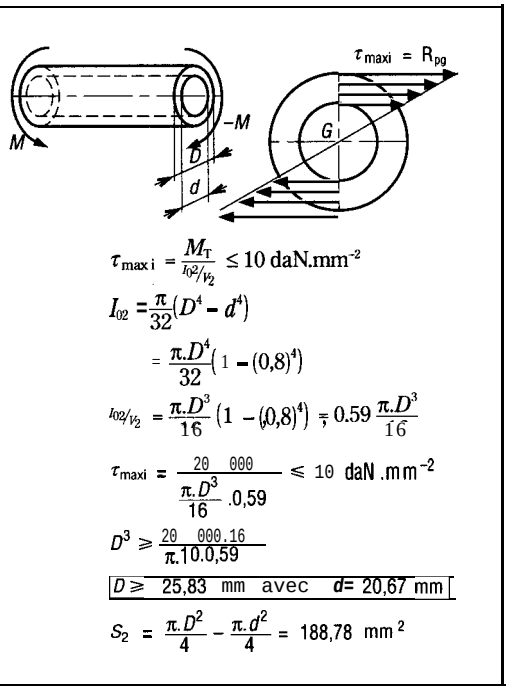


Fig. 17

Remarquons que le rapport r des poids des deux arbres est égal au rapport des sections.

$$r = \frac{\text{poidsarbre}}{\text{poidsarbre 1}} = \frac{\rho_1 V_1}{\rho_2 V_2} = \frac{\rho_1 S_1 L_1}{\rho_2 S_2 L_2} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{188}{369} = 0{,}51$$

avec $L_1 = L_2$ = longueur des arbres (V_1 et V_2 sont les volumes)

et $\rho_1 = \rho_2$ = masse volumique de l'acier (7 800 kg.m^{-3}).

Pour cet exemple, le poids de l'arbre (2) est, à résistance égale, deux fois plus léger que l'arbre (1). Cette solution est à envisager pour des constructions où la légèreté est recherchée.

Remarques : le rapport r dépend des valeurs de d et D de l'arbre creux,

soit $d = k \,.\, D$ $(0 < k < 1)$ alors $\boxed{r = \dfrac{\left(1-k^2\right)^{1/3}}{\left(1+k^2\right)^{2/3}}}$

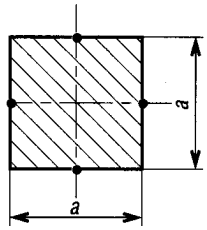
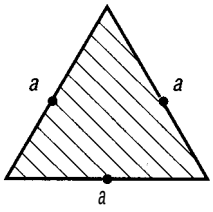
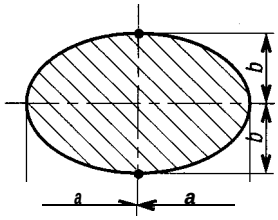
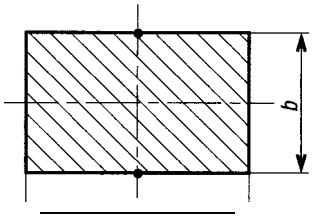
k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
r	0,99	0,96	0,92	0,86	0,78	0,70	0,61	0,51	0,39

Notons qu'à partir de $k = 0{,}8$, le gain de poids est de 50 %.

X - Torsion des poutres non circulaires

1. Formulaire

Lorsque les arbres ne sont plus circulaires, les formules précédentes ne sont plus applicables et il faut utiliser les relations décrites dans ce paragraphe.

Forme	Section	τ_{maxi}	$\theta = \alpha / L$	Observations
Carré		$\frac{4{,}81\ M_T}{a^3}$	$\frac{7{,}10\ M_T}{G\,a^4}$	contraintes maxi au milieu des côtés
Triangle équilatéral de côté a		$\frac{20\ M_T}{a^3}$	$\frac{46\ M_T}{G\,a^4}$	contraintes maxi au milieu des côtés
Ellispe		$\frac{M_T}{\pi\, ab^2}$	$\frac{(a^2 + b^2)\ M_T}{\pi\, a^3 b^3 G}$	contraintes maxi à la périphérie sur le petit axe
Rectangle		$\frac{M_T}{k_1\, ad}$	$\frac{M_T}{k_2\, ab^3 G}$	contraintes maxi au milieu des deux grands côtés. k_1 et k_2 sont donnés dans le tableau ci-dessous

'ig. 18

$\frac{a}{b}$	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	10,0	∞
k_1	0,208	0,219	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,312	0,333
k_2	0,1406	0,1661	0,1958	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,312	0,33

Remarques : des valeurs intermédiaires peuvent être obtenues par interpolation linéaire :

Si $\frac{a}{b} \geqslant 5 : k_1 = k_2 = 0{,}333\left(1 - 0{,}63\,\frac{b}{a}\right)$

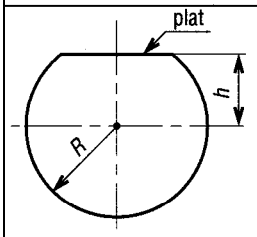
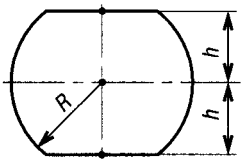
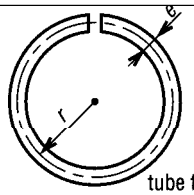
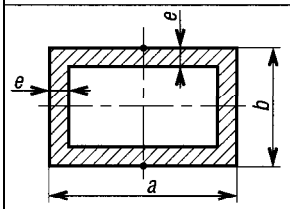
Forme section	τ_{maxi}	$\theta = \alpha/L$	Observations
	$\frac{M_T}{k_3 R^3}$	$\frac{M_T}{k_4 R^4 G}$	$\frac{h}{R}$: 0 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8 ; 1,0 ; 1,2 k_3 : 0,35 ; 0,51 ; 0,70 ; 0,92 ; 1,18 ; 1,57 k_4 : 0,30 ; 0,51 ; 0,78 ; 1,06 ; 1,37 ; 1,57
	$\frac{M_T}{k_5 R^3}$	$\frac{M_T}{k_6 R^4 G}$	$\frac{h}{R}$: 0,5 ; 0,6 ; 0,7 ; 0,8 ; 0,9 ; 1,0 k_5 : 0,47 ; 0,60 ; 0,81 ; 1,02 ; 1,25 ; 1,57 k_6 : 0,4 ; 0,67 ; 0,93 ; 1,19 ; 1,39 ; 1,57
 tube fendu	$\simeq \frac{3\,M_T}{2\,\pi\,re^2}$	$\simeq \frac{3\,M_T}{2\,\pi\,re^3 G}$	e doit être petit r = rayon moyen formules établies à partir des résultats du paragraphe 2
	$\frac{M_T}{2e(a-e)(b-e)}$	$\frac{M_T(a+b-2e)}{2eG(a-e)^2(b-e)^2}$	e doit être petit formules établies à partir de la méthode de la membrane (paragraphe 3)

Fig. 19

Exemple 1 : poutre de section carrée, a = b = 30, si la contrainte admissible du matériau est de 40 MPa, déterminons le couple maximal transmissible.

$$\tau_{maxi} = \frac{4{,}81\,M_T}{a^3} = \frac{4{,}81\,M_T}{30^3} \leqslant 40\ \text{N.mm}^{-2} \quad \text{d'où} \quad M_T \leqslant 225\text{Nm}$$

Exemple 2 : poutre de section rectangulaire, a = 60 et b = 25, avec les données de l'exemple précédent.

$\frac{a}{b} = 2{,}4$ d'où $k_1 \simeq 0{,}256$ et $k_2 \simeq 0{,}245$

$$\tau_{maxi} = \frac{M\,T}{k_1 \,.a.\, b^2} = \frac{M\,T}{0{,}256 \times 60 \times 25^2} \leqslant 40\ \text{N.mm}^{-2} \quad \text{d'où} \quad M_T \leqslant 384\text{Nm}$$

2. Torsion des poutres de section ouverte et d'épaisseur constante

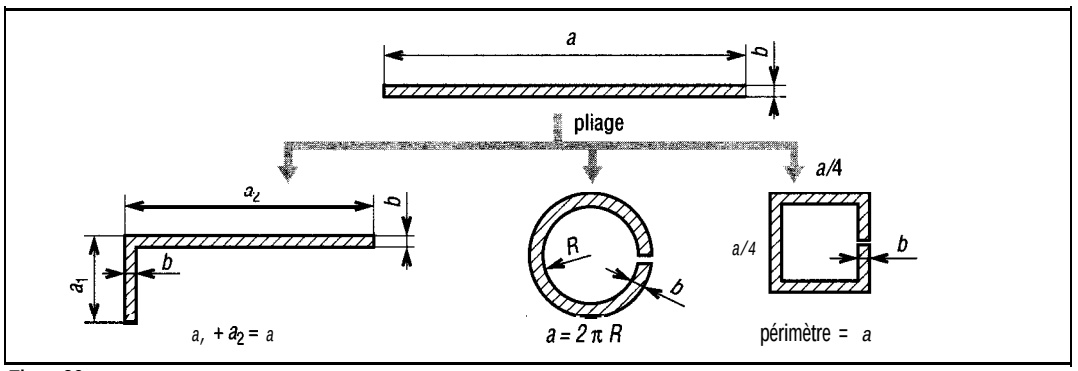


Fig. 20

Les sections s'obtiennent par pliage ou roulage à partir d'une barre parallélépipddique. Tous les cas se ramènent à l'étude d'une barre de section rectangulaire d'épaisseur b constante et de largeur a élevée. Les formules du tableau du paragraphe 1, cas du rectangle, sont utilisables.

$\tau_{maxi} = \dfrac{M_T}{k_1 . a . b^2}$	$\theta = \dfrac{M_T}{k_2 . a . b^3 . G}$	Voir valeurs de k_1 et k_2 dans tableau.

Exemple : poutre de section en L, b = 10 ; a, = a_2 = 150 mm ; si la contrainte de cisaillement admissible est de 50 MPa et G = 70 GPa, déterminons le couple de torsion tolérable et l'angle a de torsion si la poutre mesure 3 m.

$\frac{a}{b} = \frac{10}{300}$ et $k_1 = k_2 = 0{,}333\left(1 - 0{,}63 \times \frac{10}{300}\right) = 0{,}326$

$\tau_{maxi} = \dfrac{M_T}{0{,}326 \times 300 \times 10^2} \leq 50$ N.mm^{-2} d'où M_T = 489 Nm

$\theta = \dfrac{489\,000}{0{,}326 \times 300 \times 10^3 \times 70\,000} = 7{,}14 \times 10^{-5}$ rad.mm^{-1} ; a = 12,28°.

3. Torsion des poutres de section fermée

Les résultats de ce paragraphe sont extraits de la méthode dite de la membrane.

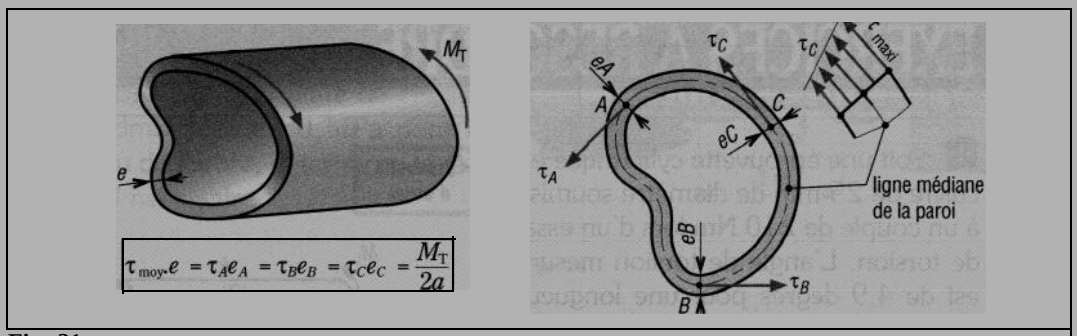


Fig. 21

Lorsque l'épaisseur e est suffisamment mince, la contrainte moyenne dans Ia paroi (sur la ligne médiane) est obtenue par la relation indiquée, en remarquant que le produit τ x e est constant tout le long de la paroi. a est l'aire intérieure à la ligne médiane de la paroi.

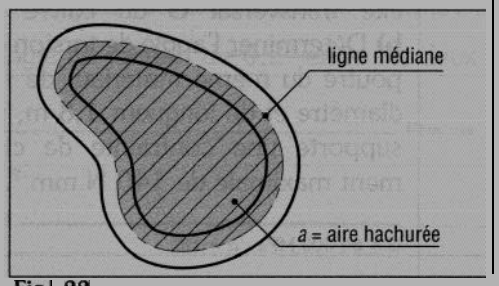


Fig. 22

Exemple 1 : poutre tubulaire carrée de côté 50 mm et d'épaisseur 6 mm : si la contrainte admissible est de 40 MPa, déterminons la valeur du couple de torsion tolérable.

a = 44 x 44 = 1936 mm^2

$\tau_{maxi} = \dfrac{M_T}{2ea} = \dfrac{M_T}{2 \times 6 \times 1936} \leq 40$

d'où : $M_T \leq 930$ Nm

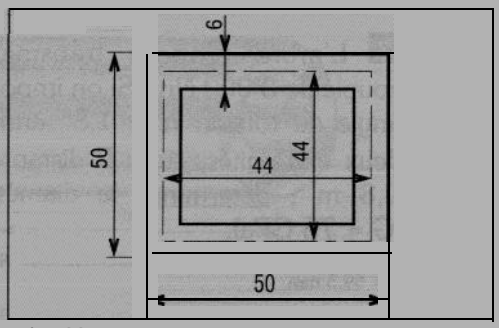


Fig. 23

Exemple 2 : poutre de section rectangulaire creuse avec deux épaisseurs différentes en A et B milieu des deux côtés. Déterminer les contraintes en ces points si le couple transmis est de 100 Nm.

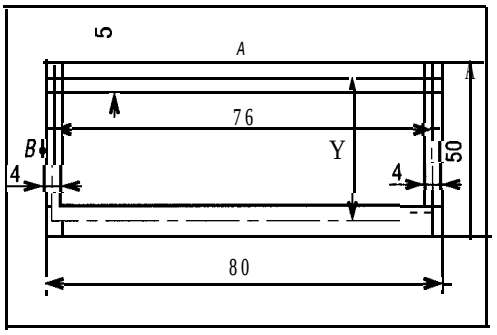


Fig. 24

$$a = (80 - 4)(50 - 5) = 76 \times 45 = 3\,420 \text{ mm}^2$$

$$\tau_A = \frac{M_T}{2 e_A a} = \frac{100\,000}{2 \times 5 \times 3\,420} = 2{,}92 \text{ MPa}$$

$$\tau_B = \frac{M_T}{2 e_B a} = \frac{100\,000}{2 \times 4 \times 3\,420} = 3{,}65 \text{ MPa}$$

Remarque : le calcul de l'angle de torsion exige un calcul intégral sur le pourtour de la section et le long de la ligne médiane.

$$\theta = \frac{M_T}{4 G a^2} \oint \left(\frac{ds}{e}\right)$$

Pour l'exemple 2, l'épaisseur e est constante par tronçons et le calcul est simplifié. Si G = 40 GPa (bronze) :

$$\theta = \left(\frac{100\,000}{4 \times 3\,420^2 \times 40\,000}\right)\left(2 \times \frac{76}{5} + 2 \times \frac{45}{4}\right) = 2{,}83 \times 10^{-6} \text{ rad.mm}^{-1}$$

$$\theta = 0{,}162° \text{ m}^{-1}$$

EXERCICES À RÉSOUDRE

1 Soit une éprouvette cylindrique en cuivre de 25 mm de diamètre soumise à un couple de 2 10 Nm lors d'un essai de torsion. L'angle de torsion mesuré est de 4,9 degrés pour une longueur de 1 m. **a)** Calculer le module d'élasticité transversal G du cuivre testé. **b)** Déterminer l'angle de torsion d'une poutre du même matériau, de même diamètre et de longueur 1,8 m, si elle supporte une contrainte de cisaillement maximale de 140 N.mm^{-2}.

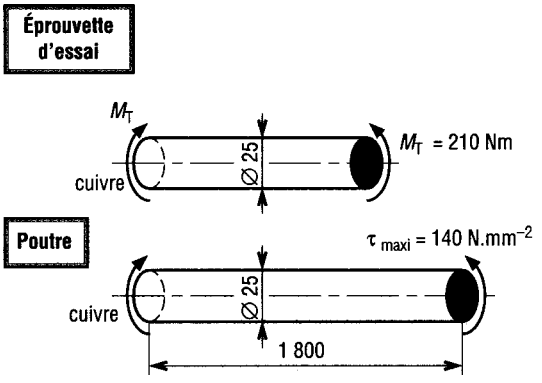


Fig. 25

Réponse

$G = 64\,000$ MPa ; $\alpha = 18°$.

❑ L'arbre proposé transmet un couple de 3 000 Nm. Si on impose un angle de torsion a = 1,8° entre les deux extrémités, A et B distantes de 0,8 m ; déterminer le diamètre d (G = 75 GPa).

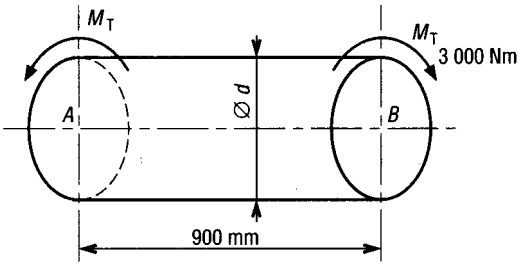


Fig. 26

Réponse

$d = 69{,}5$ mm.

3 Reprendre l'exercice 2 avec un arbre creux tel que le diamètre intérieur d soit égal à 0,8 fois le diamètre extérieur D ($d = 0{,}8\,D$).

4 Déterminer la puissance transmise et la contrainte de cisaillement maximale dans l'arbre si le diamètre d'enroulement de la courroie sur la poulie est de 100 mm et si T_1 = 1 000 N et T_2 = 400 N sont les tensions respectives des deux brins de celle-ci.
N_{arbre} = 1 000 tr.min^{-1}.

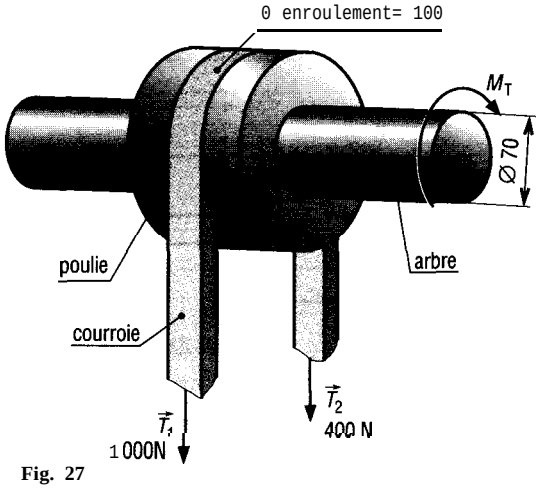


Fig. 27

5 L'arbre plein, de diamètre d et de longueur 2 m, relie un moteur à un récepteur par l'intermédiaire de deux accouplements. La puissance transmise est de 20 kW à 1 500 tr.min^{-1}. Si on impose une contrainte de cisaillement admissible de 80 MPa pour le matériau de l'arbre, déterminer le diamètre d nécessaire.

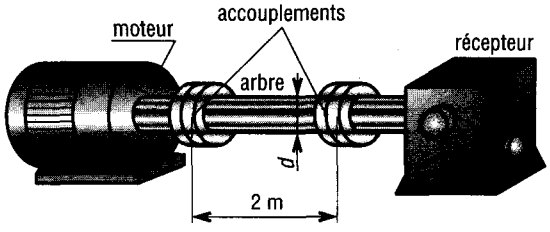


Fig. 28

6 Reprendre l'exercice 5 ; on impose un angle de torsion de 0,2° entre les deux extrémités de l'arbre, G = 80 GPa.

Réponse

$d \geqslant 55{,}2$ mm.

7 L'arbre creux proposé tourne à la vitesse de 180 tr.min^{-1}. Un système de mesure stroboscopique indique un angle de torsion a = 3" entre les deux extrémités A et B, G = 77 GPa.
Déterminer la puissance transmise et la contrainte de cisaillement maximale.

Réponse

P = 267 kW ; τ_{maxi} = 80,5 MPa.

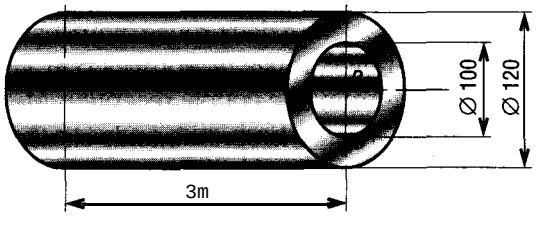


Fig. 29

8 Soit un arbre d'hélice de bateau de 15 m de long. L'arbre est creux, le rapport entre le diamètre intérieur **d** et le diamètre extérieur D est égal à 0,6. L'arbre transmet une puissance de 4,5 mégawatts à la vitesse de 350 $tr.min^{-1}$. La contrainte de cisaillement admissible de l'acier de l'arbre est de 80 $N.mm^{-2}$. a) Déterminer les diamètres intérieur et extérieur **d** et D de cet arbre. b) Calculer l'angle de torsion à pleine puissance entre les deux extrémités distantes de 15 m, G = 80 000 $N.mm^{-2}$.

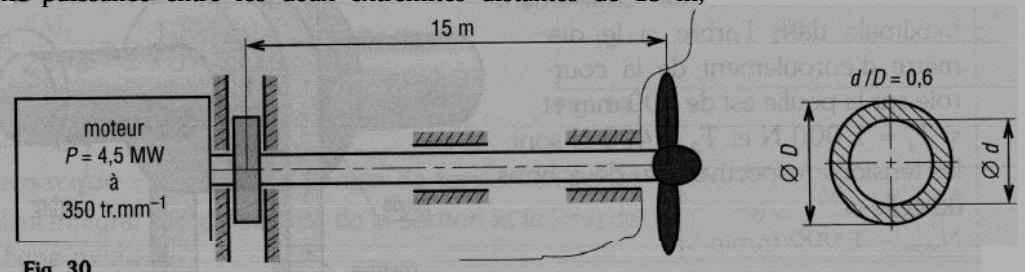


Fig. 30

9 Un arbre de transmission distribue la puissance entre trois roues dentées A, B et C. Si les couples respectifs sont C_A = 500 Nm, C_B = − 1500 Nm et C_C = 1 000 Nm, déterminer les contraintes de cisaillement maximales dans les tronçons **AB** et BC.

Réponse

τ_{AB} = 94,3 MPa ; τ_{BC} = 79,6 MPa

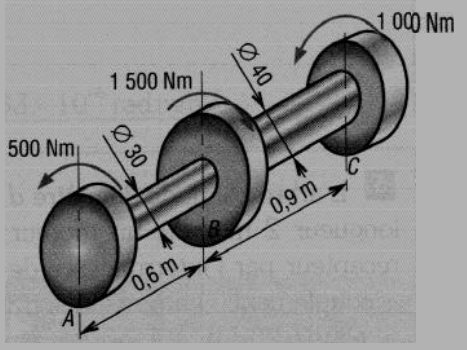


Fig. 31

10 Reprendre l'exercice 9 avec des puissances transmises P_A = 30 kW ; P_B = − 90 kW ; P_C = 60 kW à la vitesse de 480 $tr.min^{-1}$.

11 L'arbre proposé distribue la puissance entre quatre roues dentées A, B, C et D. Les couples transmis sont C_A = 600 Nm, C_B = − 1 400 Nm, C_C = 266 Nm et C_D = 534 Nm. Si la contrainte de cisaillement admissible est de 50 MPa, déterminer d_1, d_2 et d_3.

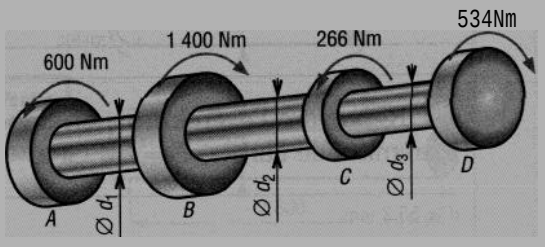


Fig. 32

12 L'arbre proposé de diamètre constant d = 100 mm transmet la puissance entre deux roues motrices A et C et deux roues réceptrices B et D. a) Déterminer le couple récepteur M_B. b) Déterminer la contrainte de cisaillement maximale dans l'arbre. c) Calculer l'angle de torsion α entre les deux extrémités A et D si G = 8 000 daN.mm^{-2}.

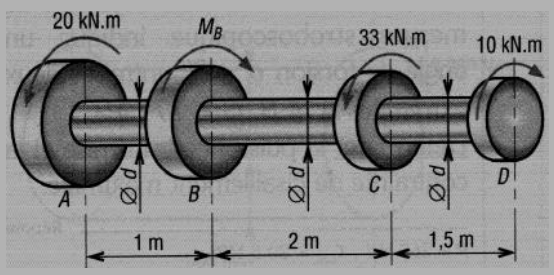
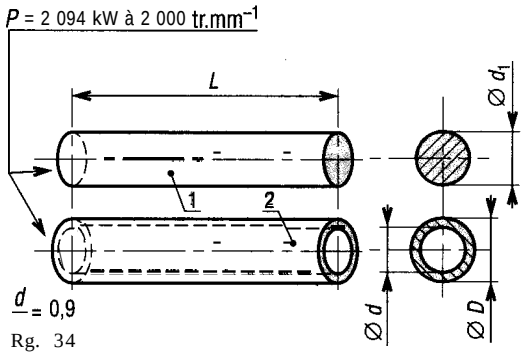


Fig. 33

❑ Soient deux arbres de transmission de même longueur L transmettant la même puissance (P = 2 094 kW) à la même vitesse de rotation (2 000 $tr.min^{-1}$). Le premier est plein, diamètre extérieur d_1, le second est creux, diamètre extérieur D et diamètre intérieur d ; d/D = 0,9. Si on impose un angle de torsion maximal de $0{,}28°.m^{-1}$ pour les deux arbres, déterminer d, D, d_1 et le rapport des masses m_2/m_1 à déformation égale.



Rg. 34

❑ Reprendre l'exercice 13 avec $d = kD$. Montrer que $\frac{m_2}{m_1} = \sqrt{\frac{1-k^2}{1+k^2}}$. Comparer avec le paragraphe VIII de la partie cours.

❑ L'arbre, avec une gorge de 15 mm de rayon, transmet un couple de torsion M_T de 10 kNm. Déterminer la contrainte de cisaillement maximale en tenant compte des concentrations de contraintes.

Réponse

τ_{maxi} = 71,3 MPa.

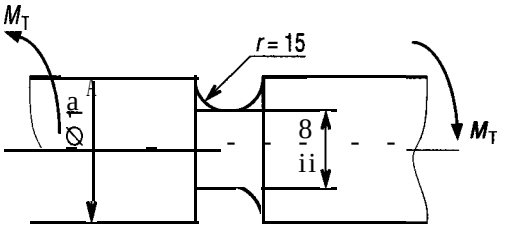


Fig. 35

❑ Un trou de perçage de 8 mm est foré dans un arbre de 80 mm de diamètre. Si la contrainte admissible au cisaillement du matériau de l'arbre est de 100 MPa, déterminer le couple transmissible.

Réponse

3,17 kNm.

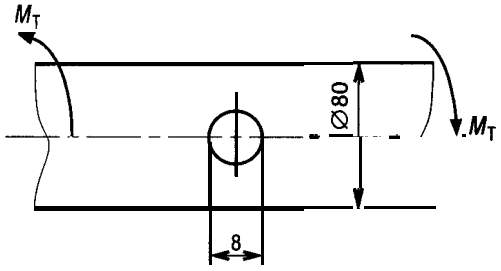


Fig. 36

❑ Reprendre l'exercice 16 avec un arbre creux (D = 80, d = 64) et un trou de perçage de 16 mm.

❑ Un arbre de transmission transmet une puissance de 300 kW à 480 $tr.min^{-1}$. Si la contrainte de cisaillement admissible est de 60 MPa, déterminer le rayon r minimum pour le raccordement entre les deux cylindres.

Réponse

r_{mini} = 2 mm.

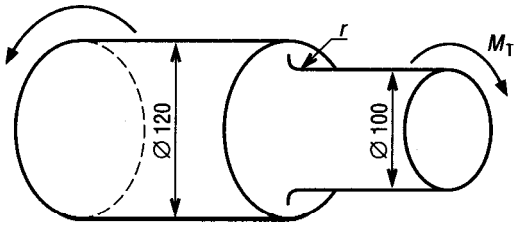


Fig. 37

❑ Un tube carré de 60 mm de côté, en aluminium (G = 28 GPa), supporte un couple de torsion de 400 Nm. a) Calculer l'épaisseur e si la contrainte admissible au cisaillement est de 30 MPa. b) Calculer e si on impose un angle unitaire de torsion de 0,033 $rad.m^{-1}$.

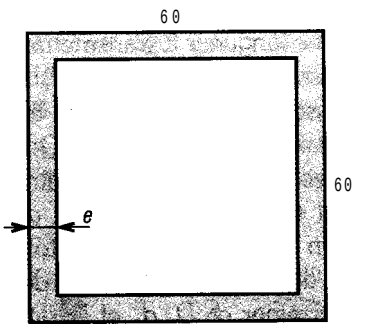


Fig. 38

Réponse

e_1 = 3,02 mm ; e_2 = 4,64 mm.

❑ Un tube de section rectangulaire creuse (40 ☒ 60), avec deux épaisseurs différentes e_1 = 3 et e_2 = 5, supporte un couple de torsion de 350 Nm. Déterminer les contraintes de cisaillement maximales en A et B milieux des côtés.

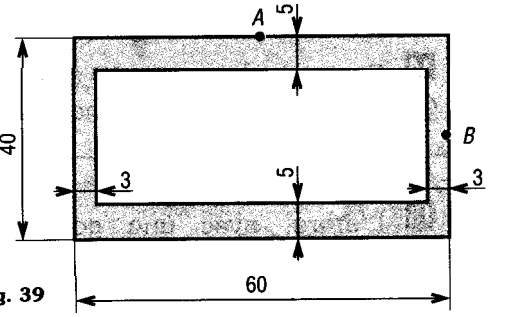


Fig. 39

Réponse

τ_A = 18,5 MPa ; τ_B = 30,9 MPa.

❑ Reprendre l'exercice 20 avec un tube de 20 ☒ 50 ; $e_1 = e_2$ = 3 mm et un couple de torsion de 120 Nm. Déterminer la contrainte de cisaillement maximale.

❑ Un arbre creux de diamètre extérieur 100 mm et d'épaisseur e supporte un couple de 426 Nm. Si la contrainte admissible au cisaillement est de 80 MPa, déterminer la valeur de e : a) par la méthode du tube mince ou de la membrane ; b) par les formules de torsion usuelles.

Réponse

e_1 = 3,65 mm ; e_2 = 3,80 mm.

23 Un arbre composite, bimétallique se compose d'une âme B en acier (d = 40) collée dans un tube en laiton A (d = 40, D = 50). L'arbre supporte un couple de torsion M_T = 10 kNm.
Déterminer les contraintes maximales dans A et B et l'angle de torsion a de l'arbre.

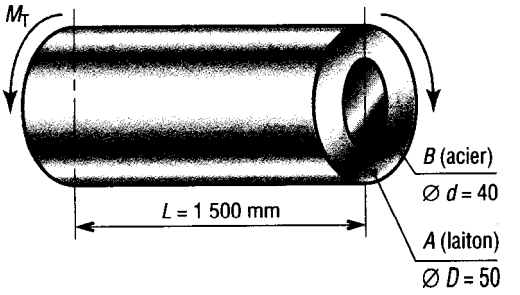


Fig. 40

Réponse

Problème hyperstatique ;
τ_B = 27,5 MPa ; τ_A = 17,5 MPa ; a = 2,05

24 FLEXION GÉNÉRALITÉS DIAGRAMMES

OBJECTIFS

- Proposer une schématisation usuelle pour représenter les liaisons et les actions dans le cas de la flexion.
- Définir les efforts tranchants T, les moments fléchissants M_f et les diagrammes correspondants avec la convention des efforts à gauche.
- Préciser les principaux cas rencontrés : charges concentrées ou charges réparties, poutres sur deux appuis ou poutres encastrées.

Les poutres et les arbres fléchis sollicités en flexion sont parmi les éléments les plus importants de la résistance des matériaux. Cinq chapitres de cet ouvrage sont consacrés à l'étude de la flexion.

1 • Schématisations des liaisons • Actions des supports

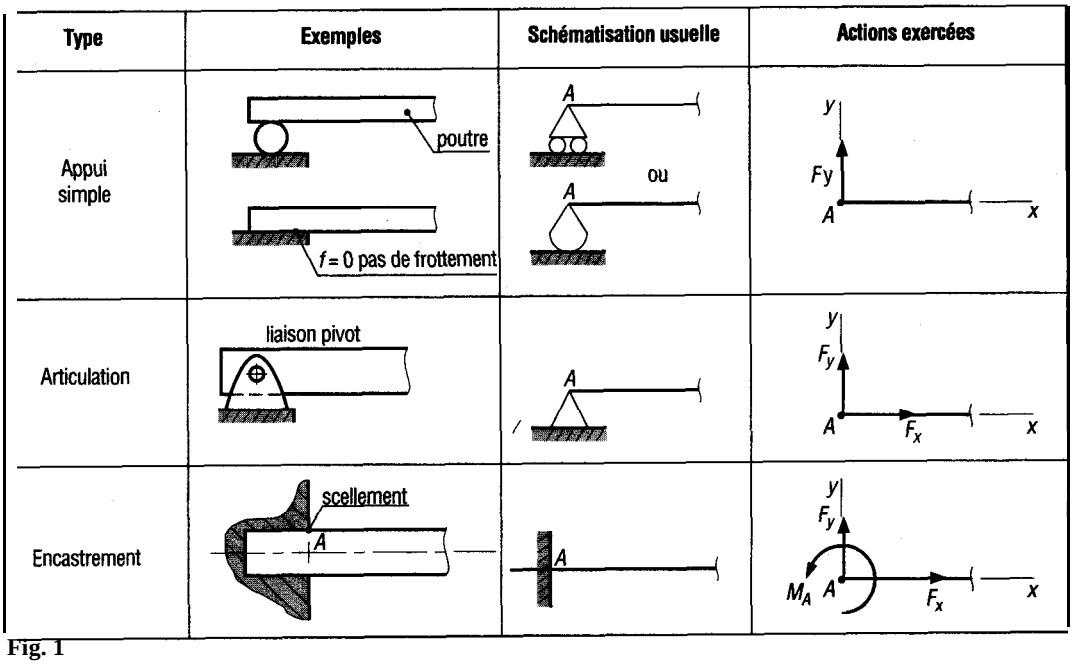


Fig. 1

La schématisation proposée est commune à de nombreux pays et de multiples ouvrages de référence. Dans le cas des problèmes plans (système de forces coplanaires), la schématisation des liaisons et des efforts exercés se ramène à trois cas types : appui simple, articulation et encastrement (fig. **1)**.

Exemple : planche de plongeoir.
La poutre (planche 1) est schématisée par sa ligne moyenne AC. La liaison en A (pivot 1/0) est une articulation et la liaison en B entre 1 et 2 se ramène à un appui simple. $\overrightarrow{P}$ (900 N) schématise l'action du nageur.

Équilibre :

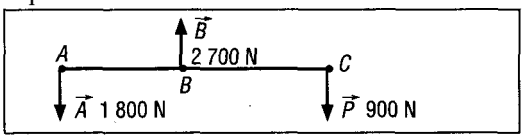


Fig. 2

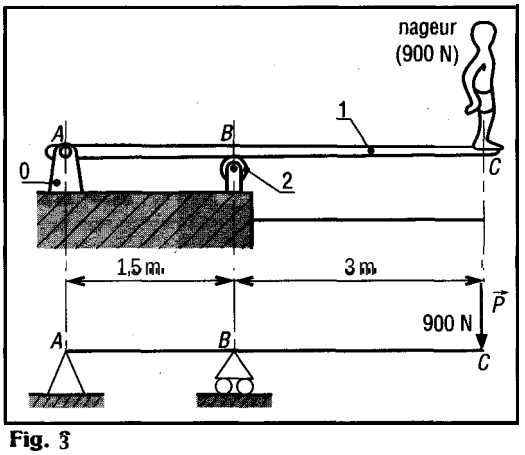


Fig. 3

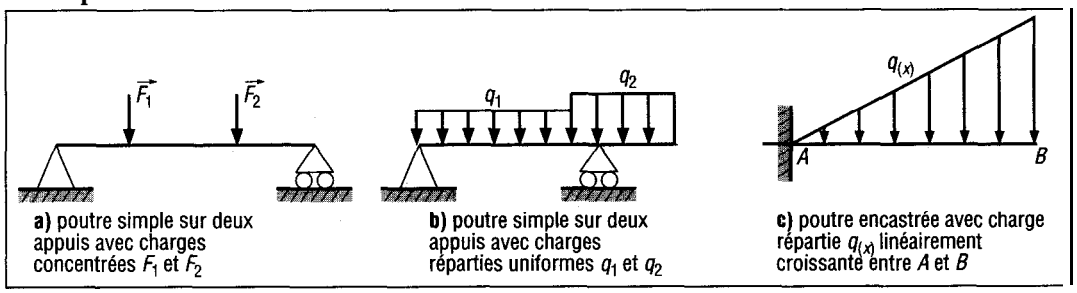
Remarques : dans la plupart des schématisations, la poutre est modélisée par sa ligne moyenne. Dans le cas des problèmes dans l'espace, avec liaisons complexes, la schématisation normalisée des liaisons est utilisable (voir chapitre « torseur », partie statique).

Poutres usuelles	Exemples	Schématisations	Observations
Poutre simple sur deux appuis	F variante	F	isostatique
Poutre continue			hyperstatique
Poutre encastrée (cantilever)			isostatique
Poutre encastrée avec appui à l'extrémité			hyperstatique

Fig. 4

Remarque : les poutres sont identifiées à partir des charges extérieures exercées.

Exemples



a) poutre simple sur deux appuis avec charges concentrées F_1 et F_2

b) poutre simple sur deux appuis avec charges réparties uniformes q_1 et q_2

c) poutre encastrée avec charge répartie $q_{(x)}$ linéairement croissante entre A et B

Fig. 5

II - Efforts intérieurs : efforts tranchants et moments fléchissants

Dans le cas de la flexion, les efforts intérieurs dans n'importe quelle section droite se réduisent à un effort tranchant T (perpendiculaire à la ligne moyenne) et à un moment fléchissant M_f (perpendiculaire à la ligne moyenne et à T).

Convention de signe 1: « somme des efforts à gauche de S »

Voir principe dans le chapitre « généralités de la résistance des matériaux ».

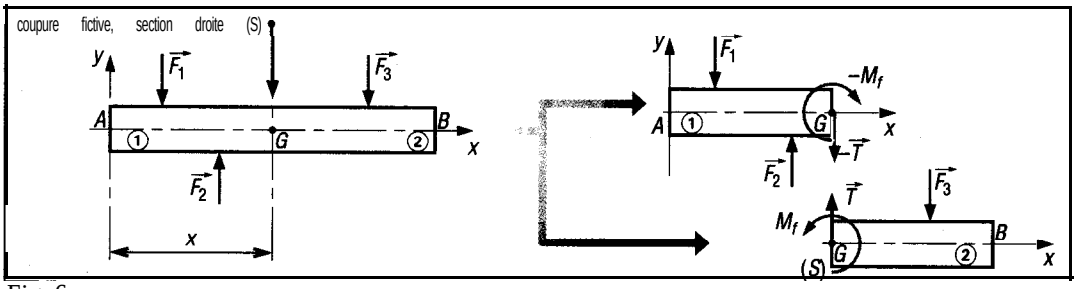


Fig. 6

Pour faire apparaître les efforts intérieurs, on effectue une coupure fictive (section S) à la distance x de l'origine A. En isolant le tronçon 1 ou le tronçon 2, on obtient T et M_f. G est le barycentre, ou le centre de gravité, ou le centre de surface, de la coupure S. Avec la convention choisie, T et M_f apparaissent positivement sur le tronçon 2, à droite, et négativement sur le tronçon 1.

Cas d'un système de forces planes (x, y)

$\vec{T}$ = somme vectorielle de toutes les forces extérieures transversales situées gauche de $S = (\vec{F_1} + \vec{F_2})$

ou $\vec{T}$ = - somme vectorielle des forces transversales à droite de $S = -\vec{F_3}$

M_f = moment résultant en G de toutes les actions extérieures à gauche de $S = M_G(\vec{F_1}) + M_G(\vec{F_2})$

ou M_f = - moment résultant en G des actions à droite de $S = -M_G(\vec{F_3})$

En flexion pure : $M_f \neq 0$ avec $T = 0$

En flexion simple : $M_f \neq 0$ avec $T \neq 0$

Remarque : pour le calcul de M_f, ne prendre en compte que les actions donnant des moments portés par la direction de l'axe z. La direction de T est celle de l'axe y.

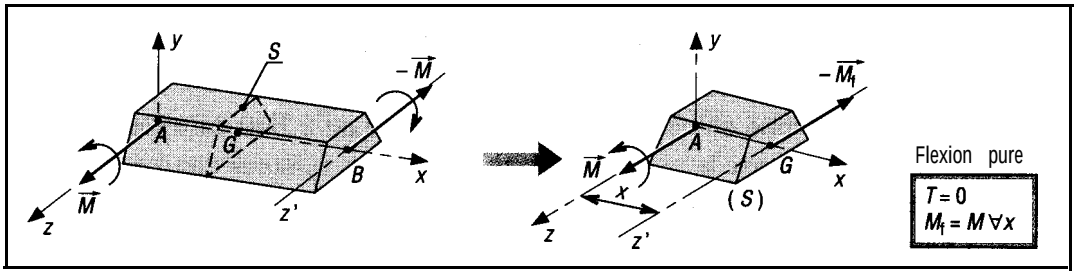


Fig. 7

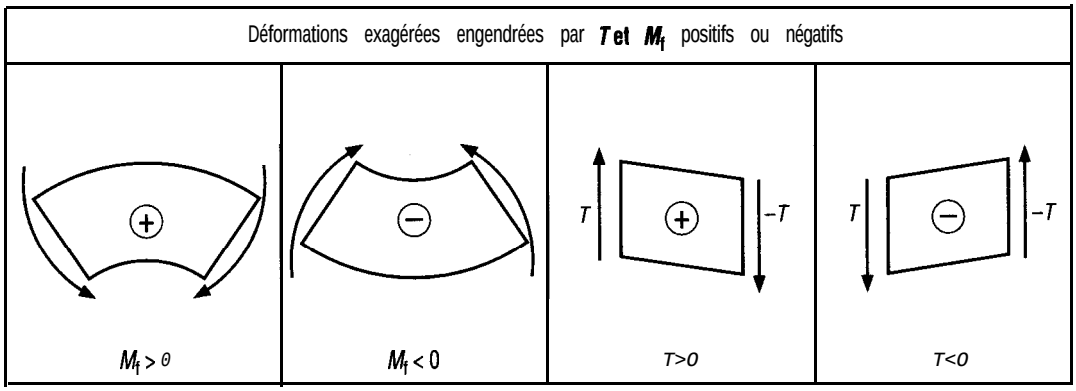


Fig. 8

III • Diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants

La valeur des efforts tranchants (T) et des moments fléchissants varie avec la position (x) de la coupure. Les diagrammes des T et des M_f, graphes mathématiques de type (x, y), permettent de décrire les variations de ces deux grandeurs et ainsi repérer les maximums qui seront utilisés lors des calculs des contraintes.

1. Exemple 1: essai de flexion

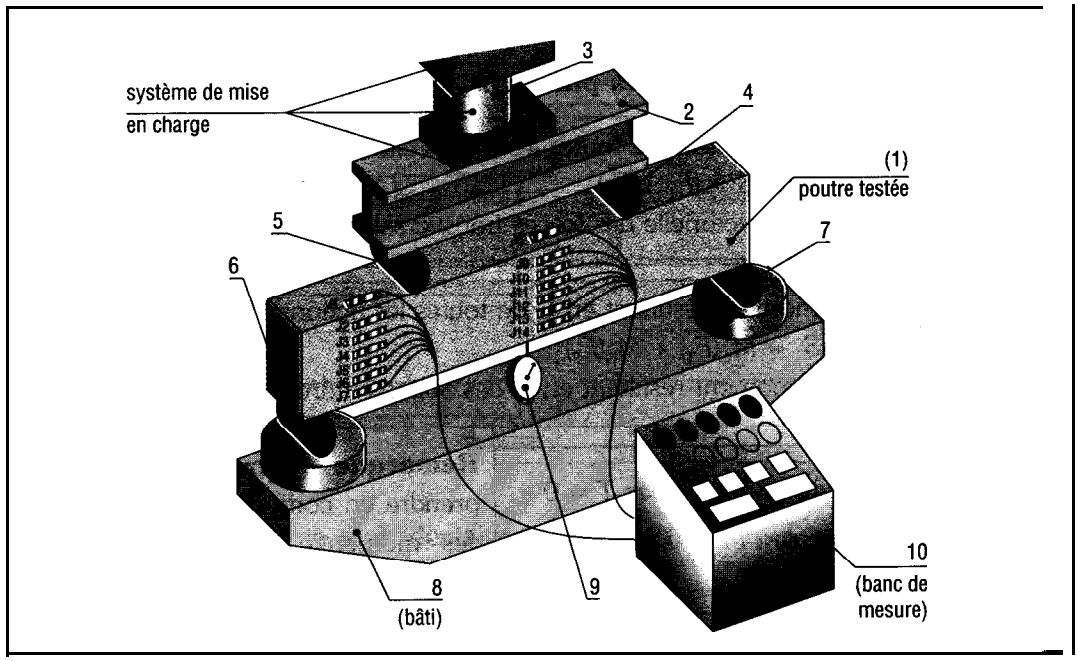


Fig. 9

Le dispositif de mise en charge exerce une poussée de 2 000 daN qui se répartit en C et D. Le bâti supporte la poutre testée en A et B. Les mesures des déformations et des contraintes sont réalisées à partir de jauges d'extensométrie J_1 à J_{14}.
La symétrie du chargement entraîne l'égalité des actions exercées en A, B, C et D : A = B = C = D = 1 000 daN, le poids de la poutre étant négligé.

L'étude se ramène au dessin suivant :

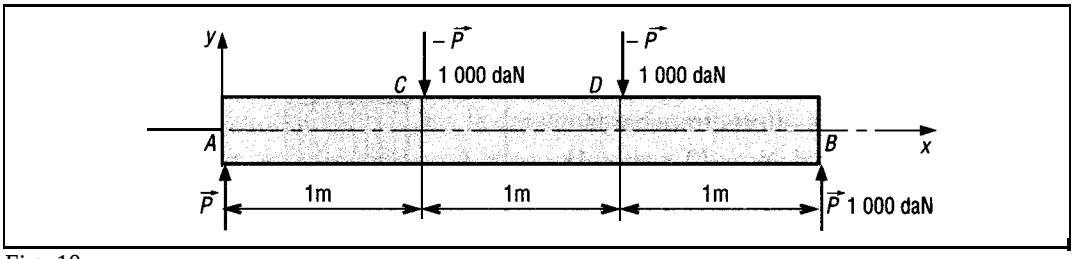


Fig. 10

Remarque : entre A et C (C non compris), il y a une seule force à gauche de la coupure S, et ceci quelle que soit la position de S entre A et C. Entre C et D (D non compris), il y a deux forces à gauche de S et trois entre D et B (B non compris). L'étude des T et des M_f doit donc être réalisée en trois parties.

a) Étude du tronçon AC

$A \leqslant G < C$ ou $0 \leqslant x < 1$ m

Une seule force à gauche, $\vec{P}$ en A.

$T_{AC} = P = 1\,000$ daN (pour tout x)

M_{fAC} = moment en G de $\vec{P} = M_G(\vec{P}) = -P.\,x = -1000\,x$

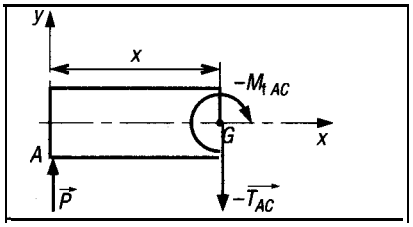


Fig. 11

b) Étude du tronçon CD

$C \leqslant G < D$ ou $1 \leqslant x < 2$

Deux forces à gauche de S, $\vec{P}$ en A et $-\vec{P}$ en C.

$T_{CD} = P - P = 0$ (pour tout x)

$M_{fCD} = M_G(\vec{P}$ en A) + $M_G(-\vec{P}$ en C)

$= -P.x + P(x-1) = -P \times 1 = -1\,000$ daNm

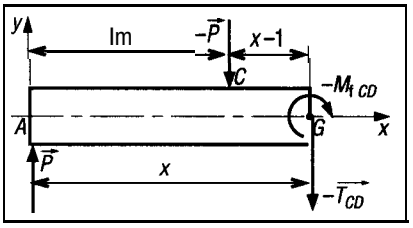


Fig. 12

Remarque : M_{fCD} est toujours constant entre C et D et T_{CD} toujours nul, on est dans un cas de flexion pure.

c) Étude du tronçon DB

$D \leqslant G < B$ ou $2 \leqslant x < 3$

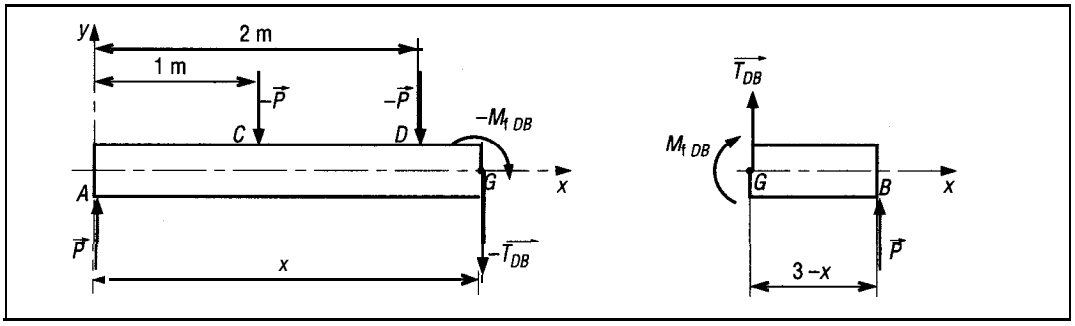


Fig. 13

Trois forces à gauche de (S) et une force à droite, faisons le calcul des deux façons possibles :

Avec le tronçon AG : $T_{DB} = P - P - P = -P = -1\,000$ daN (pour tout x)

$M_{fDB} = M_G(P$ en A) + $M_G(-\vec{P}$ en C) + $M_G(-\vec{P}$ en $D)$

$= -P.x + P(x-1) + P(x-2) = 1\,000\,(x-3)$

Avec le tronçon GB : $T_{DB} = -$ (P en B) $= -(P) = -1\,000$

$M_{fDB} = -M_G(\vec{P}$ en $B) = -P\,(3 - x) = 1\,000\,(x-3)$

d) Diagrammes

Rassemblons les résultats des trois tronçons sur un même graphe.

Diagramme des efforts tranchants :

T_{AC} = 1 000 daN $(0 \leqslant x < 1)$

T_{CD} = 0 $(1 \leqslant x < 2)$

T_{DB} = − 1 000 daN $(2 \leqslant x < 3)$

Diagramme des moments fléchissants :

M_{fAC} = − 1 000 x

M_{fCD} = − 1000 daNm

M_{fDB} = *1 000 (x − 3)*

$M_{f\ maxi}$ = − 1 000 daNm

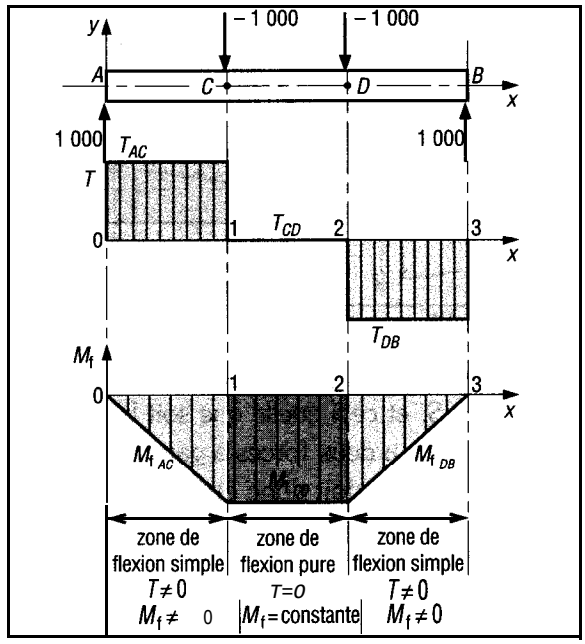


Fig. 14

2. Correspondance entre les **diagrammes**

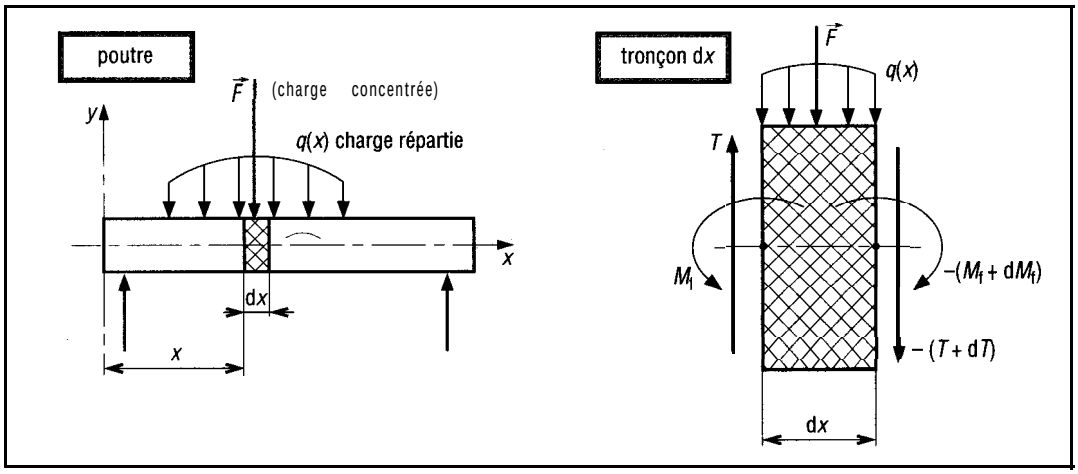


Fig. 15

L'étude de l'équilibre du tronçon de largeur dx appartenant à la poutre, compte tenu des charges indiquées, donne :

$$\frac{dT}{dx} = -q(x)$$ [pente sur le diagramme des T] = − [charge répartie q(x)]

$$\frac{dM_f}{dx} = -T$$ [pente sur le diagramme des M_f] = − [effort tranchant T]

La dérivée de l'effort tranchant est égale à moins la charge répartie q(x).
La dérivée du moment fléchissant est égale à moins l'effort tranchant T.

Remarque : les T et M_f peuvent être obtenus par intégration sur des intervalles successifs.

$$T = \int q(x)\,dx \quad et \quad M_f = -\int T dx$$

3. Exemple 2 : poutre encastrée avec charges concentrées

Remarque préliminaire : en calcul manuel, avec la convention des efforts à gauche, l'étude des poutres encastrées est simplifiée lorsque l'encastrement est placé à droite de la poutre, et inversement si on utilise la convention des efforts à droite.

La poutre proposée est encastrée en A et supporte deux charges concentrées : une force $\vec{F}$ en B et un couple pur M en C.

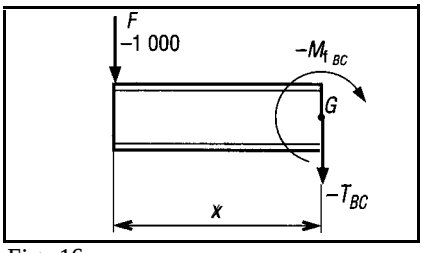


Fig. 16

a) Actions exercées par l'encastrement sur la poutre

Le type de l'action est décrit au paragraphe 1 et le principe fondamental de la statique donne :

$Ax = 0$; $Ay = F = 1\,000$ N ;

$M_A = -(M + F \,.\, L) = 1\,000 - 2\,000 = -1\,000$ Nm

b) Étude du tronçon *BC*

$0 \leqslant x < 1$

T_{BC} = F = − 1 000 N constant Vx

$M_{fBC} = M_G(\vec{F}) = F \,.\, x$

M_{fBC} = 1 000 x (Nm)

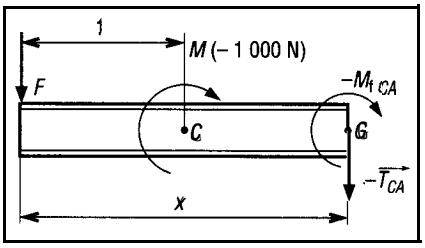


Fig. 17

c) Étude du tronçon CA

$1 \leqslant x < 2$

$T_{CA} = F = T_{BC} = -1\,000$ N $\forall x$

$M_{fCA} = M_G(\vec{F})$ + M = $F \,.\, x - 1\,000$

M_{fCA} = 1 000 x − 1000 (Nm)

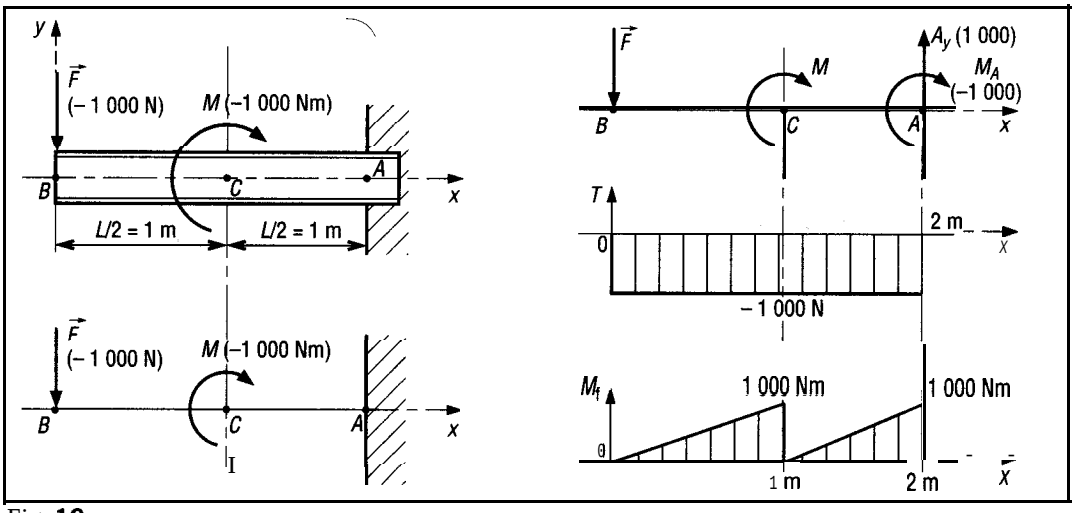


Fig. **18**

Remarque : pour x = 2 ; $M_{fCA} = 1\,000$ Nm $= -M_A$; $T_{CA} = -1\,000$ N $= -A_y$.

IV ▪ Diagrammes avec charges réparties

Les charges réparties ont pour origine les actions de pesanteur ou poids et des actions de contact diverses (vent, neige, pression d'un fluide, etc.). Elles peuvent être uniformes ou constantes mais peuvent aussi être variables.

1. Exemple 1: charge répartie uniforme ou constante

La poutre proposée est réalisée à partir d'un profilé IPE dont le poids est de 40 daN par mètre.
$\vec{q} = -40\ \vec{y}$ ou q = 40 daN.m^{-1}

a) Actions aux appuis en A et B

A, = $B_x = 0$

$A_y + B_y = qL = 40 \times 4 = 160$ daN par symétrie $A_y = B_y = \frac{qL}{2} = 80$ daN

b) Efforts intérieurs T_{AB} et M_{fAB}

La charge répartie q sur la longueur x peut être remplacée par sa résultante $\vec{R}$ (R = qx) située à $x/2$ de A et de G.

$$T_{AB} = A_y - R = \frac{1}{2}qL - qx = 80 - 40x$$

$$M_{f\,AB} = M_G(\vec{A_y}) + M_G(\vec{R})$$

$$= -A_y \times x + R\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{qLx}{2} + \frac{qx^2}{2}$$

$$= \frac{qx}{2}(x - L) = 20x(x - 4)$$

$$M_{f\,maxi} = -\frac{qL^2}{8} = -800\,\text{Nm} \quad \text{pour} \quad x = \frac{L}{2}$$

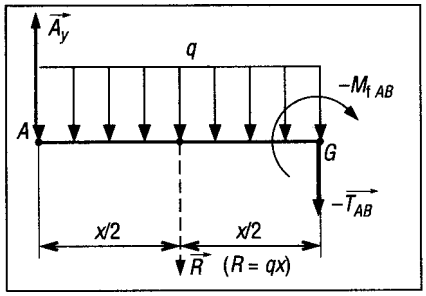


Fig. 19

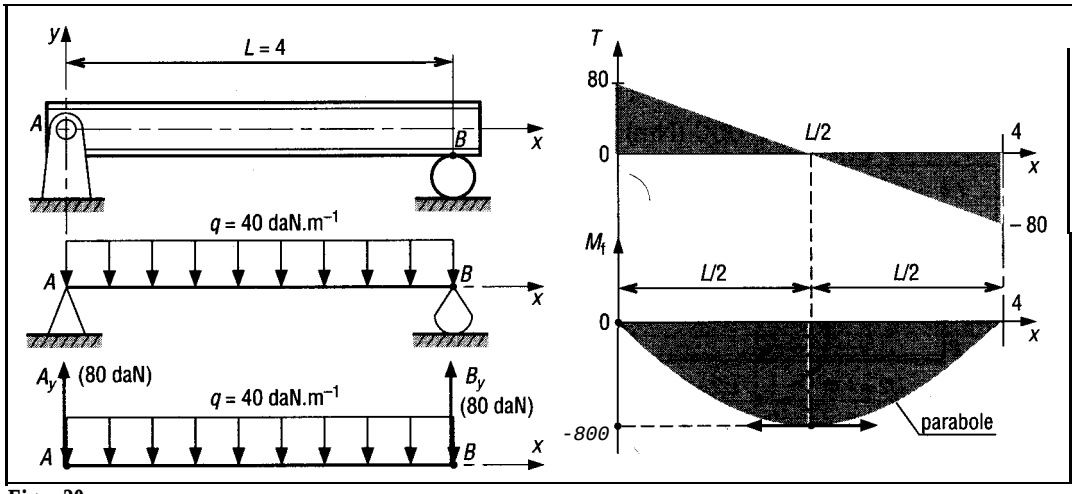


Fig. 20

2. Exemple 2 : charge répartie linéairement croissante ou décroissante

Prenons le cas d'une poutre encastrée en A supportant la charge linéairement croissante indiquée.

a) Charge répartie q(x)

$$\frac{q(x)}{x} = \frac{q_A}{L} \Rightarrow q(x) = \left(\frac{1\,500}{3}\right)x = 500x$$

b) Actions à l'encastrement A

On remplace la charge répartie ***q(x)*** sur la longueur L par sa résultante R', située à $L/3$ de A : $A_x = 0$; $A_y = R' = q_A \cdot L/2 = 2\,250$ N

$$M_A = -M_A(\vec{R'}) = -\frac{q_A L}{2} \times \frac{L}{3} = -\frac{q_A L^2}{6} = -2250 \text{ Nm}$$

c) Efforts intérieurs T_{BA} et M_{fBA}

La charge répartie q sur la longueur x peut être remplacée par sa résultante R située à $x/3$ de G et telle que $R = \frac{q_G x}{2}$

$$\vec{T_{AB}} = \vec{R}$$
$$T_{BA} = -q_G \frac{x}{2} = -500x\left(\frac{x}{2}\right) = -250x^2$$
$$M_{fBA} = M_G(\vec{R}) = R\left(\frac{x}{3}\right) = 250x^2\left(\frac{x}{3}\right) = 83{,}3x^3$$

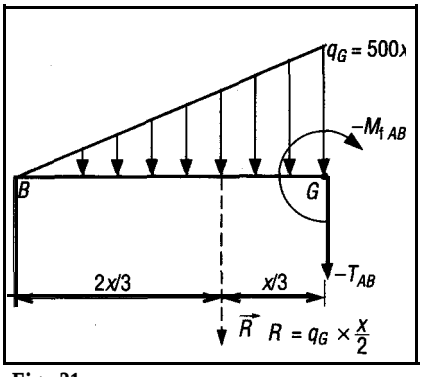
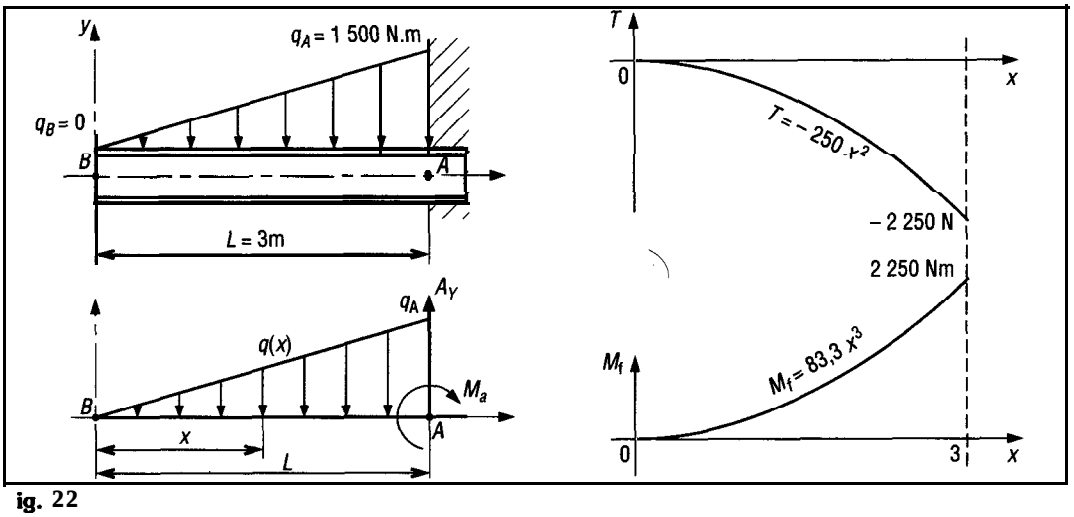


Fig. 21

Le moment fléchissant est maximal pour x = L, à l'encastrement.
$M_{f\,maxi} = 83{,}3\,L^3 = 2\,250$ Nm



ig. 22

EXERCICES À RÉSOUDRE

❑ La planche ABC du plongeoir est articulée en A sur un socle et en appui simple en B sur un support fie. Le poids de la planche est négligé.

a) Déterminer les actions exercées par les appuis en A et B.

b) Tracer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants entre A et C.

Réponse

$A_x = 200$ daN; $B_y = 300$ daN; $M_{fmaxi} = 4$ kNm; $T_{maxi} = 200$ daN.

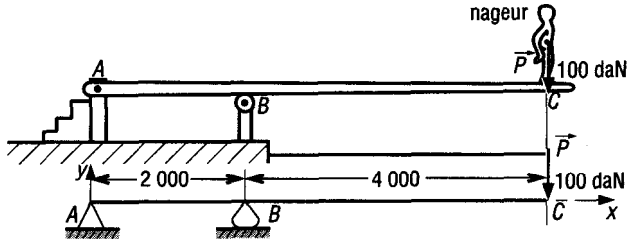


Fig. 23

❑ Le pont roulant propose se compose d'une poutre principale (profilé IPE), d'un palan mobile entre A et B soulevant une charge de poids $\vec{P}$ (P = 2 000 daN). La poutre principale est schématisée comme l'indique la figure, si $a = 2\,500$ et b = 3 000.

a) Déterminer les actions exercées par les appuis en A et B.

b) Tracer les diagrammes des efforts tranchants T et des moments fléchissants M_f entre A et B.

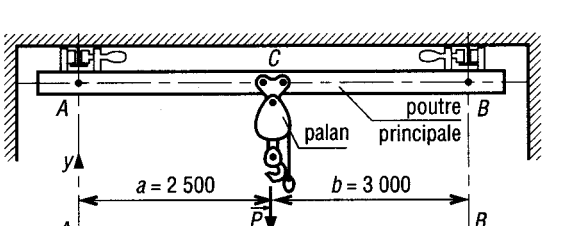


Fig. 24

❑ Reprendre l'exercice 2 en tenant compte du poids propre du profilé (50 daN par mètre) schématisé par la charge répartie q.

On se place dans le cas où $a = b = 2\,750$ mm

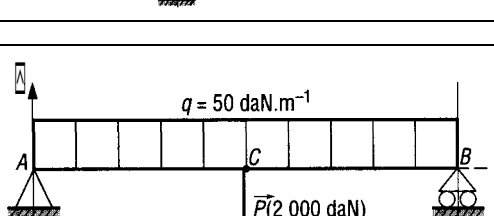


Fig. 25

❑ Un arbre d'essieu de wagon supporte deux charges $\vec{P}$, symétriquement en A et D, exercées par les paliers à roulement.

a) Déterminer les actions exercées par les roues (appuis B et C). P = 6 250 daN.

b) Tracer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchiits entre A et D.

Réponse

flexion pure entre B et C ; $B_y = C_y$ = 6 250 daN ;
T_{maxi} = 6 250 daN ; $M_{f maxi}$ = 17,5 kNm.

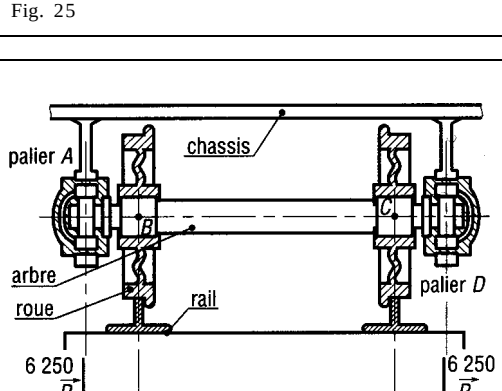


Fig. 26

5 L'arbre proposé est guidé en rotation par deux paliers à roulements A et B. T_1 (200 daN) et T_2 (300 daN) schématisent les actions des courroies sur les poulies (ou sur l'arbre).

a) Déterminer les actions exercées par les appuis en A et B.

b) Tracer les diagrammes des' T et des M_f le long de l'arbre entre C et D.

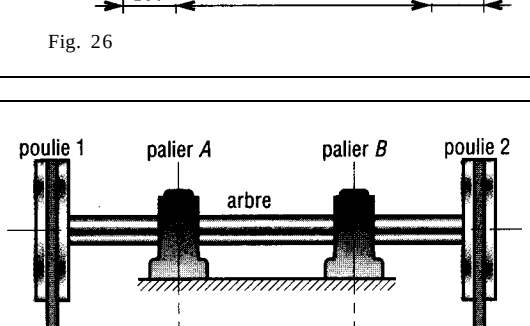


Fig. 27

❑ Reprendre l'exercice 5 avec la nouvelle configuration indiquée.
Comparer également les moments fléchissants maximums des deux configurations.

Réponse

B_y = 130 daN ; A, = 370 daN ; T_{maxi} = 200 daN ;
M_{fmaxi} = 1040 Nm.

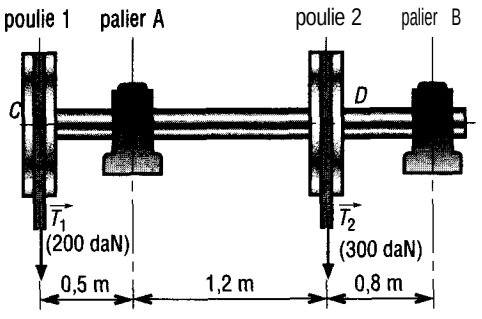
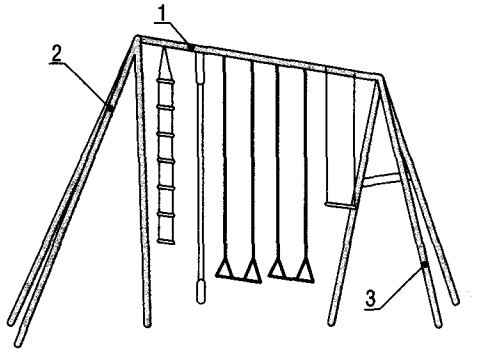


Fig.28

7 Un portique à cinq agrès se compose d'une poutre tubulaire (1) soutenue en A et B par deux trépieds (2 et 3). Le poids de la poutre est négligé, les actions $\vec{C}$, $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{F}$, $\vec{G}$, $\vec{H}$, $\vec{I}$ et $\vec{J}$ schématisent les charges exercées par les différents agrès.
a) Déterminer les actions exercées par les appuis en A et B.
b) Tracer les diagrammes des efforts tranchants T et des moments fléchissants M_f entre A et B.



Réponse

A, = 224 daN ; B_y = 176 daN ;
T_{maxi} = 224 daN ; M_{fmaxi} = 2 000 Nm.

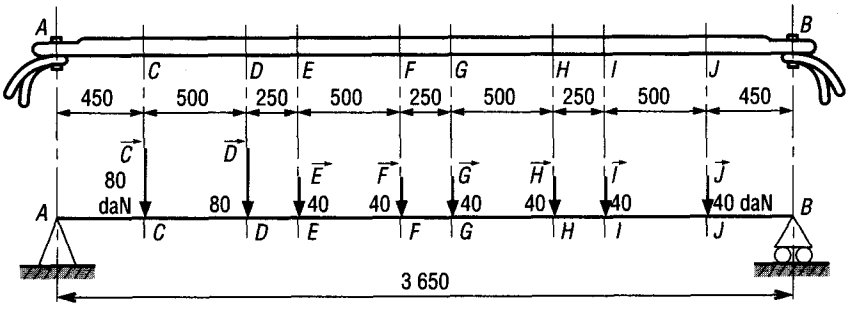


Fig. 29

❑ Reprendre l'exercice 8 avec le portique proposé, en remarquant que le chargement est symétrique.

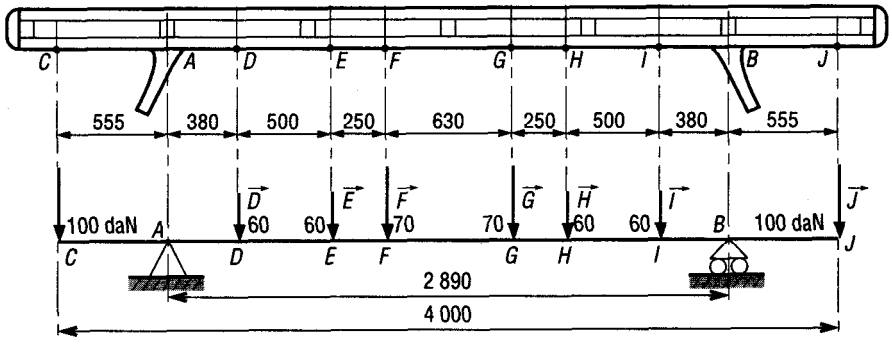


Fig. 30

❑ Une potence sur colonne destinée à la manutention se compose d'une flèche (1) encastrée (soudée) sur un support motorisé (2). L'ensemble peut pivoter (rotation d'axe vertical y) autour d'une colonne fie (3) grâce à un motoréducteur (5). Le levage de la charge est réalisé par le palan (4), mobile entre B et D, et d'une capacité de 1 000 daN. Étudions la flexion de la flèche (1), le palan est situé en D, cas le plus défavorable, le poids de la flèche est négligé.

Déterminer les actions exercées par l'encastrement H.

Tracer les diagrammes des T et des M_f entre H et D.

Réponse

H_y = 1 000 daN ; M_H = 45 kNm ; $M_{f\,maxi}$ = − 45 kNm en H.

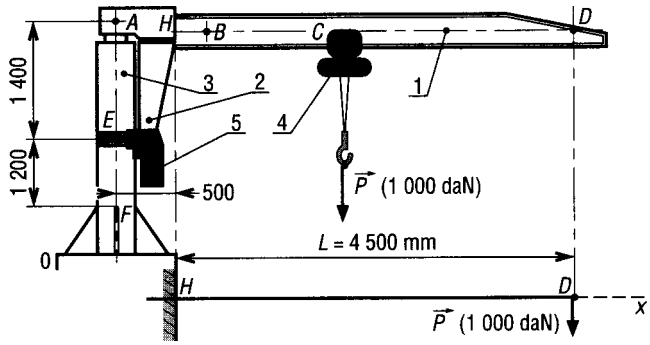


Fig. 31

❑ Renrendre l'exercice 9 en tenant compte du poids propre de la flèche (1), (50 daN.m^{-1}) schématisé par la charge répartie q.

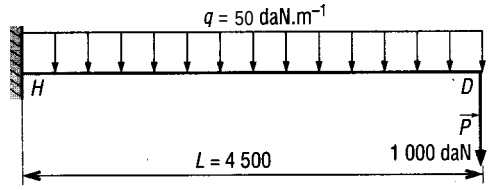


Fig. 32

11 Reprendre les données de l'exercice 9. L'étude de la colonne verticale AF, se ramène au schéma indiqué (poids négligé). Déterminer l'effort d'encastrement en F et tracer les diagrammes des T et des M_f.

Réponse

flexion pure entre F et E ;
$F_x = F_y = 0$;
M_F = 49 kNm = − $M_{f\,maxi}$

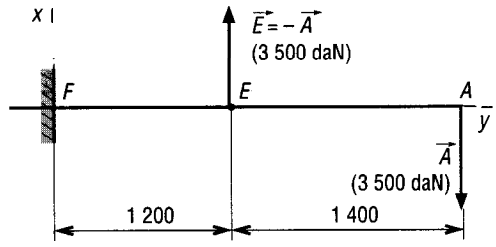


Fig. 33

❑ Pour régler la circulation automobile à un carrefour, on utilise une rampe BCD équipée de deux feux tricolores de poids P = 200 N. La rampe est encastrée (soudée) en B sur un tube AB. Le poids du profilé BCD étant négligé.

a) Déterminer les actions exercées par l'encastrement B.

b) Déterminer les diagrammes des T et des M_f entre D et B.

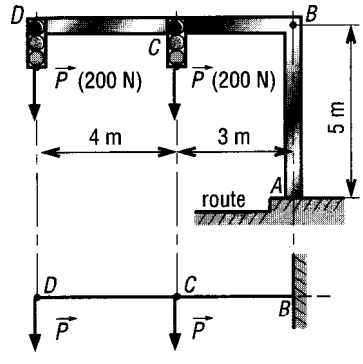


Fig. 34

[P Reprendre l'exercice 12 en tenant compte du poids du profilé *DCB*, 100 N par mètre, schématisé par la charge répartie q.

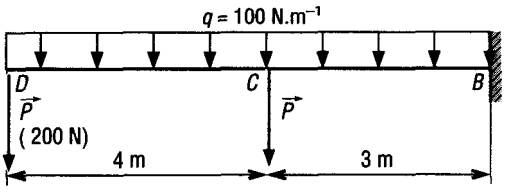


Fig. 35

❑ L'aile d'avion proposée est encastrée en B dans la carlingue de l'appareil. La charge répartie q (100 daN.m^{-1}) schématise l'action exercée par l'air sur l'aile et $\vec{C}$ (500 daN) l'effort encaissé par le train au moment de l'atterrissage.

Déterminer les actions supportées par l'encastrement B et les diagrammes des T et des M_f entre A et B.

Réponse

$B_y = -850$ daN ; $M_B = 9\,125$ Nm ;
$T_{maxi} = 850$ daN ; $M_{fmaxi} = -9\,125$ Nm.

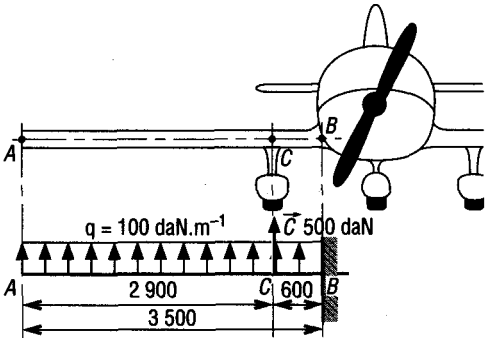


Fig. 36

15 Une cuve cylindrique est en appui sur deux supports A et B posés sur le sol. La charge répartie q (5 000 daN.m^{-1}) schématise le poids de la cuve et du liquide qui y est contenu. a) Si a = 1 250 et b = 3 000 mm, déterminer les actions sur les appuis en A et B et les diagrammes des T et des M_f entre C et D. b) Montrer que pour a = 0,207 L, tous les moments fléchissants maximum du graphe ont la même valeur.

Réponse

$4_r = B_y = 13\,750$ daN;
$T_{maxi} = 7\,500$ daN ; $M_{fmaxi} = 39{,}06$ kNm.

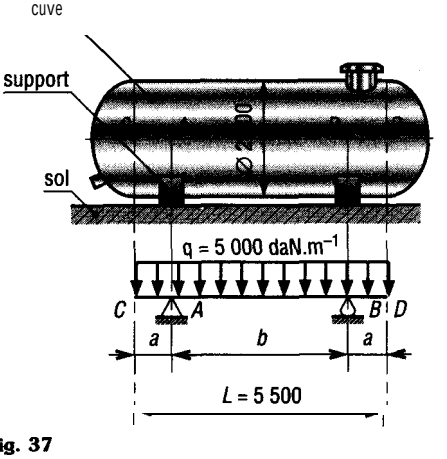


Fig. 37

❑ Le levage d'une antenne (*OAC*) pour station radio est réalisé par l'intermédiaire d'un treuil (3), d'un câble (4) accroché en A et B, et d'un mât rigide *OB* (2). L'antenne mesure 30 m, pèse 2 400 daN. On se place au départ du levage ; l'antenne est schématisée par une poutre sur deux appuis 0 et A, la charge répartie q schématise le poids de celle-ci.

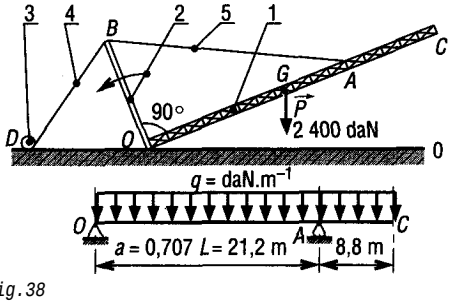


Fig.38

a) Déterminer q et les actions exercées par les appuis en 0 et A.

b) Tracer les diagrammes des T et des M_f le long de OC.

c) Que deviennent les moments fléchissants maximaux lorsque *a varie ?* Quel est le cas le plus favorable pour le levage ?

❑ Pour l'hélice d'avion proposée, l'action de l'air est schématisée par les charges réparties q_A, q_C, q_B = 0, linéairement décroissantes.

a) Déterminer le couple moteur M nécessaire pour entraîner l'hélice.

b) Tracer les diagrammes des T et des M_f entre A et C.

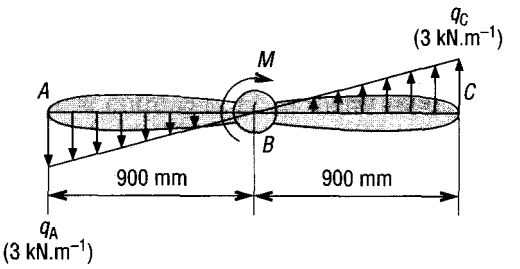


Fig. 39

Réponse

M = 1 620 Nm ; T_{maxi} = 1 350 N ;
M_{fmaxi} = 810 Nm.

❑ On suppose qu'un ski de fond supporte le poids total (P = 90 daN) d'un skieur. L'action de la neige sur le dessous du ski est schématisée par une charge répartie de forme trapézoïdale ($q_A = q_D = 0$; $q_B = q_C$).

Déterminer q_B et les diagrammes des T et des M_f entre **A** et **D.**

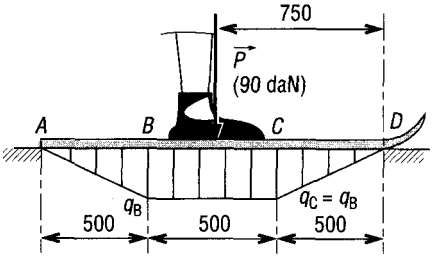


Fig. 40

❑ Reprendre l'exercice 14 avec l'aile proposée, la charge linéairement croissante (q_A = 260 daN.m^{-1} ; q_B = 520 daN.m^{-1}) schématise le poids de l'aile. C = 2 000 daN.

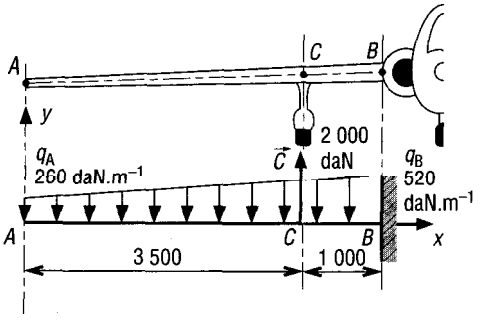


Fig. 41

Réponse

B_y = 245 daN ; M_B = − 15,1 kNm ;
T_{maxi} = 1 263 daN ; M_{fmaxi} = 20 kNm.

❑ Reprendre l'exercice 14 avec l'aile proposée, $\vec{P}$ en C schématise le poids du moteur et la charge répartie (q_A, q_B, q_D) le poids de l'aile. La charge est linéairement croissante entre A et B puis constante entre B et D.

P = 10 kN.

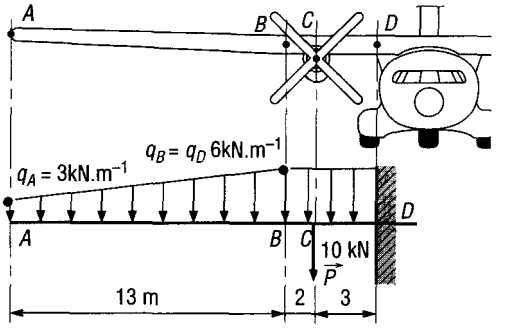


Fig. 42

25 FLEXION CONTRAINTES

OBJECTIFS

- Définir les contraintes normales et les contraintes de cisaillement dans le cas de la flexion.
- Donner des indications concernant le calcul des constructions.
- Traiter le cas particulier des concentrations de contrainte.

En flexion, les contraintes normales σ sont généralement prépondérantes devant les contraintes de cisaillement τ.

I-Contraintesnormalesenflexion

Les contraintes normales résultent du moment fléchissant M_f et les efforts tranchants n'ont aucun effet sur leur valeur.

Dans le cas de la flexion pure ($M_f \neq 0$, $T = 0$), les poutres se déforment suivant des arcs de cercle.

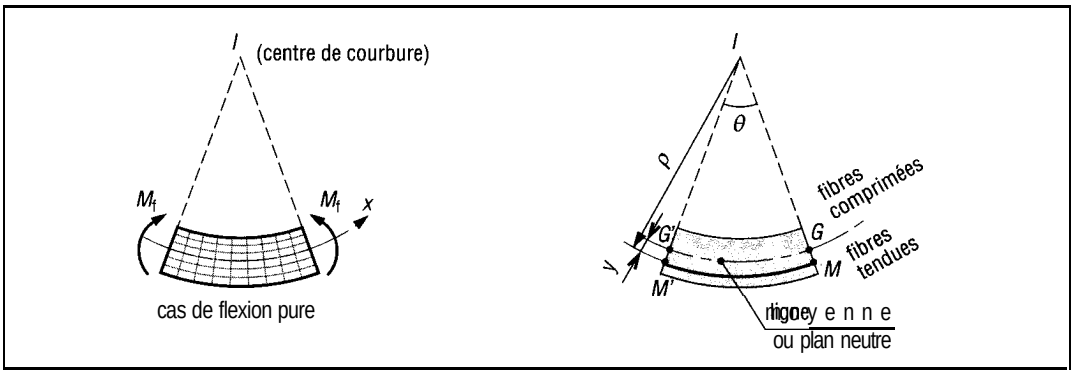
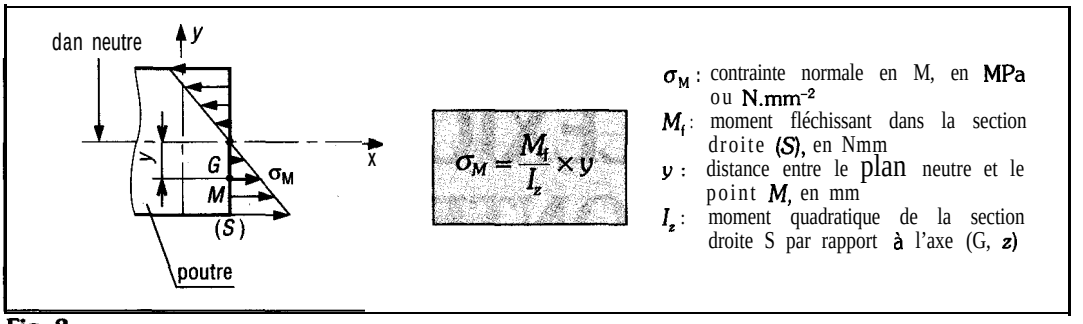


Fig. 1

La ligne moyenne ou plan neutre (GG') ne subit ni allongement ni raccourcissement (contraintes σ nulles).

Pour la figure proposée, toutes les fibres situées au-dessus du plan neutre sont comprimées et supportent des contraintes de compression ; toutes celles situées au-dessous (MM') sont tendues et supportent des contraintes de traction.

En exprimant l'allongement de la fibre MM', en utilisant la loi de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ et en faisant intervenir le moment fléchissant M_f, on montre la formule fondamentale suivante :

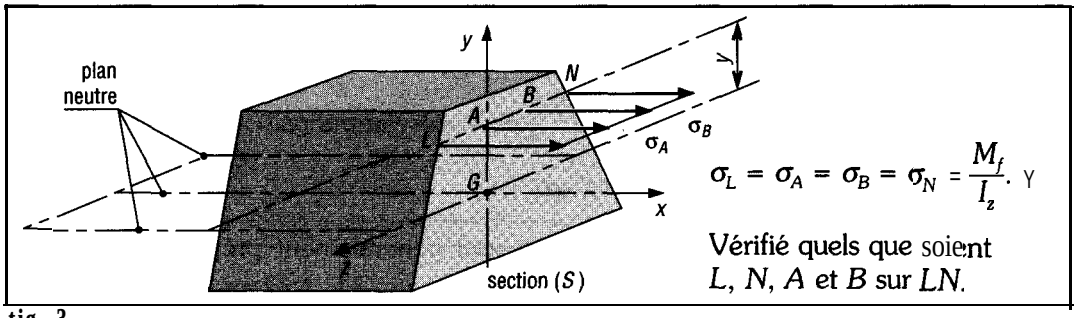


$$\sigma_M = \frac{M_f}{I_z} \times y$$

σ_M : contrainte normale en M, en MPa ou $N.mm^{-2}$
M_f : moment fléchissant dans la section droite (S), en Nmm
y : distance entre le plan neutre et le point M, en mm
I_z : moment quadratique de la section droite S par rapport à l'axe (G, z)

Fig. 2

Remarques : la valeur des moments quadratiques I_z est indiquée dans le chapitre « moments quadratiques ».
Toutes les fibres situées à la même distance y du plan neutre ont la même contrainte σ.



$$\sigma_L = \sigma_A = \sigma_B = \sigma_N = \frac{M_f}{I_z} \cdot Y$$

Vérifié quels que soient L, N, A et B sur LN.

tig. 3

Exemple : déterminons les contraintes normales dans une poutre rectangulaire 50 x 120 mm, soumise à un moment fléchissant de 14,4 kNm constant sur toute sa longueur.

$$I_z = \frac{b\,h^3}{12} = \frac{50 \times 120^3}{12} = 7{,}2 \times 10^6\ mm^4$$

$$\sigma = \frac{M_f}{I_z} \times y = \frac{14\,400\,000}{7{,}2 \times 10^6} \times y = 2\,y\ \text{Mpa}$$

y (mm)	0	20	40	60
σ (MPa)	0	40	80	120

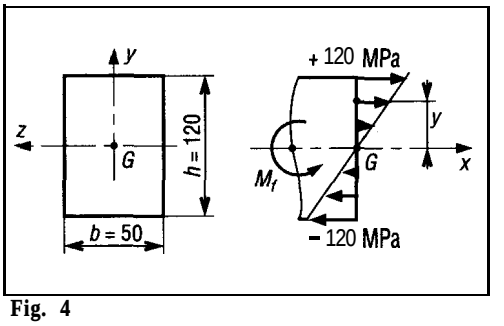


Fig. 4

II - Calcul des constructions

Pour des questions de sécurité liées à l'usage des machines, la contrainte normale σ_{maxi} dans la section droite la plus chargée doit rester inférieure à une contrainte limite admissible liée au matériau et fixée par le constructeur ou par des normes : R,.

Dans le cas de la flexion, il faut donc faire les deux opérations suivantes :
a) Déterminer la section la plus chargée : c'est en général la section du moment fléchissant maximum (voir diagramme des moments fléchissants).
b) Vérifier que la contrainte maximale dans cette section est inférieure à la contrainte admissible R_{pe} imposée par le constructeur (voir chapitres « traction » et « généralités »).

$$\sigma_{maxi} = \frac{M_{f\,maxi}}{(I_z / V)} \leqslant R_{pe} \qquad \begin{cases} V = y_{maxi} \\ (I_z / V) \text{ est appelé module de flexion} \end{cases}$$

Exemple : une poutre de pont roulant (profilé IPE) est soumise aux charges indiquées (cas le plus défavorable). Le moment fléchissant maximal est obtenu au milieu de la poutre et a pour valeur 10 kNm. Si on impose une contrainte admissible de 100 MPa, déterminons un profilé pouvant convenir pour construire l'appareil.

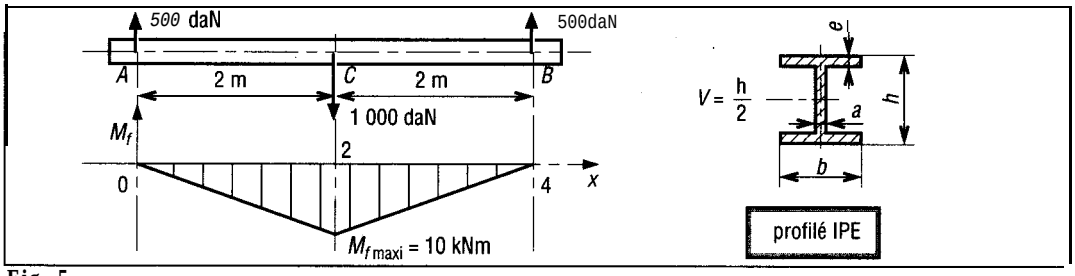


Fig. 5

$$\sigma_{maxi} = \frac{M_{f\,maxi}}{(I_z / V)} = \frac{10\,000\,000}{(I_z / V)} \leqslant 100 \text{ N.mm}^{-2}$$

d'où : $(I_z/V) \geqslant 100\,000 \text{ mm}^3 = 100 \text{ cm}^3$

Les tableaux de dimensions proposés dans le chapitre « moments quadratiques » nous donnent le profilé IPE de 160 pour lequel $I_z/V = 109 \text{ cm}^3$.
Si l'on adopte ce profilé, la contrainte maximale sera alors de :

$$\sigma'_{maxi} = \frac{10\,000\,000}{109\,000} = 91{,}74 \text{ MPa}$$

III - Cas des concentrations de contraintes

Lorsque les solides étudiés présentent de brusques variations de section, les formules précédentes ne s'appliquent plus. Au voisinage du changement de section, la répartition des contraintes n'est plus proportionnelle à la distance y et σ_{maxi} est supérieure à la valeur $\frac{M_{f\,maxi}}{(I_z / V)} = \sigma_0$: on dit qu'il y a concentration de contraintes.
Les valeurs de K_f (coefficient de concentration de contraintes) sont déterminées expérimentalement (voir tableaux page suivante).

$$\sigma_{maxi} = K_f \cdot \sigma_0$$

Exemple

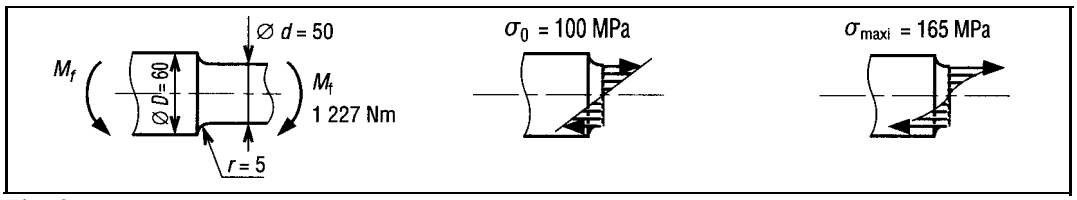


Fig. 6

$$\frac{r}{d} = \frac{5}{50} = 0{,}1 \qquad \frac{D}{d} = \frac{60}{50} = 1{,}2$$

Le tableau correspondant indique que $K_f = 1{,}65$.

$$\frac{I_z}{V} = \frac{\pi . d^3}{32} = 12\,272 \text{ mm}^3 \quad ; \quad \sigma_0 = \frac{M_f}{(I_z / V)} = \frac{122\,700}{12\,272} = 10 \text{ daN.mm}^{-2}$$

$$\sigma_{maxi} = K_f \cdot \sigma_0 = 1{,}65.10 = 16{,}5 \text{ daN.mm}^{-2}$$

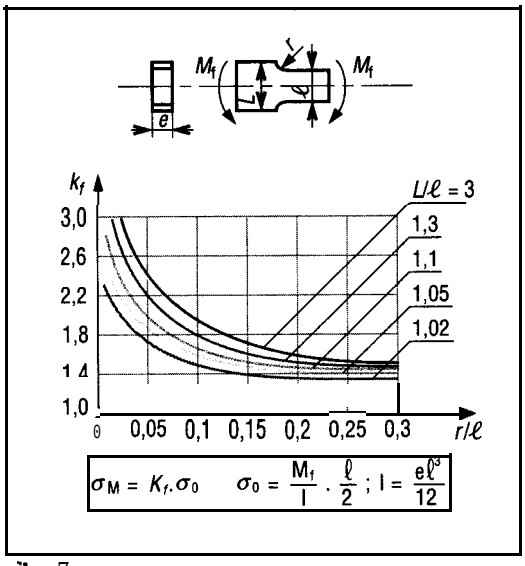


Fig. 7

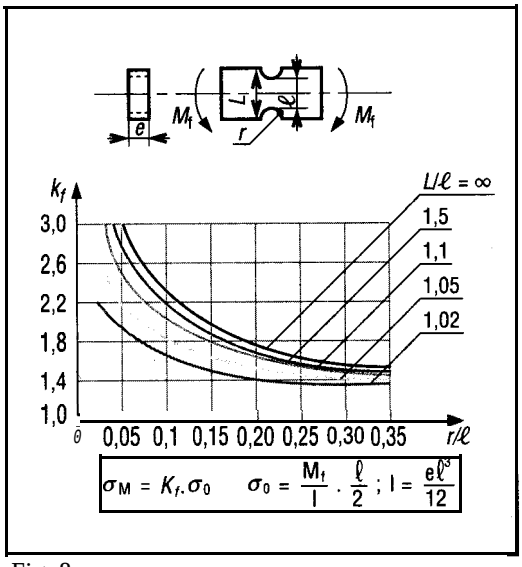


Fig. 8

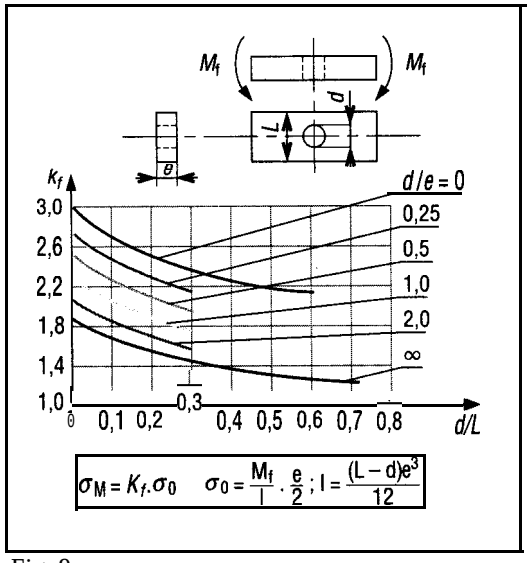


Fig. 9

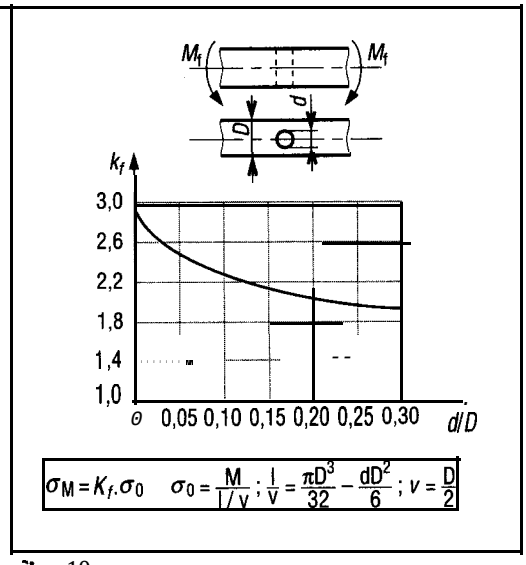


Fig. 10

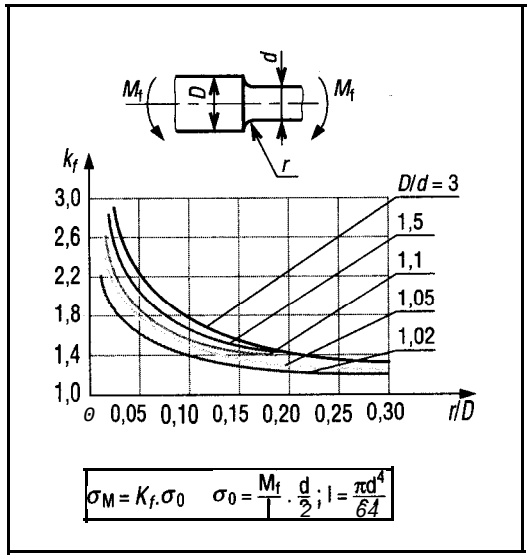
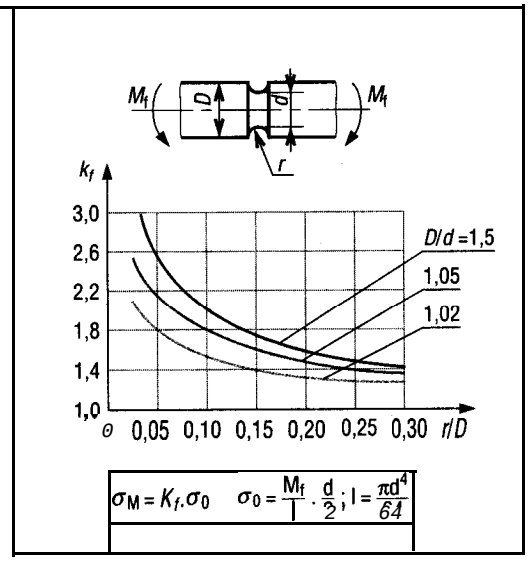


Fig. 11



ig. 12

IV- Contraintes de cisaillementenflexion

Les contraintes de cisaillement en flexion résultent des efforts tranchants et les moments fléchissants n'ont aucune influence sur leur valeur. Moins prépondérantes que les contraintes normales, leur détermination est nécessaire dans certains cas.

1. Mise en évidence

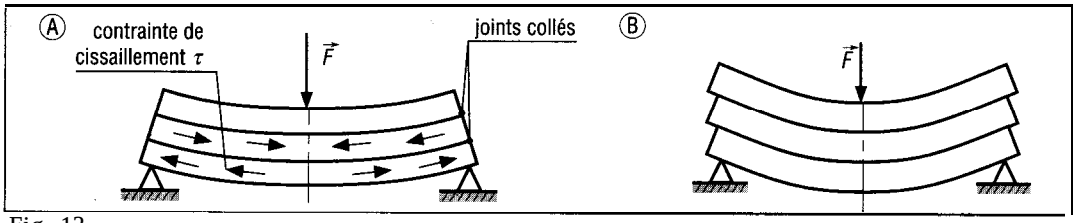


Fig. 13

Pour l'exemple de la figure 13, les contraintes de cisaillement τ qui s'exercent dans les joints collés assurent le maintien, évitent le glissement entre les poutres respectives et limitent les déformations.

La figure 14 donne la distribution des contraintes de cisaillement dans une section droite (S) supportant un effort tranchant T .
Si les contraintes conservent une valeur constante suivant l'axe z, en revanche elles varient suivant y, avec un maximum près du plan neutre (cas inverse des contraintes normales σ).

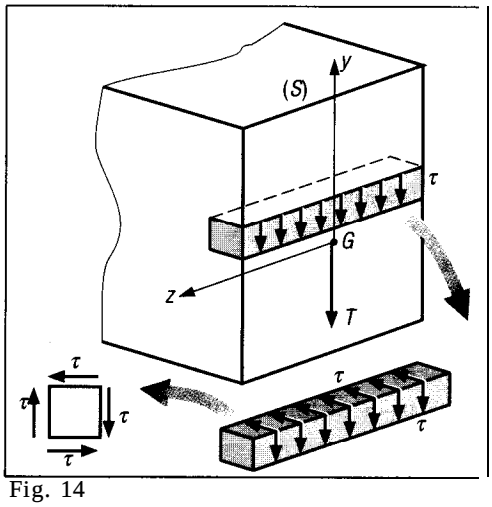


Fig. 14

2. Cas des poutres **rectangulaires**

La contrainte de cisaillement τ à la distance y du plan neutre est donnée par :

$$\tau = \frac{T\,Q}{I_z\,b}$$

$$Q = y_A \,.\, S_A = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

τ : contrainte à la distance y (MPa)
Q : moment statique de l'aire hachurée A (mm^3)
T : effort tranchant (N)
I_z : moment quadratique de la section S par rapport à (G, z) (mm^4)

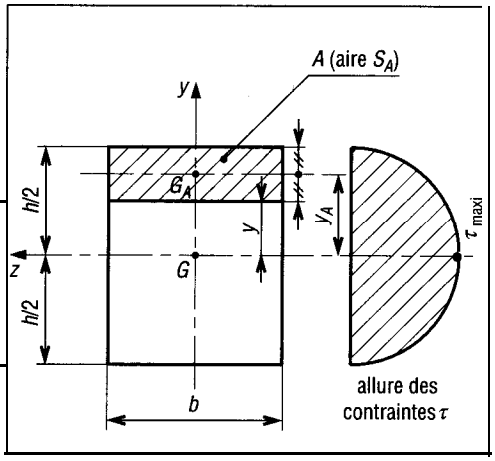


Fig. 15

Remarque : la contrainte est maximale au niveau du plan neutre (y = 0)

$$\tau_{maxi} = \frac{3\,T}{2\,S} = \frac{T\,h^2}{8\,I}$$

La contrainte maximale est de 50 % plus grande que la contrainte moyenne de cisaillement T/S définie dans le cas du cisaillement pur.

3. Cas des poutres circulaires

Section circulaire pleine : S = πr^2

$Q = \frac{2}{3}(r^2 - y^2)^{3/2}$

$$\tau = \left(\frac{4T}{3\pi r^2}\right)\sqrt{r^2 - y^2} \quad ; \quad \tau_{maxi} = \frac{4T}{3S} \text{ pour } y = 0$$

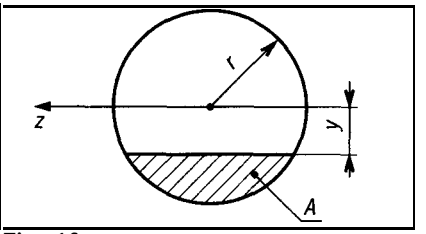


Fig. 16

Section circulaire creuse : S = $\pi (R^2 - r^2)$

$Q = \frac{2}{3}(R^3 - r^3)$

$$\tau_{maxi} = \frac{4T}{3S}\left(\frac{R^2 + rR + r^2}{R^2 + r^2}\right)$$

pour un tube mince : $\tau_{maxi} \simeq \frac{2T}{S}$

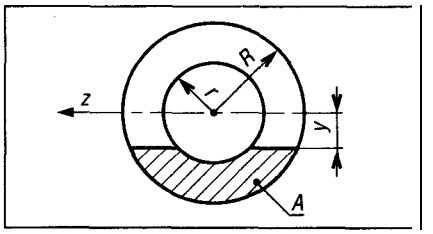


Fig. 17

4. Exemple

Un profilé est réalisé à partir de trois plats rectangulaires d'épaisseur 30 mm, collés ensemble en A et B. Si T = 13,5 kN, déterminons les contraintes de cisaillement dans les joints collés.

On donne : $I_z = 43{,}7 \times 10^6$ mm^4.

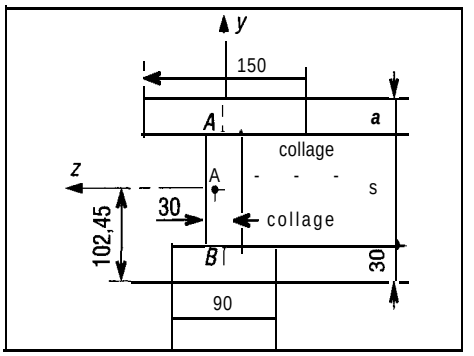


Fig. 18

Résolution

a) Contraintes en *A* *(fig.* **19-a)**

y_A = distance entre (G, z) et le barycentre de la surface A.

$Q_A = S_A \cdot y_A = 150 \times 30 \times 62{,}55$
$= 281475$ mm^2

$$\tau_A = \frac{T Q_A}{I_z b_A} = \frac{13500 \times 281475}{43{,}7 \times 10^6 \times 30} = 2{,}9 \text{ MPa}$$

b) Contraintes en B (fig. **19-b)**

y_B = distance entre (G, z) et le barycentre de la surface B.

$Q_B = S_B \cdot y_B = 90 \times 30 \times 87{,}45$
$= 236\,155$ mm^2.

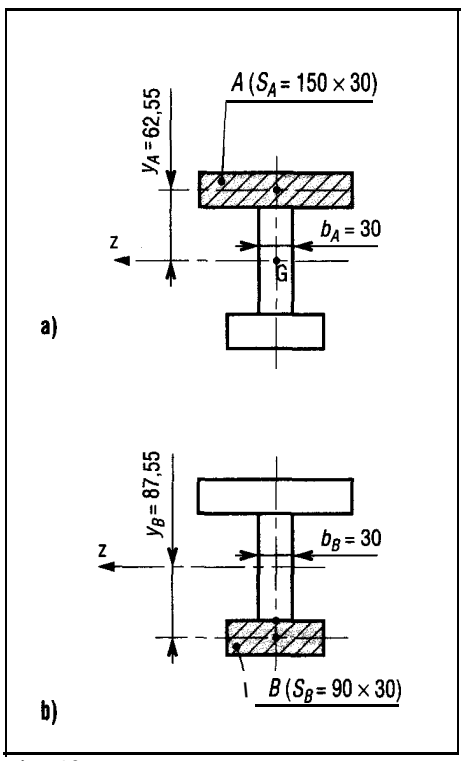
$$\tau_B = \frac{T Q_B}{I_z b_B} = \frac{13500 \times 236115}{43{,}7 \times 10^6 \times 30} = 2{,}4 \text{ MPa}$$

Remarque : $I_z = I_{z1} + I_{z2} + I_{z3}$

$$I_{z1} = \frac{150 \times 30^3}{12} + 150 \times 30 \times 62{,}5^2 = 17{,}95 \times 10^6$$

$$I_{z2} = \frac{90 \times 30^3}{12} + 90 \times 30 \times 87{,}45^2 = 20{,}85 \times 10^6$$

$$I_{z3} = \frac{30 \times 120^3}{12} + 120 \times 30 \times 12{,}45^2 = 4{,}88 \times 10^6$$



ig. 19

EXERCICES À RÉSOUDRE

❑ Un panneau indicateur de forme circulaire (0 800 mm) supporte une charge F résultant de l'action exercée par le vent $(0{,}05\ \text{N.cm}^{-2})$.

a) Déterminer F et les actions exercées par l'encastrement en A.

b) En déduire le moment fléchissant maximal dans le poteau AB et la contrainte maximale correspondante.

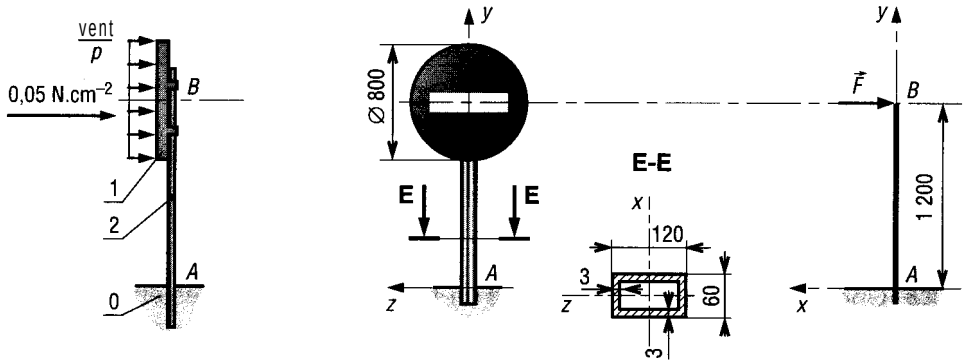


Fig. 20

2 Reprendre l'exercice 1 avec un panneau triangulaire (triangle isocèle : base 1 050, hauteur 900, barycentre B) et un poteau AB tubulaire (D = 80, $d = 74$ mm).

Réponse

F = 236,2 daN ; $M_A = M_{fmaxi}$ = 2 835 Nm ; σ_{maxi} = 210,5 MPa.

3 Le dispositif proposé permet de cintrer des tubes de chauffage. L'effort $\vec{F}$ de cintrage est fourni par un vérin hydraulique (non représenté) dont la tige (7) agit sur une came de poussée (6), alors que le maintien est assuré par deux galets (4) et (5).

Si la limite élastique du matériau est R_e = 340 N.mm^{-2}, déterminer l'effort nécessaire pour cintrer le tube indiqué.

Réponse

F = 19,2 kN.

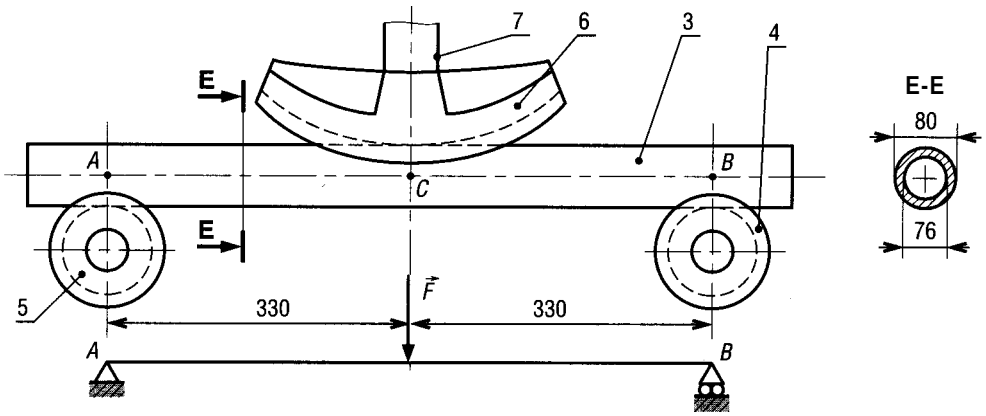
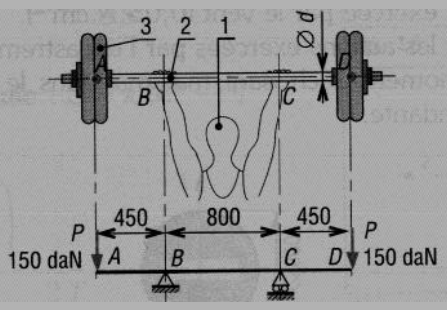


Fig. 21

4 Une barre d'haltérophilie est chargée symétriquement en A et D (P = 150 daN de chaque côte). Les mains de l'haltérophile sont situées en B et C, à 0,45 m de A et D.
a) Déterminer le moment fléchissant maximum dans la barre $ABCD$.
b) Si l'on adopte une contrainte admissible de 200 MPa pour le matériau de la barre, quel devrait être son diamètre d minimal ?



Fii.22

❑ Une petite presse se compose d'un bâti soudé (1) profilés en H, d'une table de travail (2) réglable en hauteur et d'un vérin hydraulique de poussée (4 + 5). La poussée maximale du vérin et la capacité de la presse sont de 840 kN.
La table (2) est schématisée par une poutre sur deux appuis, dont les dimensions transversales sont indiquées section EE.
a) Déterminer le moment fléchissant maximal dans la table.
b) Si on impose une contrainte admissible de 80 MPa pour le matériau, déterminer l'épaisseur e minimale des tôles de la table.

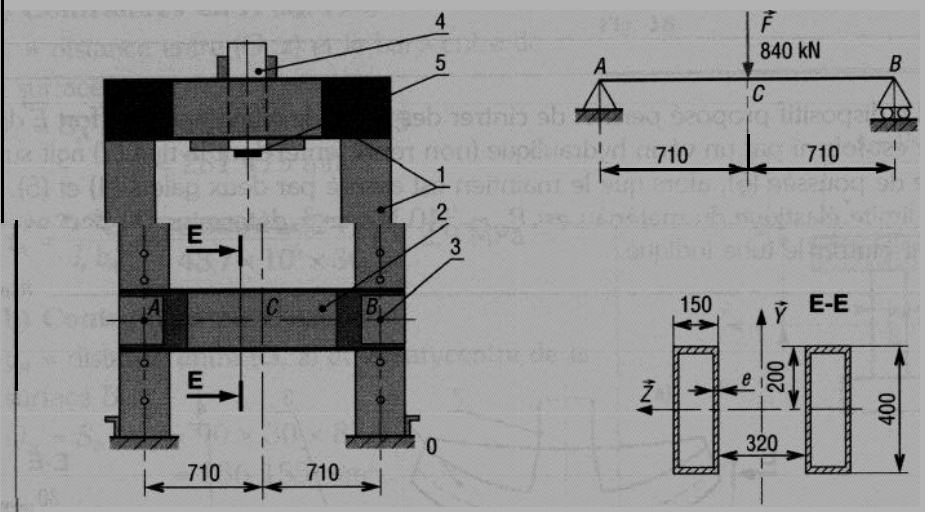


Fig. 23

6 Reprendre l'exercice 5 avec e = 10 mm, En déduire la charge $\vec{F}$ maximale admissible par la table (2).

Réponse

463 kN.

❑ Un palonnier ABC est utilisé en manutention pour soulever des charges de grande longueur.
a) Pour les charges indiquées, déterminer la valeur du moment fléchissant maximum entre A et B.
b) Si la contrainte admissible est de 100 MPa, déterminer un profilé IPER pouvant convenir pour fabriquer le palonnier (voir dimensions des profilés, chapitre "moments quadratiques").

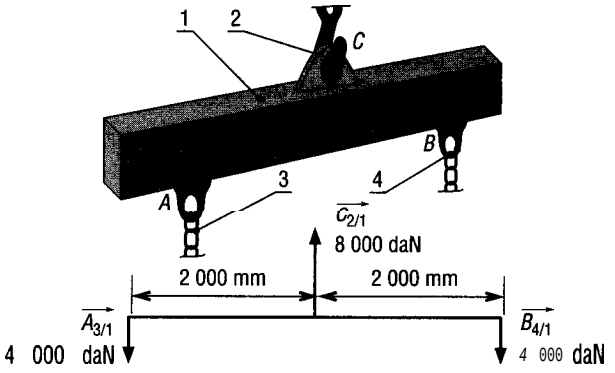


Fig. 24

❑ Reprendre l'exercice 7. On utilise un profilé IPER de 270. Quelle est la charge totale $\vec{C}_{2/1}$ admissible pour le levage ?

Réponse

5 300 daN.

9 Un pont roulant est réalisé à partir d'une poutre principale (1) (profilé IPE), de deux moteurs de translation (3) et d'un palan (2) mobile entre A et B.
Si la charge $\vec{P}$ maximale devant être levée est de 1 000 daN et si la contrainte admissible dans la poutre est de 100 MPa, déterminer un profilé pouvant convenir à la fabrication de la poutre (voir dimensions chapitre « moments quadratiques »).

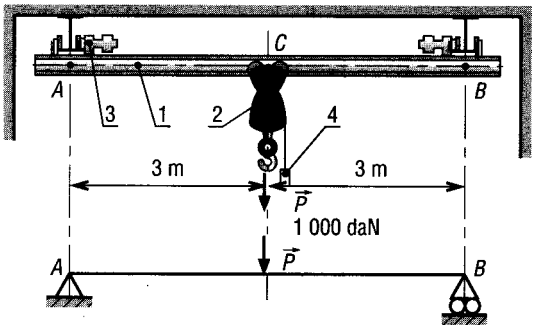


Fig. 25

❑ Reprendre l'exercice 9 en prenant en compte le poids propre de la poutre principale.

❑ La poutre proposée supporte une charge répartie q de 25 $kN.m^{-1}$. Compte tenu des dimensions de la section, déterminer la contrainte maximale exercée.

Réponse

I_z/V = 1 841,5 cm^3 ;
$\sigma_{maxi} = \sigma_A = \sigma_B$ = **61** MPa.

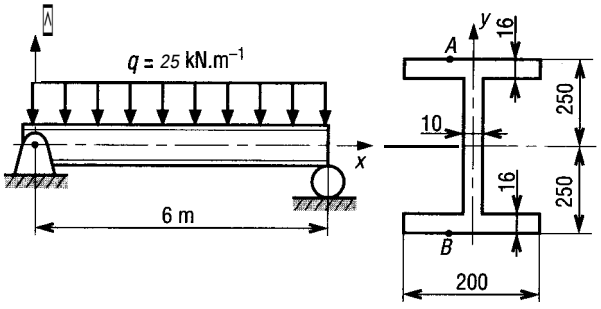


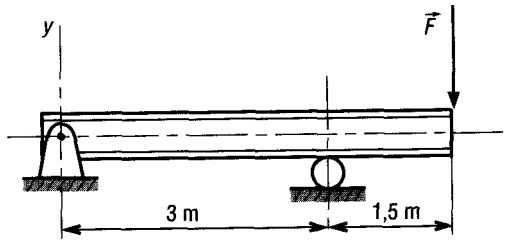
Fig. 26

12 Reprendre l'exercice 11. Quelle doit être la valeur de la charge répartie q pour que la contrainte maximale dans la poutre ne dépasse pas 75 MPa ?

❑ Pour la poutre en T proposée, déterminer la valeur maximale de la charge $\vec{F}$ si on impose pour le matériau une contrainte admissible de 60 MPa en traction et une contrainte admissible de 105 MPa en compression. Le poids de la poutre est négligé.

Réponse

$F_{maxi} = 27$ kN.



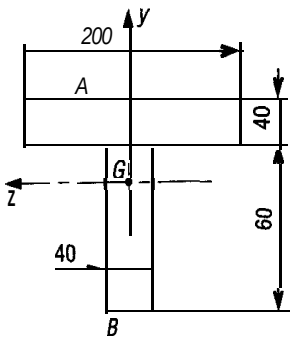
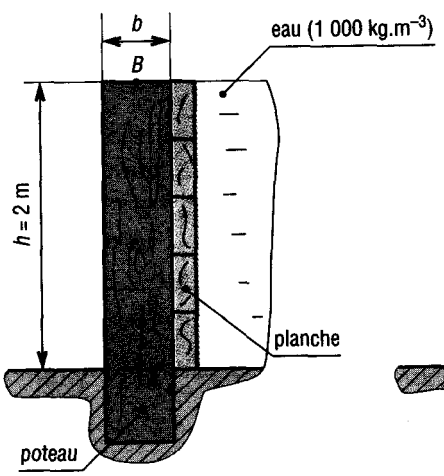


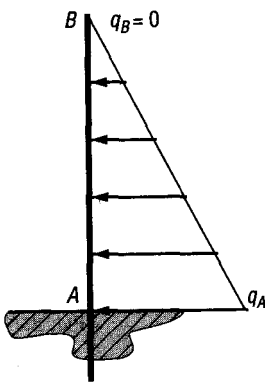
Fig. 27

14 Un barrage temporaire servant de retenue d'eau est construit à partir de poteaux en bois (a x b), espacés de e = 1 m, et de planches sur une hauteur de 2 m. Si la contrainte admissible en flexion du poteau est de 10 MPa, déterminer a et b.

Réponse

$a = 125$; $b = 250$ mm.





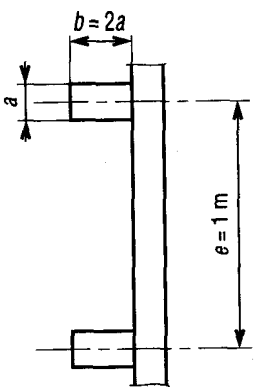
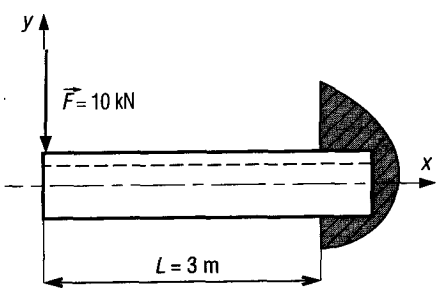


Fig. 28

❑ La poutre proposée (profilé en U) supporte une charge $\vec{F}$ de 10 kN d'un côté et est encastrée de l'autre. Déterminer la contrainte maximale dans la poutre (G est le barycentre de la section).

Réponse

$I_z = 4\,226$ cm⁴ ; $\sigma_{maxi} = \sigma_B = -100$ MPa ; $\sigma_A = 42$ MPa.



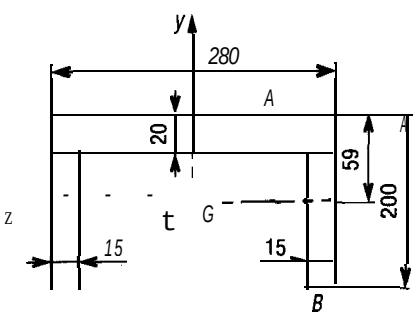


Fig. 29

❑ Deux solutions (A et B) sont envisagées pour renforcer un profilé en U travaillant en flexion. a) Des deux solutions proposées, laquelle peut supporter le mieux un moment fléchissant M_{fz} = 37,4 kN.m ? b) Quelle est la contrainte maximale dans ce cas ? Quel est le pourcentage d'efficacité en plus ?

Réponse

solution B ; σ = 80 MPa ; 38,4 %.

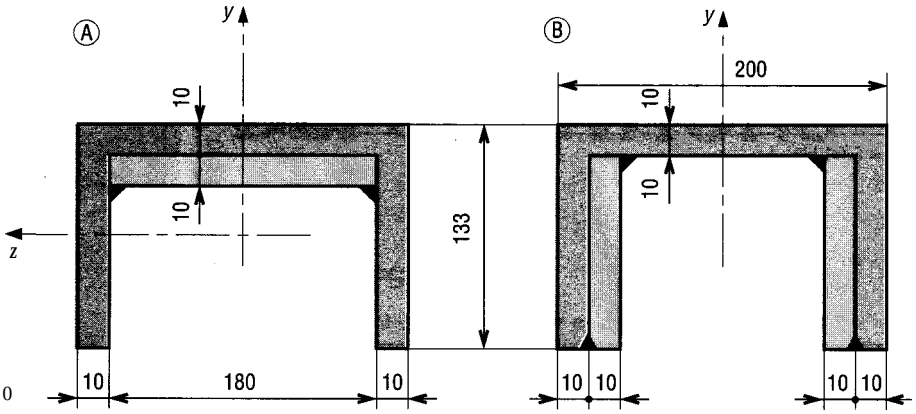


Fig. 30

17 Une articulation cylindrique, en chape, est calculée à partir des deux schématisations symétriques proposées d'emploi usuel. Exprimer dans les deux cas la valeur du diamètre d en fonction de F, a, b et la contrainte admissible R,,. Comparer les résultats avec le cas du cisaillement simple (voir page 299).

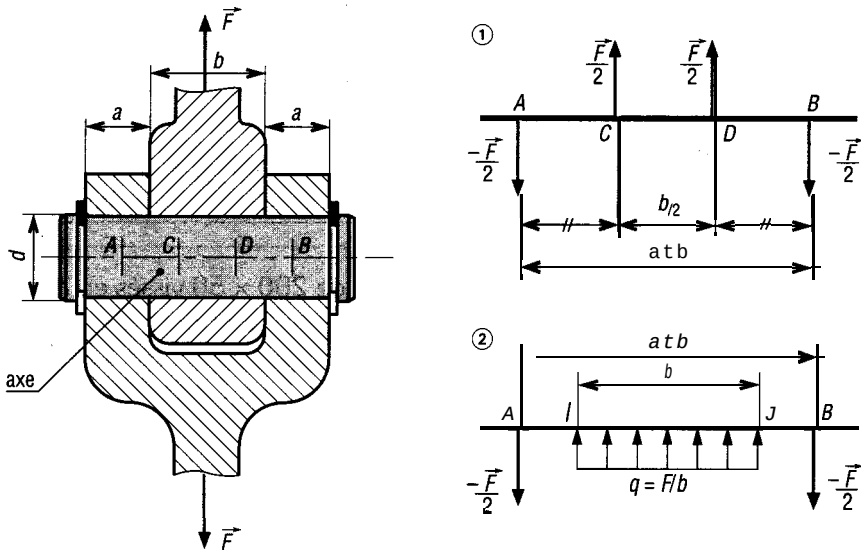


Fig. 31

❑ Une poutre de section rectangulaire 50 x 200 supporte un effort tranchant T = 67,2 kN et un moment fléchissant M_f = 11,2 kNm.

Déterminer la contrainte normale et la contrainte tangentielle en A.

Réponse

σ_A = 33,6 MPa ; τ_A = 7,5 MPa.

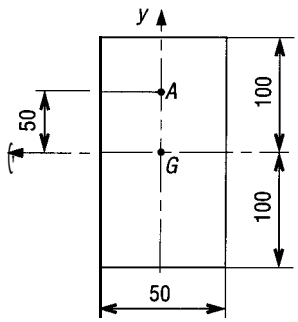


Fig. 32

❑ Renrendre l'exercice 18. Déterminer les contraintes normales maximales et les contraintes de cisaillement maximales.

❑ une poutre est réalisée à partir de trois autres poutres en bois collées ensemble.
Si la contrainte de cisaillement admissible dans le joint collé est de 0,7 MPa, déterminer l'effort tranchant T maximal supportable.

Réponse

T = 5,04 kN.

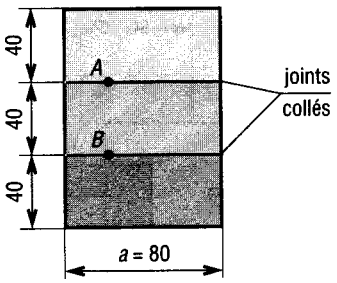


Fig. 33

❑ Une poutre est réalisée à partir de deux plats de 150 x 30 collés en T.
a) Si l'effort tranchant T supporté est de 13 kN, déterminer la contrainte de cisaillement dans le joint collé.
b) Calculer la contrainte de cisaillement maximale dans la section.

Réponse

τ_A = 3,24 MPa ; τ_{maxi} = 3,46 MPa (en G).

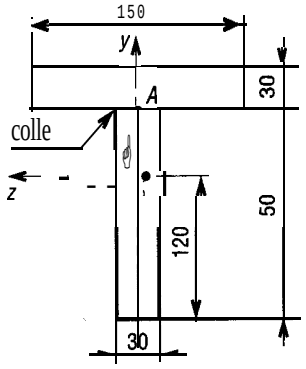


Fig. 34

❑ Renrendre l'exercice 21 avec deux plats de 200 x 50 vissés en A. Si T = 3,2 kN et si chaque vis peut supporter un effort de cisaillement de 1 kN, déterminer l'espacement nécessaire entre les vis.

Réponse

$e \simeq 51$ mm.

23 Une poutre en I est réalisée à partir de tôles d'acier d'épaisseur 20 mm soudées ensemble. Si l'effort tranchant T est de 500 kN, déterminer la charge supportée par chaque cordon et par unité de longueur.

Réponse

307 kN/m.

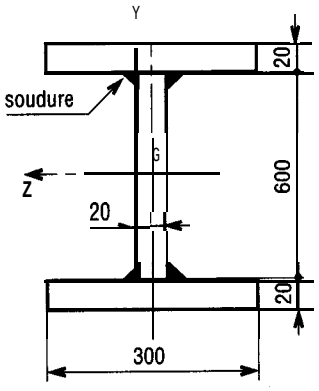


Fig. 35

26 FLEXION DÉFORMATIONS

OBJECTIFS

- Définir la notion de déformée et de flèche.
- Développer la méthode par intégration.
- Présenter le principe de superposition et donner un formulaire général.

Dans les chapitres précédents consacrés à la flexion, nous nous sommes intéressés aux poutres fléchies et à leur dimensionnement d'un point de vue résistance sous charge.
Dans ce chapitre, c'est l'aspect déformation qui est abordé. En particulier, la détermination de la flèche maximale et de sa valeur admissible est l'un des éléments fondamentaux de la conception des poutres.
Il existe plusieurs méthodes pour déterminer les déformées et la flèche maximale ; nous nous limiterons à la méthode par intégration. Si les charges sont nombreuses, le principe de superposition permet de simplifier les résolutions, ainsi que les logiciels.

I-Notiondedéformée

Pour la poutre donnée en exemple **(fig.1)**, la ligne moyenne (*AICJBD*) a pour direction l'axe des x avant déformation et la courbe indiquée sur le graphe (y, x) après déformation. Cette courbe est appelée déformée.

y = f(x) est l'équation mathématique de la déformée dans le système d'axes (x, y).

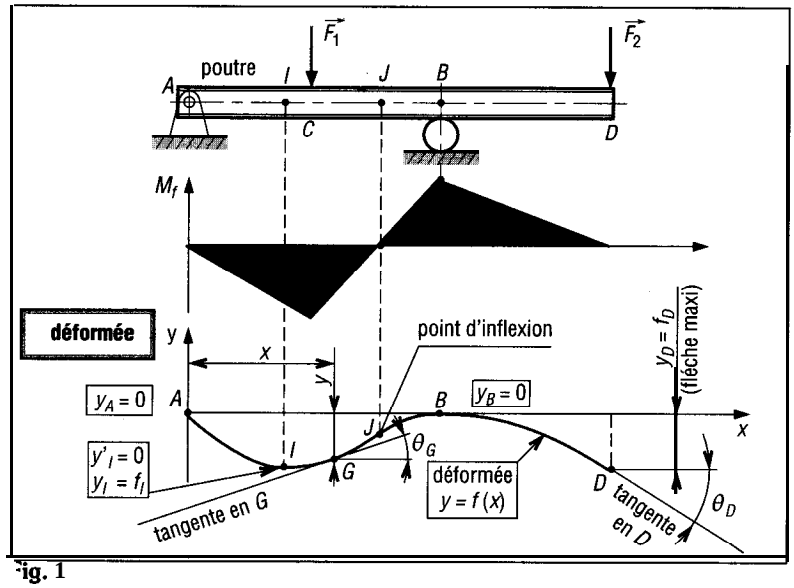


Fig. 1

En un point G quelconque, de coordonnées (x, y), la pente de la tangente à la déformée est tan θ_G. De plus, dans le cas des petites déformations : tan $\theta_G \simeq \theta_G$.
Si y' est la dérivée première de y par rapport à x, on a :

$$y' = f'(x) = \tan \theta_G = \theta_G \text{ (avec } \theta_G \text{ en radian)}$$

Conditions aux limites : y, = 0 ; y, = 0 et y', = 0, encore appelés conditions aux limites, sont des éléments connus de la déformée. Ces éléments sont imposés par les appuis A et B ou par la forme de la déformée.

Flèches : la déformée présente des valeurs maximales en I (entre A et B) et à l'extrémité D. Pour ces points particuliers, la déformation est souvent appelée flèche (f) : $f_I = y_I$; $f_D = y_D$.

II -Méthode par intégration

1. Principe

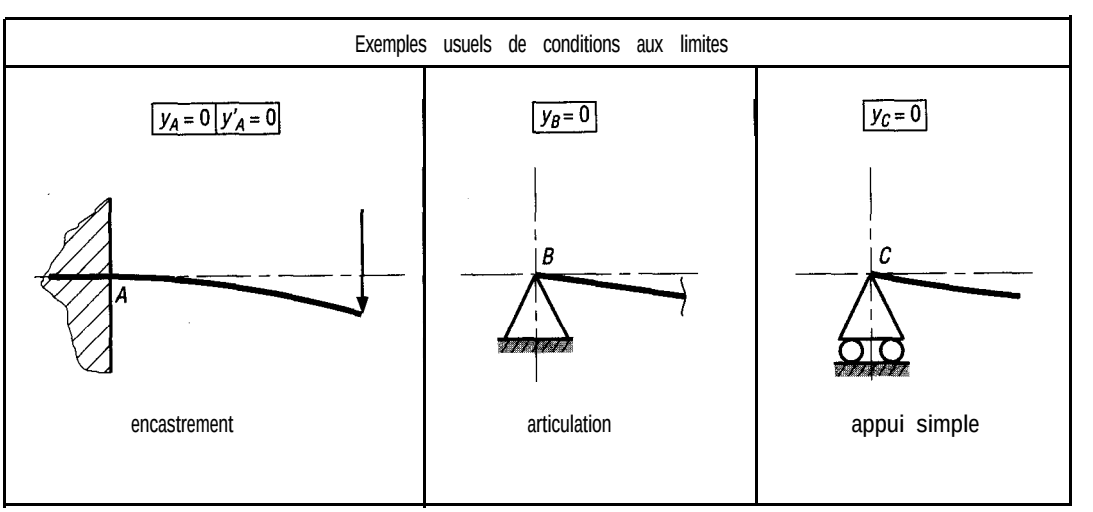
Connaissant l'équation des moments fléchissants M_f en fonction de x, la pente $y' = \theta$ et la déformée y sont obtenues par intégration successives à partir de :

$$M_f = -EIy''$$

M_f : moment fléchissant (équation)
E : module d'élasticité longitudinale
$I = I_z$: moment quadratique des sections par rapport à l'axe (G, z)
y" : dérivée seconde de la déformée y

Remarque 1 : si on utilise la convention des efforts à droite ou convention 2 (voir chapitre « généralités »), l'équation s'écrit : $M_f = EIy''$.

Remarque 2 : les constantes d'intégration successives seront calculées à partir des conditions aux limites imposées par la position des appuis ou la forme générale de la déformée.



ig. 2

2. Exemple 1: poutre sur deux appuis avec charge concentrée au milieu

Reprenons l'exemple de la poutre de pont roulant du paragraphe II du chapitre « flexion - contraintes ».

A = B = $P/2$ = 500 daN

Moments fléchissants

$0 \leqslant X < 2$

$M_{fAC} = (-P/2) \cdot X = -500\,X$

$2 \leqslant X < 4$

$M_{fCB} = (P/2)(X - L)$

$= 500\,(X - 4)$

Notons qu'il y a symétrie des tronçons AC et CB. Il suffit donc de limiter l'étude de la déformée au tronçon AC.

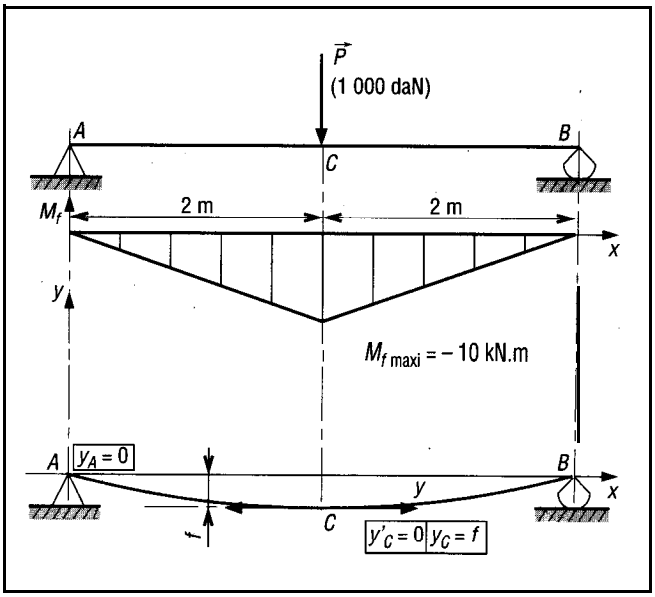


Fig. 3

a) Équation de la déformée

$M_{f\,AC} = -EIy''_{AC} = (-P/2) \cdot X \Rightarrow EIy''_{AC} = (P/2) \cdot X$

Intégrons une première fois : $EIy'_{AC} = (P \cdot X^2)/4 + C_1$

Intégrons une deuxième fois : $EIy_{AC} = [(P \cdot X^3)/12] + C_1 \cdot X + C_2$

C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration ; elles caractérisent la position de la déformée y par rapport au repère (A, x, y).

Pour X = 0, y,, = 0 ; il en résulte que $C_2 = 0$ $(EIy_{AC} = C_2 = 0)$.

Le seul autre élément connu de la déformée y,, est la pente de la tangente au point C. En C, la tangente est horizontale ; autrement dit, pour X = $L/2$:

$y'_{AC} = 0 = \tan \theta_C = \theta_C$

$EIy'_{AC} = 0 = [(P \cdot L^2)/16] + C_1$ il' en résulte que : $C_1 = -[(P \cdot L^2)/16]$

b) Résultats

$$y'_{,,} = \frac{P}{4EI}\left(X^2 - \frac{L^2}{4}\right) \qquad y_{AC} = \frac{P}{4EI}\left(\frac{X^3}{3} - \frac{L^2 \cdot X}{4}\right)$$

La flèche maximale est obtenue pour X = $L/2$, pour cette valeur $f = -\frac{PL^3}{48EI}$.

Application numérique

$P = 1\,000$ daN E = 20 000 daN.mm^{-2} ;

$L = 4$ 000 mm et I = 869 cm^4 = 8 690 000 mm^4 (profilé IPE de 160).

x (m)	0	0,5	1	1,5	2
y_{AC} (mm)	0	- 2,8	- 5,3	- 7,0	- 7,67

3. Exemple 2 : poutre sur deux appuis avec charge répartie uniforme *q* sur toute la longueur

$A = B = (q \cdot l)/2 = 500$ daN

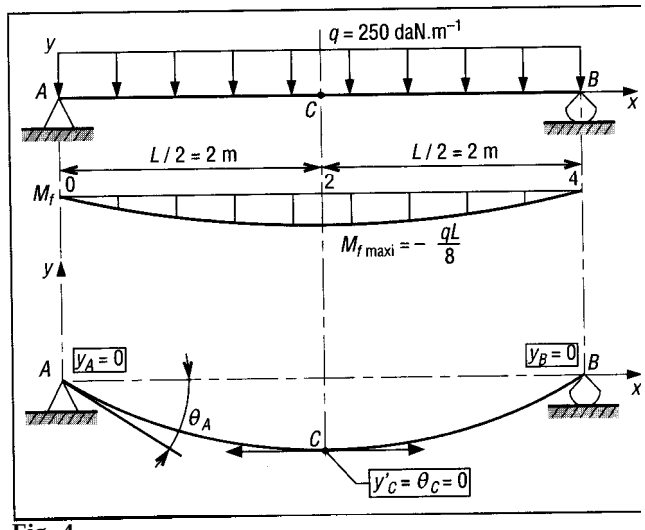


Fig. 4

Moments fléchissants

$0 < X < 4$ m

$$M_{f\,AB} = -\frac{qL}{2} \cdot X + \frac{qX^2}{2}$$

a) Équation de la déformée

$$M_{f\,AB} = -EIy''_{AB} = -\frac{qL \cdot X}{2} + \frac{qX^2}{2}$$

$$EIy''_{AB} = \frac{qL \cdot X}{2} - \frac{qX^2}{2}$$

Intégrons une première fois :

$$EIy'_{AB} = \frac{qL \cdot X^2}{4} - \frac{qX^3}{6} + C_1$$

Intégrons une deuxième fois :

$$EIy_{AB} = \frac{qL \cdot X^3}{12} - \frac{qX^4}{24} + C_1 \cdot X + C_2$$

Pour X = 0 : $y_{AB} = 0$, il en résulte que $C_2 = 0$.

Pour X = $L/2$: $y'_{AB} = 0$, il en résulte que $C_1 = -[(qL^3)/24]$ (ce résultat aurait aussi pu être déterminé à partir de $y_{AB} = 0$ pour X = L).

b) Résultats

$$y'_{AB} = \frac{q}{EI}\left(\frac{LX^2}{4} - \frac{X^3}{6} - \frac{L^3}{24}\right) \quad \text{et} \quad y_{AB} = \frac{q}{24EI}\left(2LX^3 - X^4 - L^3X\right)$$

La flèche maximale est obtenue pour X = $L/2$:

$$f = -\frac{5qL^4}{384EI}$$

Application numérique

$q = 250$ daN.m^{-1} ; $I = 869$ cm^4 ; L = 4 m ; $E = 20\,000$ daN.mm^{-2} ;

pour x = $L/2$: y, = $\mathbf{f} = -\dfrac{5 \times 2\,500 \times 10^{-3} \times 4\,000^4}{384 \times 200000 \times 8690000} = -4{,}8$ mm.

Pente maximale en A (ou B) :

$$\theta_A = \theta_B = y'(0) = -y'(L)$$

$$= -\frac{qL^3}{24\,EI}$$

$$= \frac{-2\,500 \times 10^{-3} \times 4\,000^3}{24 \times 200\,000 \times 8\,690\,000}$$

$$= -0{,}0038 \text{ rad}$$

$$= -0{,}22°.$$

4. Exemple 3 : poutre encastrée soumise à une charge *q* répartie sur toute la longueur

Efforts à l'encastrement

$M_A = (q\,L^2)/2 ; A, = qL ; A, = 0.$

Moment fléchissant

$M_{fAB} = (q\,L^2)/2 - qLx + q\,x^2/2$

Détermination de la déformée :

$$EIy''_{AB} = -\frac{qL^2}{2} + qLx - \frac{qx^2}{2}$$

$$EIy'_{AB} = -\frac{qL^2x}{2} + \frac{qLx^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$EIy_{AB} = -\frac{qL^2x^2}{4} + \frac{qLx^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + C_1x + C_2$$

Pour x = 0 :

$Y_{AB} = 0$ d'où $C_2 = 0$.

De plus, la tangente en A est horizontale, autrement dit :

$y'_{,,} = 0$ d'où $C_1 = 0$.

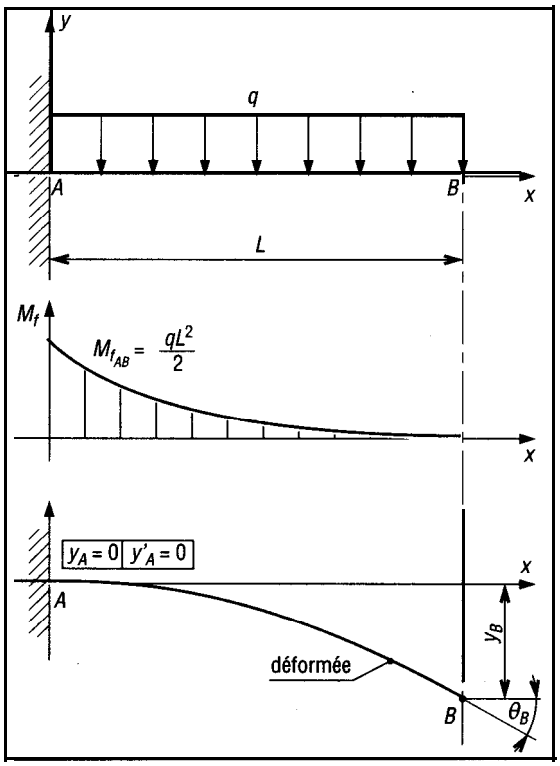


Fig. 5

Résultats

$$Y'_{AB} = \frac{qx}{6EI}\left(-x^2 + 3Lx - 3L^2\right) \qquad y_{AB} = \frac{qx^2}{24EI}\left(-x^2 + 4Lx - 6L^2\right)$$

La flèche est maximale en B ainsi que l'angle θ.

$$y_B = f_B = -\frac{qL^4}{8EI} \qquad \theta_B = y'_B = -\frac{qL^3}{6EI}$$

III - Principe de superposition

Le principe s'applique de la même manière à toutes les grandeurs étudiées : actions exercées par les appuis, efforts tranchants, moments fléchissants, contraintes et déformations.

On part du principe que l'addition de deux états d'équilibre est elle aussi un état d'équilibre.

Inversement, un problème complexe (avec de nombreuses charges différentes) peut être décompose en la somme de plusieurs problèmes simples (par exemple faciles à résoudre avec un formulaire), tous en état d'équilibre.

Exemple : poutre sur deux appuis soumise à une charge concentrée en son milieu et à une charge répartie q sur toute sa longueur.

L'étude de cette poutre se ramène à l'addition, ou la superposition, des exemples 1 et 2 du paragraphe II précédent.

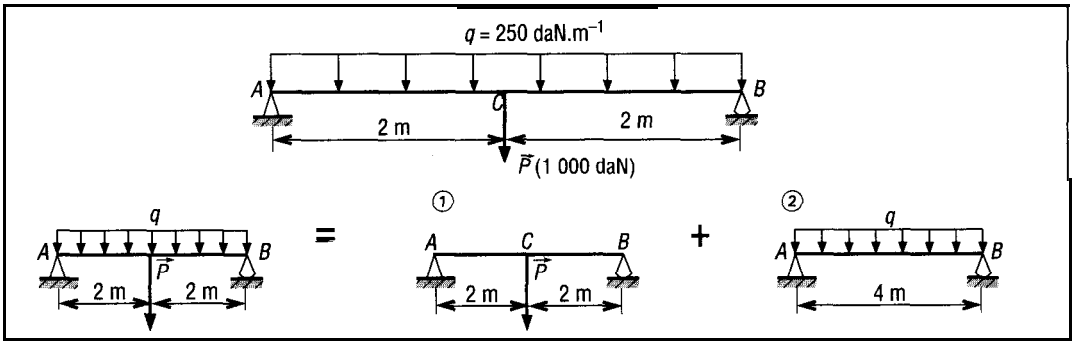


Fig. 6

a) Actions exercées par les appuis

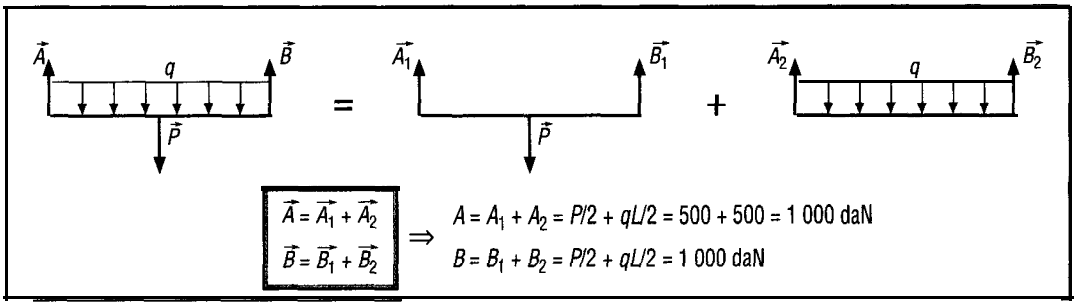


Fig. 7

b) Efforts tranchants

T = T_1 + T_2 (en tout point : addition algébrique)

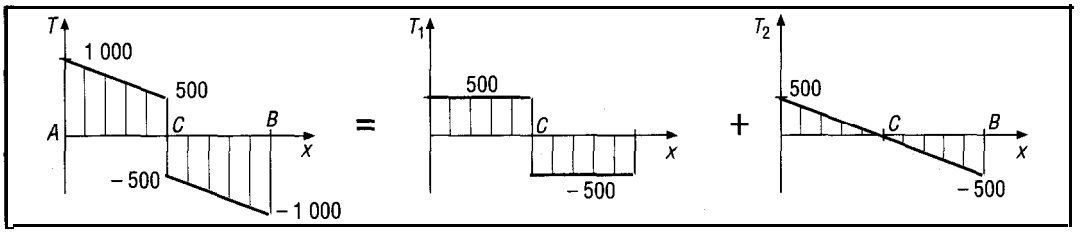


Fig. 8

TAC = T_{1AC} + T_{2AC} = 500 + (500 − 250x) = 1 000 − 250x

T_{CB} = T_{1CB} + T_{2CB} = − 500 + (500 − 250x) = − 250x

c) Moments fléchissants

M_f = $M_{f\,1}$ + $M_{f\,2}$ (en tout point : addition algébrique)

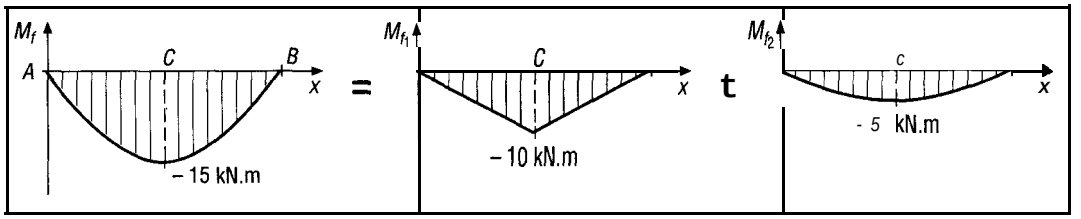


Fig. 9

$M_{f\,AC}$ = $M_{f\,1\,AC}$ + $M_{f\,2\,AC}$ = 500x + (- 500 x + 125 x^2) = − 1 000 x + 125 x^2

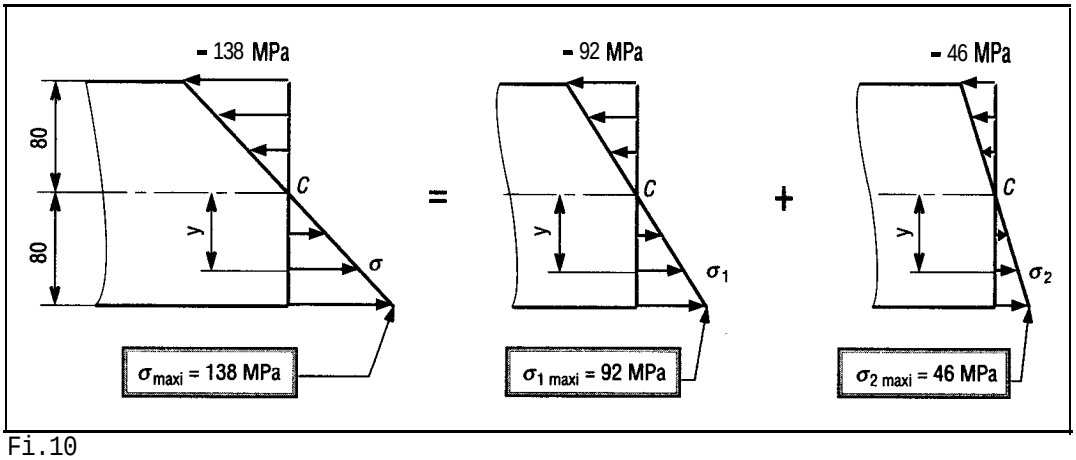
$M_{f\,CB}$ = $M_{f\,1\,CB}$ + $M_{f\,2\,CB}$ = 500 (x − 4) + (- 500 x + 125 x^2) = 125 x^2 − 2 000

d) Contraintes

$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ (en tout point : addition algébrique)

La section C est la plus chargée dans les deux cas (celle du $M_{f\,maxi}$).

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{M_{f1}}{I_z}\cdot y = \frac{5\,060\,000}{8\,690\,000}\cdot y = 1,15\,y \\ \sigma_2 &= \frac{M_{f2}}{I_z}\cdot y = \frac{5\,000\,000}{8\,690\,000}\cdot y = 0,575\,y \end{aligned}\right\} \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = 1,725\,y\ (\text{MPa})$$



Fi.10

Les contraintes s'ajoutent algébriquement ; les contraintes de compressions se retranchent des contraintes de traction, etc.

Ici, σ_1 et σ_2 ont même sens et sont maximales pour y = 80 mm.

$\sigma_{maxi} = \sigma_{1maxi} + \sigma_{2maxi} = 1,725 \times 80 = 138$ MPa.

e) Déformations

Comme les contraintes et les autres grandeurs (T, M_f, etc.), les déformations s'ajoutent algébriquement en tout point.

$y' = y'_1 + y'_2$ et $y = y_1 + y_2$

$$y'_{AC} = y'_{1AC} + y'_{2AC} = \frac{P}{4EI}\left(x^2 - \frac{L^2}{4}\right) + \frac{q}{EI}\left(\frac{Lx^2}{4} - \frac{x^3}{6} - \frac{L^3}{24}\right)$$

$$y_{AC} = y_{1AC} + y_{2AC} = \frac{P}{4EI}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{L^2x}{4}\right) + \frac{q}{24EI}\left(2Lx^3 - x^4 - L^3x\right)$$

Remarque

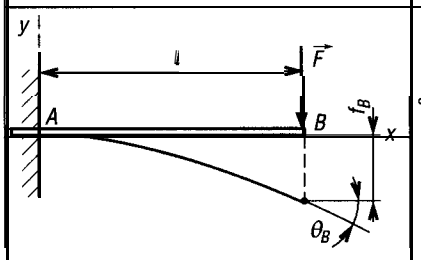
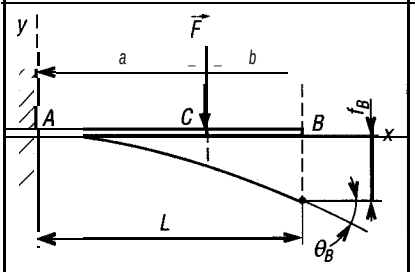
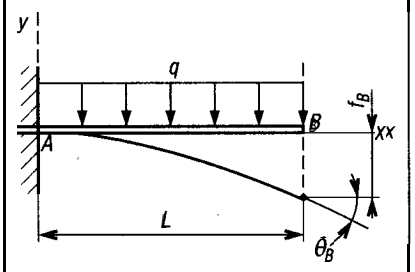
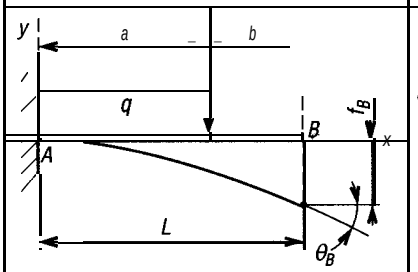
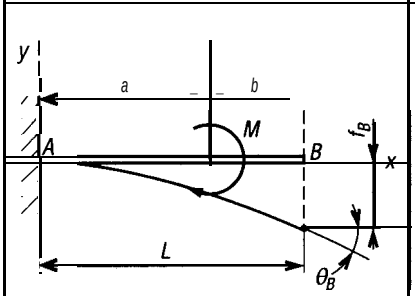
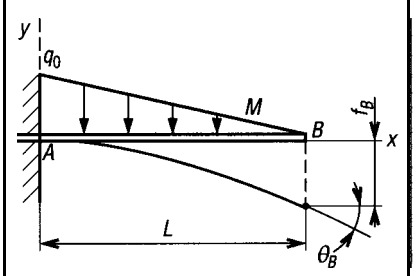
y'_{CB} et y, se déduisent de y'_{AC} et y,, par symétries.

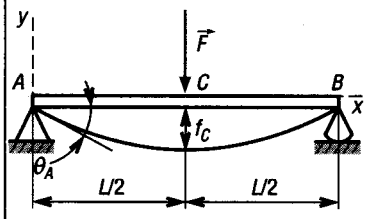
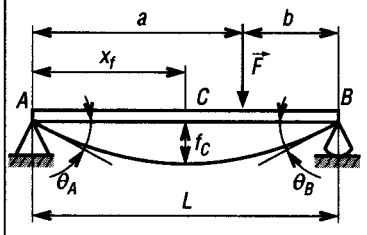
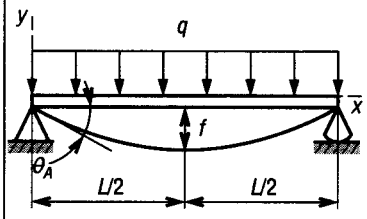
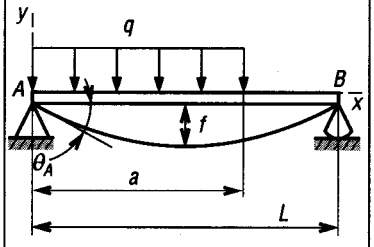
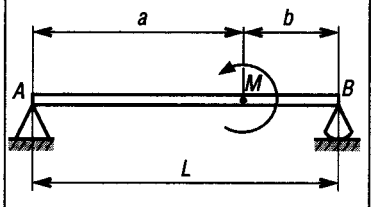
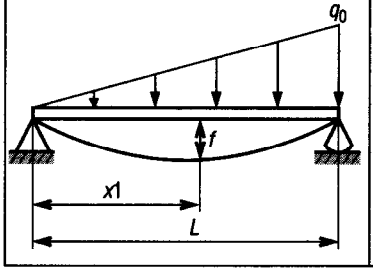
Flèches maximale en C

$f_C = f_{1C} + f_{2C}$

$$= -\frac{PL^3}{48EI} - \frac{5qL^4}{384EI} = -7,7 - 4,8 = -12,5\ \text{mm}$$

IV ▪ Formulaire

Poutre	Pente maxi	Flèche	Équation
	$\theta_B = -\frac{FL^2}{2EI}$	$f_B = -\frac{FL^3}{3EI}$	$y' = -\frac{F.x}{2EI}(2L - x)$ $y = -\frac{F.x^2}{6EI}(3L - x)$
	$\theta_B = -\frac{Fa^2}{2EI}$	$f_B = -\frac{Fa^2(3L-a)}{6EI}$	$x \leqslant a : y' = -\frac{Fx}{2EI}(2a - x)$ $y = -\frac{Fx^2}{6EI}(3a - x)$ $x > a : y' = -\frac{Fa^2}{2EI}$ $y = -\frac{Fa^2}{6EI}(3x - a)$
	$\theta_B = -\frac{qL^3}{6EI}$	$f_B = -\frac{qL^4}{8EI}$	$y' = \frac{-qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x')$ $y = \frac{-qx^2}{24EI}(x^2 - 4Lx + 6L^2)$
	$\theta_B = \frac{qa^3}{6EI}$	$f_B = \frac{-qa^3(4L-a)}{24EI}$	$x \leqslant a : y' = -\frac{qx}{6EI}(x^2 - 3ax + 3a^2)$ $y = -\frac{qx^2}{24EI}(x^2 - 4ax + 6a^2)$ $x > a : y' = -\frac{qa^3}{6EI}$; $y = -\frac{qa^3}{24EI}(4x - a)$
	$\theta_B = -\frac{Ma}{EI}$	$f_B = \frac{-Ma(2L-a)}{2EI}$	$x \leqslant a : y' = -\frac{Mx}{EI}$; $y = -\frac{Mx^2}{2EI}$ $x > a : y' = -\frac{Ma}{EI}$; $y = -\frac{Ma}{2EI}(2x - a)$
	$\theta_B = -\frac{q_0L^3}{24EI}$	$f_B = -\frac{q_0L^4}{30EI}$	$y' = -\frac{q_0x}{24\ LEI}(4L^3 - 6L^2x + 4Lx^2 - x^3)$ $y' = -\frac{q_0x^2}{120\ EIL}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$

Poutre	Pente maxi	Flèche maxi	Équations
	$\theta_A = -\frac{FL^3}{16EI}$ $\theta_A = \theta_B$	$f_C = -\frac{FL^3}{48EI}$	$0 \leqslant x < ½$ $y' = -\frac{F}{16\,EI}\left(L^2 - 4x^2\right)$ $y = -\frac{F.x}{48\,EI}\left(3L^2 - 4x^2\right)$
	$\theta_A = \frac{-F.a.b(L+b)}{6EIL}$ $\theta_B = \frac{F.a.b(L+a)}{6EIL}$	si $a > b$ $x_f = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$ $f = \frac{F.b\left(L^2 - b^2\right)^{3/2}}{9\sqrt{3}\,EIL}$	$0 \leqslant x < a$ $y' = -\frac{F.b}{6\,EIL}\left(L^2 - b^2 - 3x^2\right)$ $y = -\frac{F.b.x}{6\,EIL}\left(L^2 - b^2 - x^2\right)$
	$\theta_A = \frac{-qL^3}{24EI}$ $\theta_A = \theta_B$	$f = -\frac{5qL^4}{384EI}$ pour $x = \frac{L}{2}$	$y' = -\frac{q}{24EI}\left(4x^3 - 6Lx^2 + L^3\right)$ $y = -\frac{q.x}{24EI}\left(x^3 - 2Lx^2 + L^3\right)$
	$\theta_A = \frac{-qa^2(2L-a)^2}{24EIL}$ $\theta_B = \frac{-qa^2(2L-b)^2}{24EIL}$		$x \leqslant a$: $y' = \frac{-q}{24\,EIL}\left(\begin{matrix}4Lx^3 - 12\,aLx^2 + 6a^2x^2 \\ + 4a^2L^2 - 4a^3L + a^4\end{matrix}\right)$ $y' = \frac{-q.x}{24\,EIL}\left(\begin{matrix}Lx^3 - 4aLx^2 + 2a^2x^2 \\ + 4a^2L^2 - 4a^3L + a^4\end{matrix}\right)$
	$\theta_A = \frac{-M\left(6aL - 3a^2 - 2L^2\right)}{6EIL}$ $\theta_B = \frac{+M\left(3a^2 - L^2\right)}{6EIL}$		$x \leqslant a$: $y' = \frac{-M}{6\,EIL}\left(6aL - 3x^2 - 3a^2 - 2L^2\right.$ $y' = \frac{-M.x}{6\,EIL}\left(6aL - x^2 - 3a^2 - 2L^2\right.$
	$\theta_A = \frac{-7q_0L^3}{360EI}$ $\theta_B = \frac{q_0L^3}{45EI}$	pour $x_1 = 0{,}5193\,L$ $f = \frac{0{,}00652\,q_0L^4}{EI}$	$y' = \frac{-q_0}{360EIL}\left(15x^4 - 30L^2x^2 + 7L^4\right)$ $y' = \frac{-q_0x}{360EIL}\left(3x^4 - 10L^2x^2 + 7L^4\right)$

EXERCICES À RÉSOUDRE

❑ Le tour de grande capacité proposé réalise le tournage d'un cylindre de 1 m de diamètre et de longueur 5 m.
La masse volumique de l'acier est de **7 800** kg.m^{-3}.
E = 20 000 daN.mm^{-2}.
a) Déterminer la valeur de la charge répartie q correspondant au poids du cylindre seul (l'action de l'outil de coupe est négligée).
b) Déterminer la déformée du cylindre. En déduire la flèche maximum (l'étude du cylindre se ramène au schéma ci-contre).

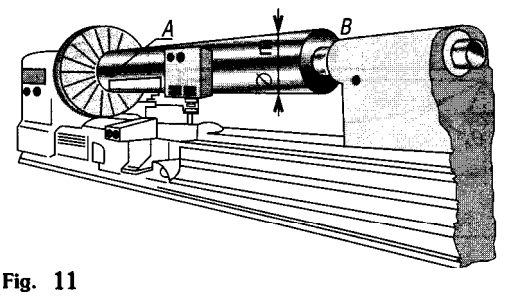


Fig. 11

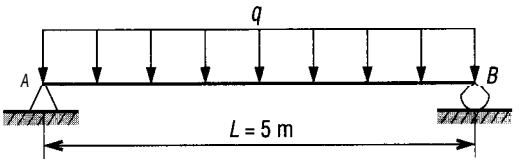


Fig. 12

2 Reprendre l'exercice 1 avec un cylindre plus petit (Ø 30 ; L = 0,5 m). Les actions $\vec{F}$ schématisent les efforts exercés par des outils de coupe (**F** = 100 daN). Le poids de la barre est négligé.
Déterminer la déformée de la barre.

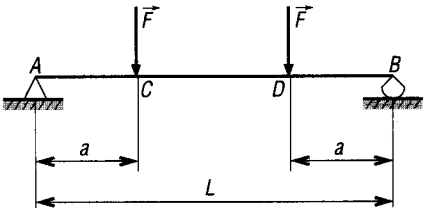


Fig. 13

Réponse

$y = -\frac{Fx}{6EI}\left(3aL - 3a^2 - x^2\right)$ si $x \leqslant a$;
$y = -\frac{Fa}{6EI}\left(3Lx - 3x^2 - a^2\right)$ si $a \leqslant x \leqslant L - a$;
$f_{maxi} = -\frac{Fa}{24EI}\left(3L^2 - 4a^2\right)$ pour $x = L/2$; $\theta_A = \theta_B = \frac{Fa(L-a)}{2EI}$;

3 Un relais électrique à contact est réalisé à partir d'une lame (AB), parallélépipédique (90 x 10 x 0,6), en laiton et encastrée en A. La manoeuvre est effectuée en C par un électro-aimant placé à la distance h de la lame (au repos). Si l'écartement des contacts en B est e = 3 mm, déterminer la force nécessaire que doit exercer l'électro-aimant pour établir le contact. À partir de quelles valeurs de h le contact est-il possible ? E_{laiton} = 100 GPa.

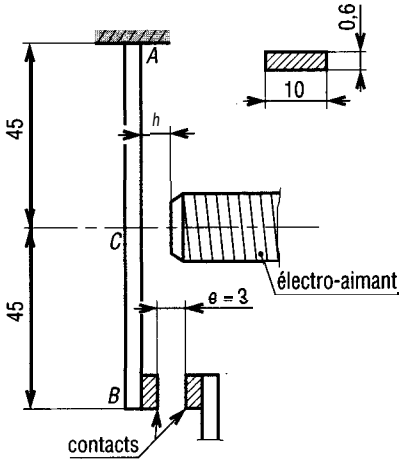


Fig. 14

Réponse

0,711 N ; $h \geqslant 1{,}2$ *mm.*

❑ Une colonne (2) de presse à air comprimé supporte un couple M en B engendré par la charge $F = 200$ daN (on se place dans le cas le plus défavorable).
Les poids de (1) et (2) sont négligés ainsi que les déformations engendrées par les phénomènes de traction. Écrire l'équation de la déformée de la poutre et la flèche maximale si $E = 200$ GPa.

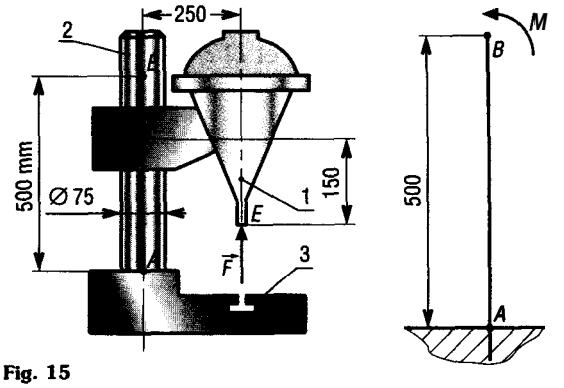


Fig. 15

5 Reprendre l'exercice 4. Si on tient compte du phénomène de traction dans la barre (2) dû à la charge $\vec{F}$, déterminer la position exacte du point B après déformation.

❑ Une clé dynamométrique est utilisée pour réaliser avec précision des couples de serrage compris entre 0 et 100 Nm. Elle se compose d'une tige de manœuvre cylindrique 2 (0 11 mm) encastrée dans un carré porte-douille indéformable (5). La mesure du couple est obtenue en repérant la flexion (flèche, au point B) du tronçon AB au moyen d'un curseur gradué (3). La charge F schématise l'action de l'opérateur, le tronçon BC est supposé indéformable ainsi que l'aiguille (1).
Écrire une relation entre la flèche en B (f) et le couple de serrage de l'écrou.
En déduire la valeur (en mm) des graduations du curseur,

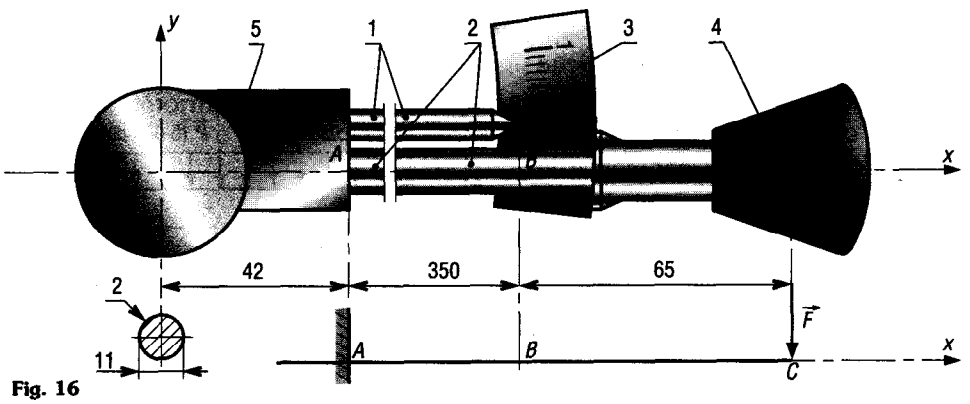


Fig. 16

7 Un arbre est guidé en rotation par deux paliers à roulements en B et C et supporte deux poulies à ses deux extrémités A et D. $\vec{F}$ schématise la charge exercée par les poulies. Si EI est supposé constant, déterminer la déformée de l'arbre et la flèche au milieu de BC.

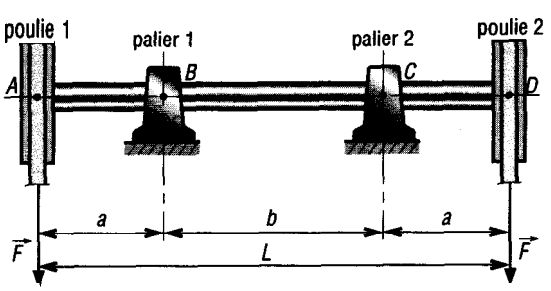


Fig. 17

Réponse

$$y_{AB} = \frac{F}{6EI}\left[-x^3 + (3a^2 + 3ab)x - 2a^3 - 3a^2b\right]$$

$$y_{BC} = \frac{F}{2EI}\left[-ax^2 + (2a^2 + ab)x - a^3 - a^2b\right]$$

$$f = -\frac{Fab^2}{8EI}.$$

❑ Reprendre l'exercice 7. Pour quelle valeur de a la flèche au milieu de BC est-elle égale à celles en A et D ?

Réponse

$a = 0{,}152\ L$.

❑ Reprendre l'exercice 7. Les poulies sont mises à la place des paliers et inversement ($\vec{F}$ en B et C). Déterminer la flèche au milieu de BC.

Réponse

$f = -\frac{F a}{24 E I}\left(3L^2 - 4a^2\right)$

❑ Reprendre l'exercice 7. La poulie 1 et le palier 1 sont inversés ($\vec{F}$ en B et D) ; a = b = $L/3$. Déterminer la flèche en D. Si F_D et F_B sont différentes, pour quelle valeur de F_D la flèche en D est-elle nulle ?

Réponse

$f_D = -\frac{3 F a^3}{4 E I}$; $F_D = \frac{F_B}{4}$.

❑ Une poutre principale (1) de pont roulant est réalisée à partir d'un profilé IPE de 450 (I_z = 33 740 cm⁴). La poutre supporte une charge concentrée P = 5 000 daN en C (action d'un palan) et une charge répartie q = 77,6 daN.m⁻¹ (schématise le poids de la poutre) sur toute la longueur. Déterminer la déformée de la poutre et la flèche maximale (E = 200 GPa).

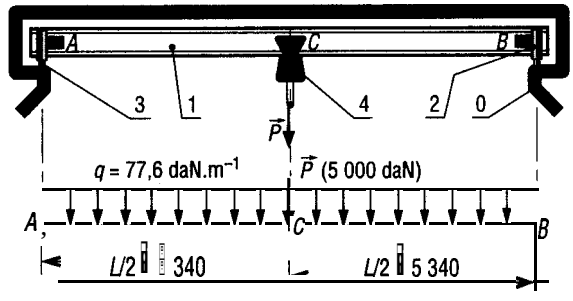


Fig. 18

Réponse

$f \approx 20{,}7$ mm

12 Reprendre l'exercice 11 avec une poutre principale de potence pour manutention : IPE de 330 ; I_z = 11 770 cm⁴ ; P = 2 000 daN en B ; q = 49,1 daN.m⁻¹ ; L = 4900 mm.

Réponse

f_B = 34,81 mm.

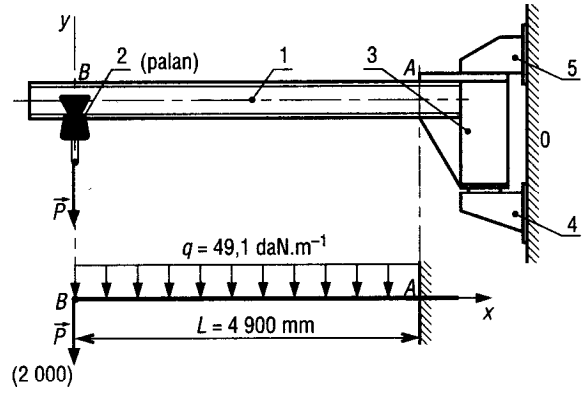


Fig. 19

27 FLEXION SYSTÈMES HYPERSTATIQUES

OBJECTIFS

- Définir la notion de système hyperstatique, donner des exemples.
- Développer les méthodes de calcul par superposition et par intégration.

Un système, ou une poutre, est dit hyperstatique chaque fois que les actions de contact exercées par les liaisons ne sont pas calculables à partir des équations du principal fondamental de la statique.

Les actions ne pourront être déterminées qu'après écriture d'autres équations obtenues à partir des déformations du système. Plusieurs méthodes sont ici possibles ; deux seront étudiées.

Exemple 1

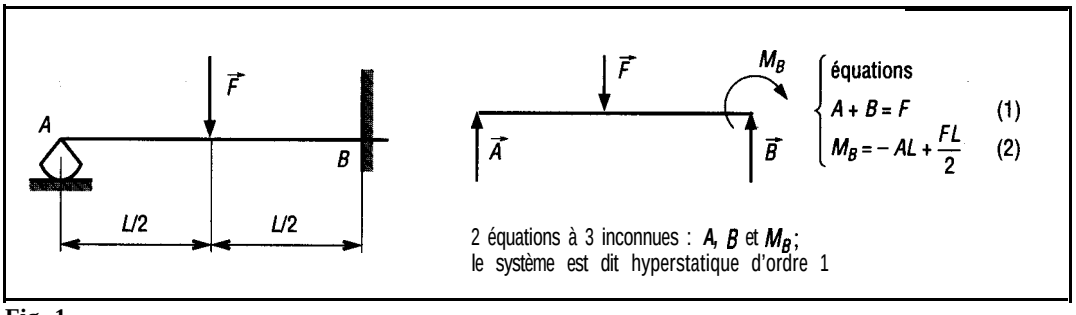


Fig. 1

Exemple 2

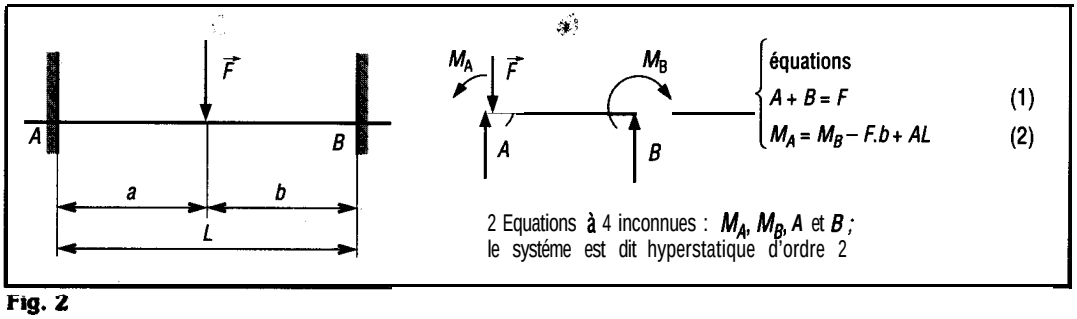


Fig. 2

I - Méthode par superposition

L'utilisation du théorème de superposition, présenté au chapitre précédent, permet de ramener un problème hyperstatfque à la somme (addition algébrique ou vectorielle) de deux ou plusieurs problèmes isostatiques, dont la résolution est dassique et connue (formulaire.. .).

1. Poutre sur trois appuis avec charge répartie q

Cet exemple classique est applicable à des dispositifs variés (cuve, structures, etc.). Prenons le cas d'une étagère sur trois appuis. q schématise le poids des livres et objets divers.

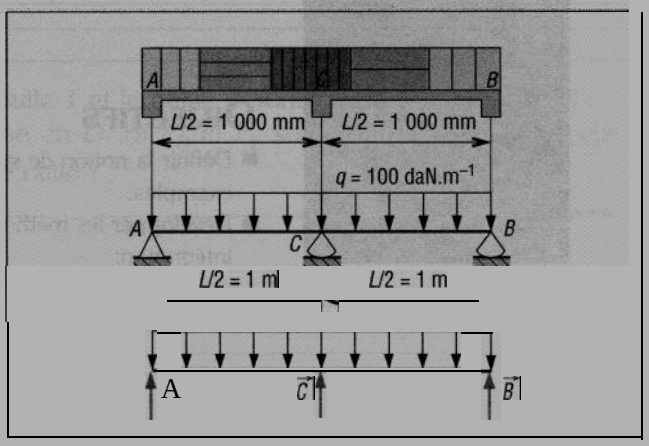


Fig. 3

a) Étude statique

$A + B + C = qL$ (1)

$A = B$ (symétrie) (2)

On a deux équations à trois inconnues : le système est dit hyperstatique d'ordre 1.

b) Système isostatique associé

Afin de pouvoir appliquer le théorème de superposition, remplaçons l'appui C par la charge $\vec{C}$ qu'il exerce, en remarquant que $\vec{C}$ doit avoir une intensité suffisante pour entraîner une flèche nulle en C : y, = 0. Notons que l'on pourrait procéder de façon analogue avec les appuis A et B. C présente l'avantage de donner un problème symétrique plus simple à résoudre.

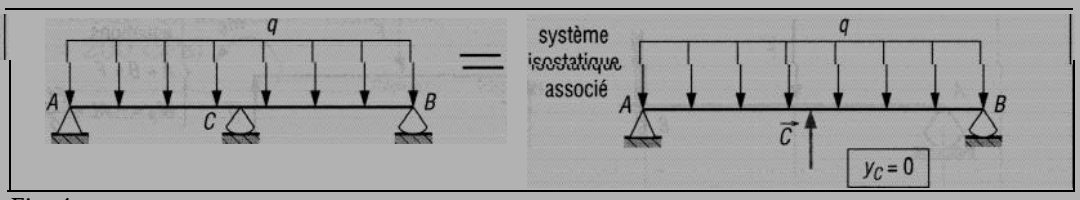


Fig. 4

$\vec{C}$ devient une donnée du problème et les équations de la statique s'écrivent :

$$A = B = \frac{1}{2} qL - \frac{1}{2} C$$

c) Théorème de superposition

Appliquons le théorème pour déterminer la flèche y_C, en C.

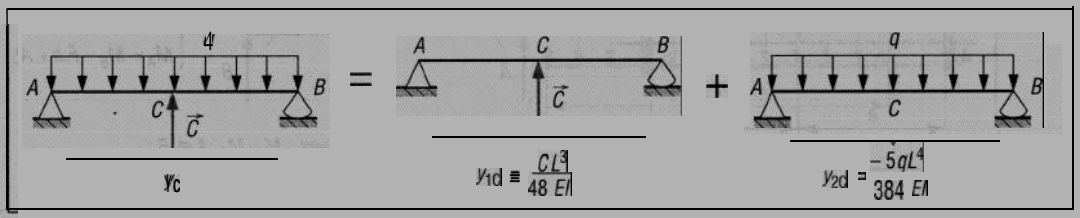


Fig. 5

y, c et y, c sont obtenues à partir du formulaire du chapitre précédent.

$$y_C = y_{1C} + y_{2C} = \frac{CL^3}{48EI} - \frac{5qL^4}{384EI} = \frac{L^3}{48EI}\left(C - \frac{5qL}{8}\right) = 0$$

$$\boxed{C = \frac{5qL}{8}}$$

sachant que A + *B* + *C* = *qL* avec *A* = *B* $\boxed{A = B = \frac{3qL}{16}}$

d) Résultats et diagrammes

Une fois A, *B* et C connues, la suite de l'étude se ramène à celle des chapitres précédents.

$$M_{f\,AC} = \frac{qx}{2}\left(x - \frac{3L}{8}\right)$$

Le moment fléchissant maximal apparaît en C :

$$M_{f\,maxi} = \frac{qL^2}{32} = 125\text{Nm}$$

Remarquons que ce moment fléchissant maximal est quatre fois plus petit que celui d'une poutre sur deux appuis *A* et *B*. Avec un appui supplémentaire en C, on multiplie par quatre la capacité de charge de la poutre. Dans les deux cas, la zone fragile reste la section C.

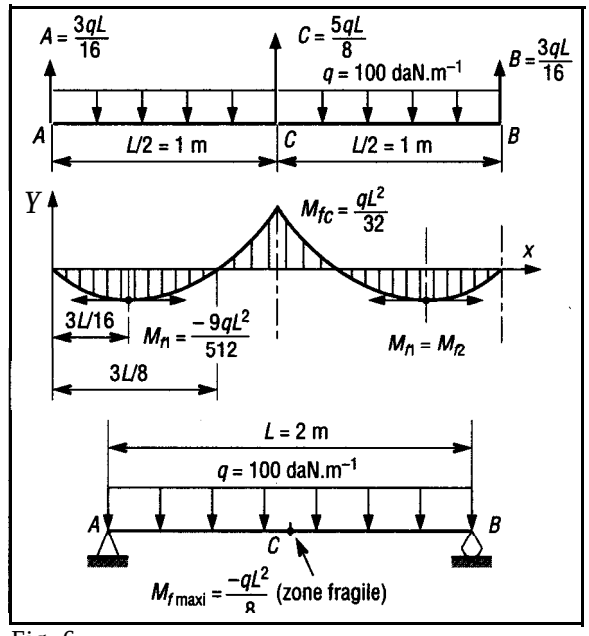


Fig. 6

2. Poutre encastrée avec charge répartie et appui supplémentaire à son extrémité

Cet exemple, lui aussi très classique, est applicable à de nombreux dispositifs.

a) Étude statique

$$A + B = qL \qquad (1)$$

$$M_B = -AL + \frac{qL^2}{2} \qquad (2)$$

On a deux équations à trois inconnues : A, *B* et M_B ; le système est hyperstatique d'ordre 1.

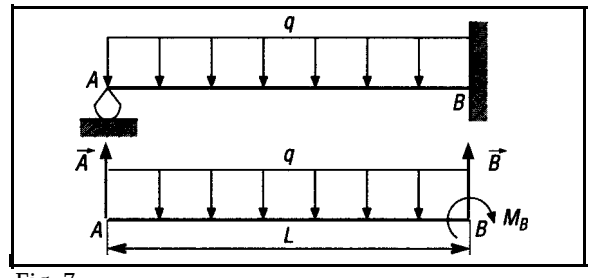


Fig. 7

b) Système isostatique associé et principe de superposition

Même démarche qu'avec l'exemple précédent : remplaçons l'appui *A* par la charge $\vec{A}$ qu'il exerce, en remarquant que l'intensité de A doit entraîner une flèche nulle en A : y, = 0. On pourrait procéder de façon analogue en remplaçant l'encastrement *B* par une articulation plus un couple M_B.

Appliquons le théorème de superposition pour obtenir la flèche en A.

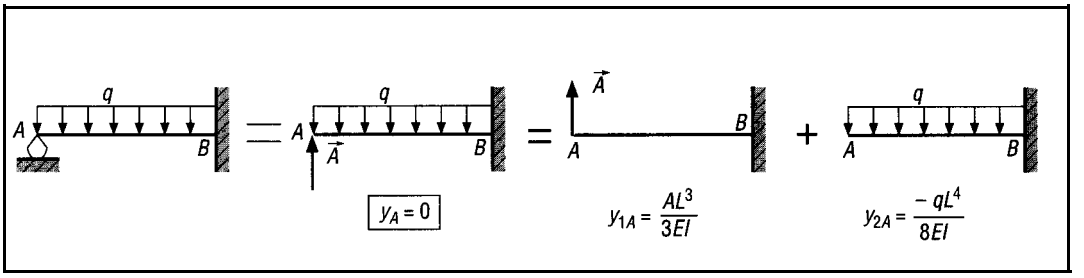


Fig. 8

$$y_A = y_{1A} + y_{2A} = \frac{A L^3}{3EI} - \frac{q L^4}{8EI} = \frac{L^3}{EI}\left(\frac{A}{3} - \frac{qL}{8}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{3qL}{8}}$$

il en résulte que : $\boxed{B = \frac{5qL}{8}}$ et $\boxed{M_B = \frac{qL^2}{8}}$

c) Résultats et diagrammes

$$M_{f\,AB} = -\frac{q x^2}{2} + \frac{3qL}{8} x$$

Le moment fléchissant maximal apparaît à l'encastrement B : $M_{f\,max} = \frac{qL^2}{8}$.

Remarquons que ce moment maximal est quatre fois plus petit que celui d'une poutre encastrée sans appui en A. Autrement dit, en mettant un appui en A, on quadruple la capacité de charge de la poutre. Dans les deux cas, la zone fragile reste l'encastrement.

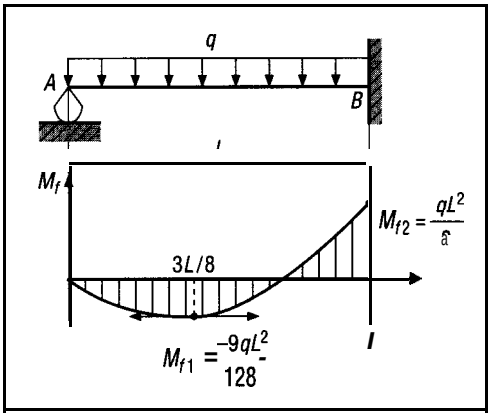


Fig. 9

II • Méthode par intégration

La méthode reprend le principe des intégrations successives à partir de $M_f = -EIy''$ abordé dans le chapitre « flexion - déformations ».

Les conditions limites aux appuis supplémentaires permettent de déterminer les actions inconnues en fournissant des équations supplémentaires.

Exemple : reprenons l'exemple 2 d'introduction, avec $a = b = L/2$.

Remarquons que, par symétrie : A = $B = F/2$ et $M_A = M_B$.

M_A, ou M_B, reste indéterminé et le système est hyperstatique d'ordre 1.

$$M_{f\,AC} = M_A - Ax = M_A - \frac{Fx}{2}$$

$$EIy''_{AC} = -M_{f\,AC} = \frac{Fx}{2} - M_A$$

$$EIy'_{AC} = \frac{Fx^2}{4} - M_A x + C_1$$

$$EIy_{AC} = \frac{Fx^3}{12} - M_A \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

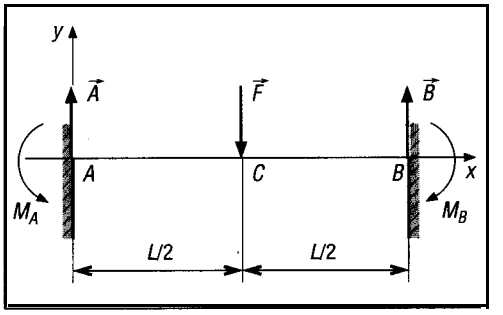


Fig. 10

Les conditions limites à l'encastrement A permettent de déterminer les constantes C_1 et C,.

Pour x = 0, y,, = 0, ce qui donne $C_2 = 0$.

De même, la pente de la tangente en A est nulle ; $y'_{AC} = 0$, ce qui donne $C_1 = 0$.

De plus, au centre de la poutre, pour x = $L/2$, la pente de la tangente en C est nulle :

$$EIy'_{AC} = 0 = \frac{F}{4}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - M_A\frac{L}{2} \quad \text{donne} \quad \boxed{M_A = \frac{FL}{8}}$$

Résultats

$$y'_{AC} = \frac{Fx}{4EI}\left(x - \frac{L}{2}\right) \quad \text{et} \quad y_{AC} = \frac{Fx^2}{4EI}\left(\frac{x}{3} - \frac{L}{4}\right)$$

EXERCICES À RÉSOUDRE

1 Retrouver les résultats de l'exemple du paragraphe 12 avec la méthode par intégration.

❑ Reprendre l'exercice 1 avec l'exemple du paragraphe 11.

❑ Un cylindre ABC de diamètre 30 mm est usiné en tournage mixte. F (1 200 N) schématise les efforts de coupe et de pénétration exercés par l'outil.

a) Déterminer les actions en A et B, si a = b = 150 mm.

b) En déduire les diagrammes des T et des M_f.

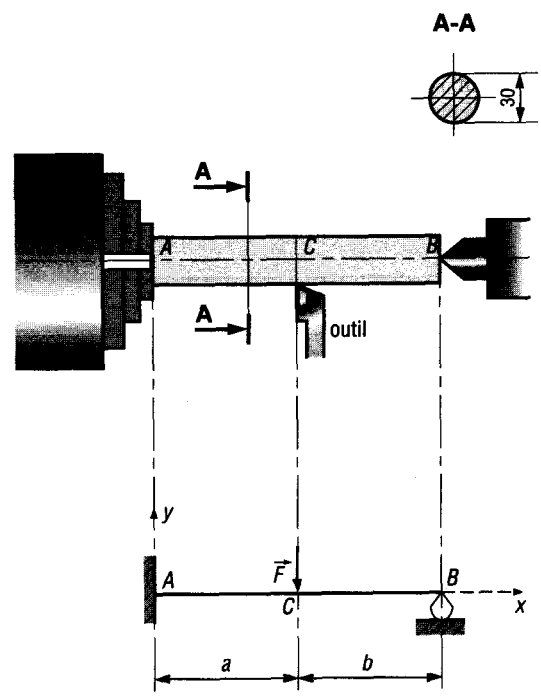


Fig. 11

4 Reprendre l'exercice 3 avec a différent de b ; a + b = L. Pour quelle valeur de a les deux moments fléchissants maximum du diagramme des M_f sont-ils égaux ?

Réponse

$A_y = \frac{F b}{2L^3}\left(3L^2 - b^2\right)$; $B_y = \frac{F a^2}{2L^3}(3L - a)$; $M_A = \frac{F a b}{2L^2}(L + b)$; $a = 0{,}586L$.

5 Reprendre l'exercice 3 avec deux outils travaillant simultanément.

Réponse

$A = 2B = \frac{4F}{3} = 160$ daN ;

$M_A = \frac{FL}{3} = 120$ Nm $= M_{f\,maxi}$.

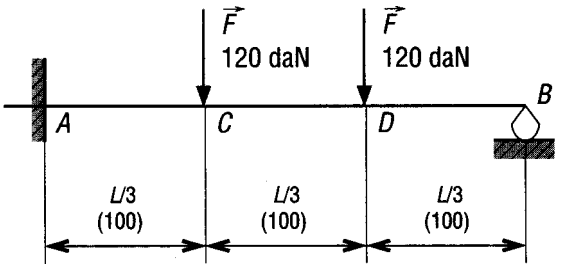


Fig. 12

❑ Pour l'aile d'avion (*ABC*) proposée, la charge répartie q (1 100 $N.m^{-1}$) schématise l'action de l'air. Le maintien de l'aile est assuré par une barre BD supposée indéformable. L'étude de l'aile en flexion se ramène schéma de la figure. Les efforts de compression dans le tronçon BC sont négligés.

a) Déterminer les actions exercées par les appuis en B et C.

b) En déduire les diagrammes des T et des M_f entre A et C.

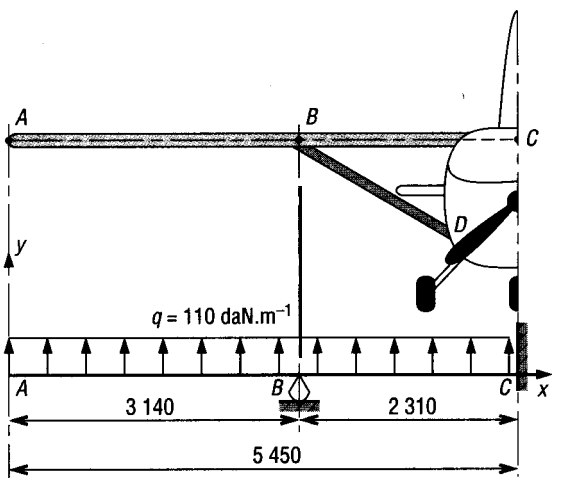


Fig. 13

7 Une poutre encastrée à ses deux extrémités A et B supporte deux charges concentrées $\vec{F}$ en C et D, symétriquement.

Déterminer les actions aux encastrements et la flèche maximale dans la poutre.

Réponse

$A_y = B_y = F$

$M_A = M_B = \frac{F a}{L}(L - a)$

$f = \frac{F a^2}{24 EI}(3L - 4a)$.

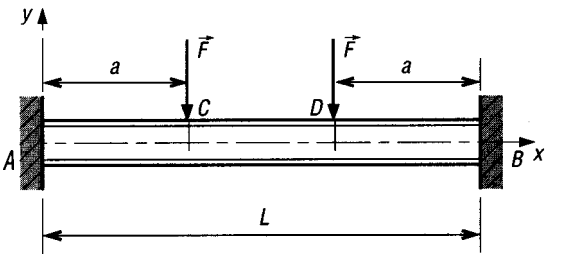


Fig. 14

8 Un arbre de transmission ABC, guidé par trois paliers à roulements, transmet de la puissance entre deux poulies.

$\vec{T}$ schématise l'action de la poulie et des courroies sur l'arbre.

a) Déterminer les actions exercées en A, B et C.

b) En déduire les diagrammes des M_f et le moment fléchissant maximum.

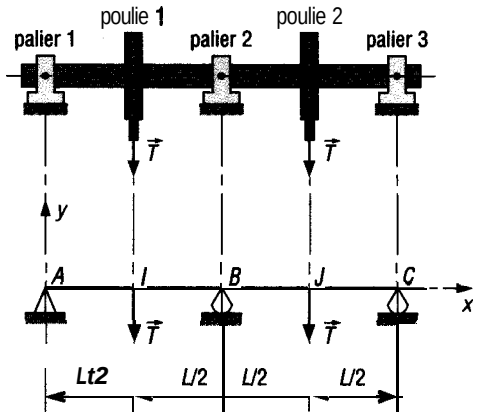


Fig.15

Réponse

$A_y = C_y = \frac{5T}{16}$; $B_y = \frac{11T}{8}$; $M_{f\,maxi} = \frac{3TL}{16}$.

9 Reprendre l'exercice 8 avec une seule poulie en J ou une seule charge T'en J (pas de charge en I).

Réponse

$A_y = -\frac{3T}{32}$; $B_y = \frac{11T}{16}$; $C_y = \frac{13T}{32}$; $M_{f\,maxi} = \frac{13TL}{64}$.

❑ Un pont provisoire est construit à partir d'une poutre AB et d'un flotteur de section transversale S.

La charge répartie q schématise le poids de la poutre et le poids des véhicules qui circulent. On suppose qu'au repos (pour $q = 0$), le flotteur n'exerce aucune action.

a) Établir une relation entre S, L, q, EI, y, (l'enfoncement en C) et la masse volumique de l'eau (p = 1 000 kg.m^{-3}).

b) Quelle doit être l'action en C ($\vec{C}$) pour que la flèche en C soit nulle ($y_C = 0$) ?

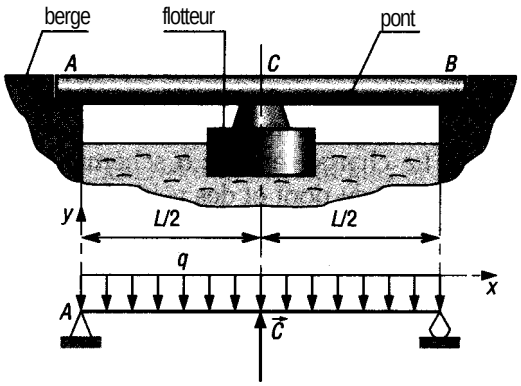


Fig.16

❑ Une cuve complètement remplie repose sur trois appuis A, B et C. La charge répartie q (2 000 daN.m^{-1}) schématise le poids de la cuve et du liquide qui y est contenu.

a) Déterminer les actions exercées par les appuis en A, B et C.

b) Tracer les diagrammes des T et M_f. Quelle est la valeur du $M_{f\,maxi}$?

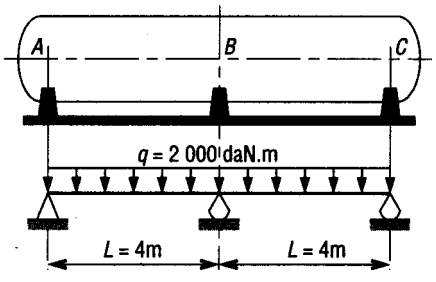


Fig.17

❑ Reprendre l'exercice 11 en supposant la cuve remplie sur la moitié BC.

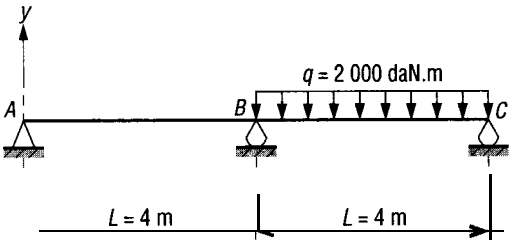


Fig. 18

Réponse

A = −0,0625 qL ;
B = 0,625 qL ;
c = 0,4375 qL
$M_{f\,maxi}$ = 0,0625 qL^2.

❑ Un marbre en granit, utilisé en métrologie, est posé sur trois paires de pieds en A, B et C. La charge répartie q (900 daN.m^{-1}) schématise le poids du marbre.

a) Déterminer les actions exercées par les appuis en A, B et C.

b) La contrainte admissible en compression est de 200 MPa, celle en traction de 20 MPa. Comparer ces valeurs avec les contraintes dans le marbre.

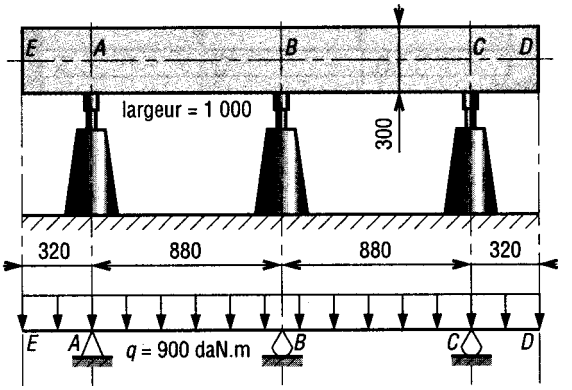


Fig. 19

14 Un pont à poutre continue repose sur quatre appuis A, B, C et D. La charge répartie q schématise le poids du pont et des véhicules qui circulent.

a) Déterminer les actions exercées par les appuis.

b) Tracer les diagrammes des T et des M_f, indiquer la valeur du moment fléchissant maximal.

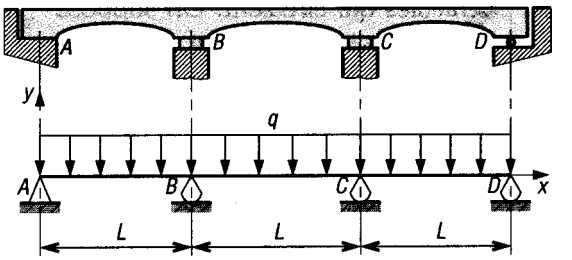


Fig. 20

Réponse

$A_y = D_y = \frac{2qL}{5}$; $B_y = C_y = \frac{11qL}{10}$; $M_{f\,maxi} = \frac{qL^2}{10}$.

❑ Reprendre l'exercice 14 avec des charges concentrées $\vec{F}$ au milieu de chaque travée.

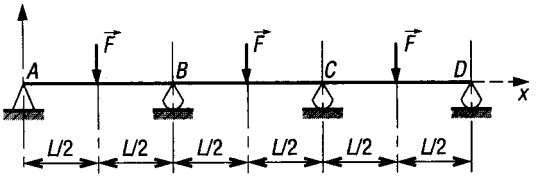


Fig. 21

Réponse

$A_y = D_y = \frac{7F}{20}$; $B_y = C_y = \frac{23F}{20}$; $M_{f\,maxi} = \frac{7FL}{40}$.

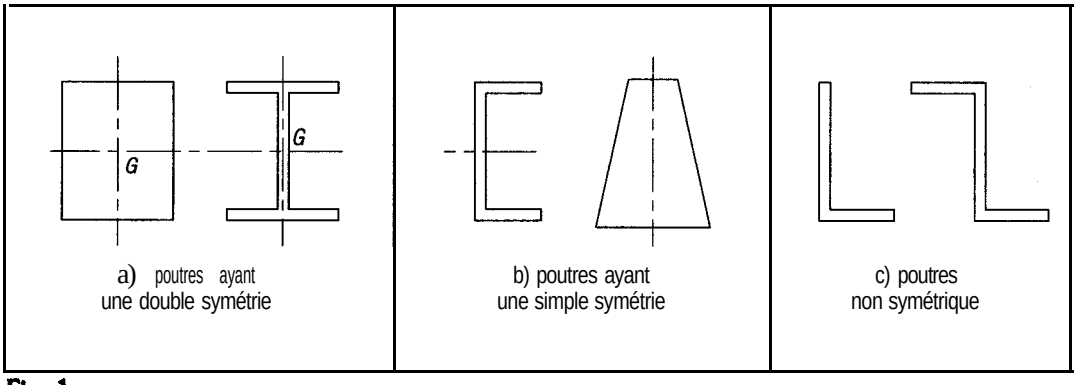
28 FLEXION DÉVIÉE

OBJECTIFS

- Définir la notion de flexion déviée.
- Déterminer les contraintes et le plan neutre lorsque les poutres ont au moins un plan de symétrie.
- Traiter le cas des poutres non symétriques.

Les études de flexion des chapitres précédents sont limitées à des poutres ayant un plan de symétrie (x, y) passant par l'axe ou la ligne moyenne (x).
Les charges sont supposées agir dans ce plan de symétrie. Il en résulte notamment que les poutres se déforment dans la direction y du plan de symétrie, encore appelé plan de flexion ou plan de fléchissement.

Dans ce chapitre nous allons aborder l'étude des poutres non symétriques et le cas des poutres symétriques non chargées dans leur plan de symétrie.



a) poutres ayant une double symétrie

b) poutres ayant une simple symétrie

c) poutres non symétrique

On se place dans le cas où la poutre n'est pas chargée suivant un plan de symétrie (dans le cas contraire, il y a flexion simple et non plus flexion déviée).

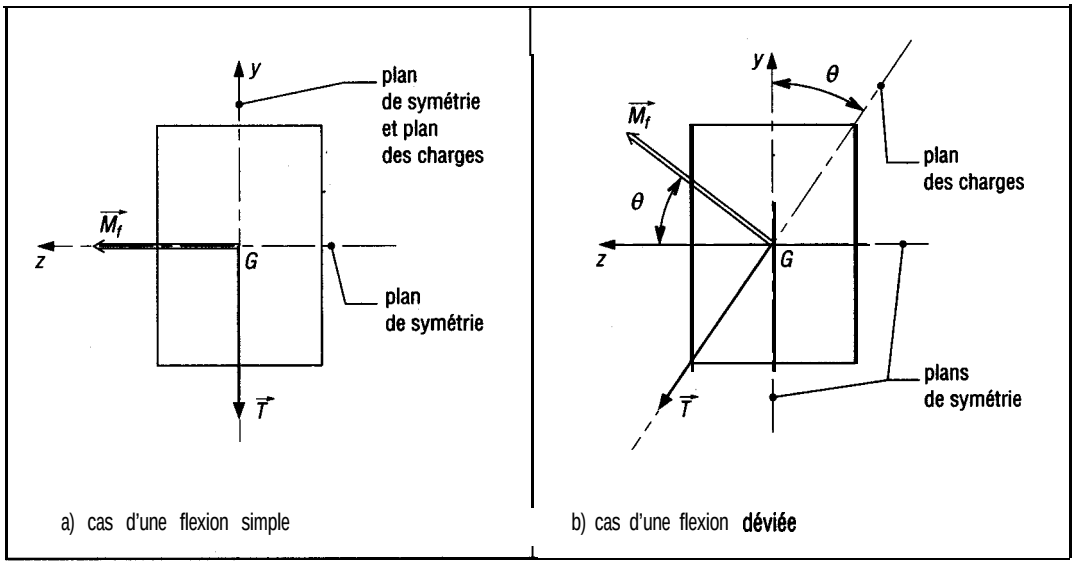


Fig. 2

L'étude de la flexion déviée, du type de celle indiquées par la figure 2, se ramène à la superposition ou à l'addition (vectorielle) de deux flexions simples, définies à partir des plans de symétrie **(fig. 3)**.

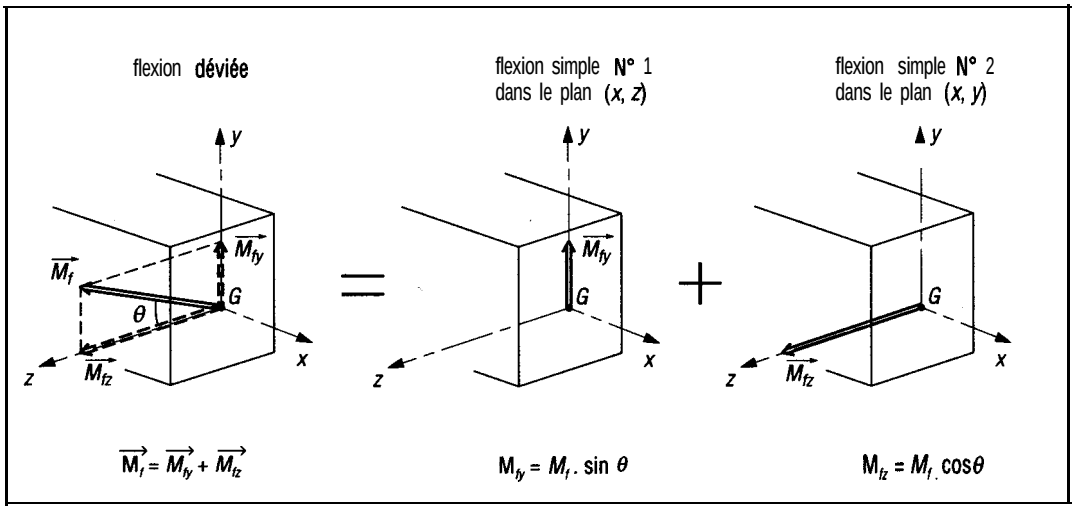


Fig. 3

1. Contraintes

Si on néglige les effets de l'effort tranchant T, la contrainte en un point A, de coordonnées (y_A, z_A), dans le système d'axes (G, y, z), est la somme (algébrique ou vectorielle) des contraintes dues à chacune des flexions simples M_{fy} et M_{fz}. Autrement dit :

$$\sigma_A \simeq \frac{Mf_y}{I_y} . z_A - \frac{Mf_z}{I_z} . y_A$$

avec : y,., et z_A, coordonnées de A dans (G, y, z)

$M_{fy} = M_f \sin \theta$ et $M_{fz} = M_f \cos \theta$ sont les projections du moment fléchissant $\vec{M_f}$ sur les axes y et z.

I_y et I_z, moments quadratiques de la section par rapport aux axes y et z.

Remarque

Dans le cas de la figure ($y_A > 0$; $z_A > 0$; $M_{fy} > 0$; $M_{fz} > 0$), M_{fy} engendre des contraintes positives en A (contraintes de traction), alors que M_{fz} donne des contraintes négatives (contraintes de compression), ce qui explique le signe moins de la formule indiquée **(fig. 5)**.

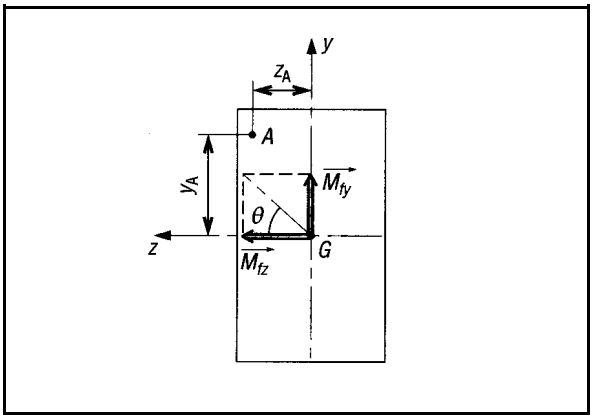


Fig. 4

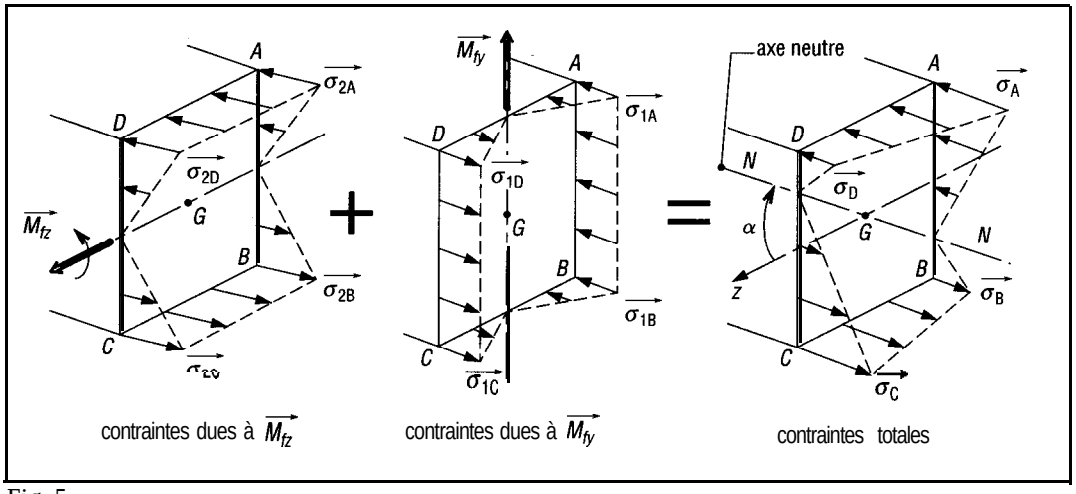


Fig. 5

Remarques : pour la figure 5

$$\sigma_{2C} = \sigma_{2B} = \sigma_{2maxi} = \frac{Mf_z}{I_z} \cdot y_{maxi} = -\sigma_{2A} = -\sigma_{2D}$$

$$\sigma_{1D} = \sigma_{1C} = \sigma_{1maxi} = \frac{Mf_y}{I_y} \cdot z_{maxi} = -\sigma_{1A} = -\sigma_{1B}$$

$$\sigma_C = \sigma_{1maxi} + \sigma_{2maxi} \; ; \; \sigma_B = \sigma_{2maxi} - \sigma_{1maxi} \; ; \; \sigma_A = -(\sigma_{1maxi} + \sigma_{2maxi}) \; ; \; \sigma_D = \sigma_{1maxi} - \sigma_{2maxi}$$

Les contraintes σ_A et σ_D sont des contraintes de compression (< 0) et les contraintes σ_C et σ_B sont des contraintes de traction (> 0).

2. Plan neutre (*NN*) ou axe neutre

Le plan neutre est le plan ou les contraintes sont nulles :

$$\sigma = \frac{Mf_y}{I_y} \cdot z - \frac{Mf_z}{I_z} \cdot y = 0 \quad \text{donne}$$

$$\tan\alpha = \left(\frac{Mf_y}{Mf_z}\right)\left(\frac{I_z}{I_y}\right) = \frac{y}{z} = \left(\frac{Mf\sin\theta}{Mf\cos\theta}\right)\left(\frac{I_z}{I_y}\right)$$

d'où $\boxed{\tan\alpha = \left(\frac{I_z}{I_y}\right)\tan\theta}$

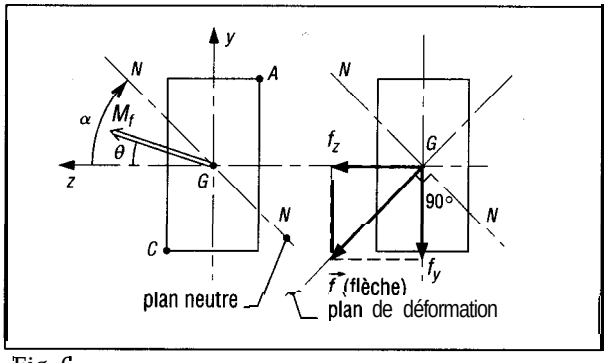


Fig. 6

Remarque : les contraintes sont maximales aux points les plus éloignés (A et *C*) du plan neutre et les déformations (flèche *f*) se font perpendiculairement à celui-ci.

3. Exemple 1

Un profilé IPN de 200 supporte un moment fléchissant M_f de 5 000 Nm, dont la direction est inclinée de 30" par rapport à l'axe z. Déterminons les contraintes en A, *B*, C et D et les contraintes maximales dans la section.

Résolution

Les dimensions et caractéristiques du profilé sont données par des tableaux de dimensions (voir chapitre « moments quadratiques »).

$I_y = 117\ \text{cm}^4$
$I_z = 2\ 140\ \text{cm}^4$

Coordonnées des points A, *B*, C et D dans le système d'axe (G, y, *z*) :

$y_A = 100$; $z_A = -45$; $y_B = -100$; $z_B = 45$;

$y_C = -100$; $z_C = -45$; $y_D = 100$; $z_D = 45$ mm.

Composantes du moment fléchissant $\overrightarrow{M_f}$ sur les axes (y, z) :

$M_{fz} = M_f \cos\theta = 5\,000 \times \cos 30" = 4\,330$ Nm.

$M_{fy} = M_f \sin\theta = 5\,000 \times \sin 30" = 2\,500$ Nm.

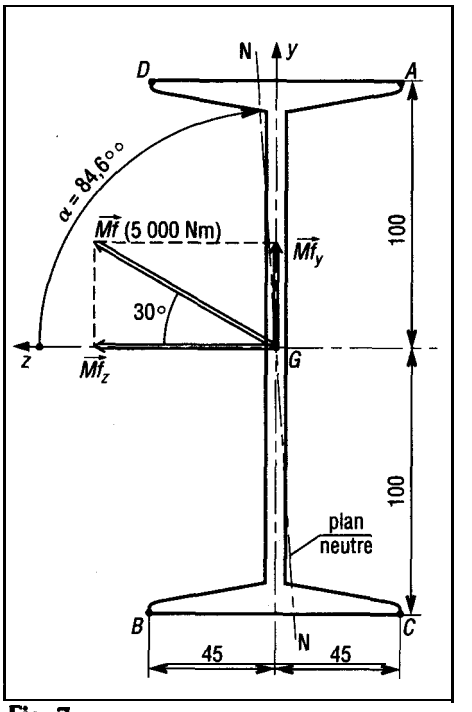


Fig. 7

Contrainte au point A :

$$\sigma_A = \frac{Mf_y}{I_y} z_A - \frac{Mf_z}{I_z} y_A$$

$$= \frac{(2500\text{x}\ 10^3\ \text{Nmm})\, z_A}{117\text{x}\ 10^4\ \text{mm}^4} - \frac{(4\,330 \times 10^3\ \text{Nmm})\, y_A}{2\ 140 \times 10^4\ \text{mm}^4}$$

$= 2{,}1367\, z_A - 0{,}2023\, y_A$

$= 2{,}1367\text{x}(-45) - 0{,}2023\text{x}(100)$

$= -96{,}15 - 20{,}23$

$= -116{,}38$ MPa.

Contraintes en *B*, C et D : même raisonnement qu'en A.

$\sigma_B = 2{,}1367\, z_B - 0{,}2023\, y_B = 2{,}1367 \times (45) - 0{,}2023 \times (-100) = 116{,}38$ MPa

$\sigma_C = 2{,}1367\, z_C - 0{,}2023\, y_C = 2{,}1367 \times (-45) - 0{,}2023 \times (-100) = -75{,}91$ MPa

$\sigma_D = 2{,}1367\, z_D - 0{,}2023\, y_D = 2{,}1367 \times (45) - 0{,}2023 \times (100) = 75{,}91$ MPa

Plan neutre *NN* :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{I_z}{I_y}\tan\theta\right) = \arctan\left(\frac{2\,140}{117}\tan 30°\right) = 84{,}6°.$$

Remarques : les contraintes à droite du plan neutre NN sont toutes des contraintes de compression (contraintes négatives) ; $\sigma_A = -116{,}38$ MPa est la contrainte de compression maximale. Les contraintes à gauche du plan neutre sont toutes des contraintes de traction (contraintes positives) ; $\sigma_B = 116{,}38$ MPa est la contrainte de traction maximale.

4. Exemple 2

Un profilé UAP de 250 est soumis à un moment fléchissant M_f de 2 000 Nm dont la direction est inclinée de 10" par rapport à l'axe z. Les axes y et z sont les axes principaux d'inertie de la section du profilé.

Déterminons les contraintes aux points A et B.

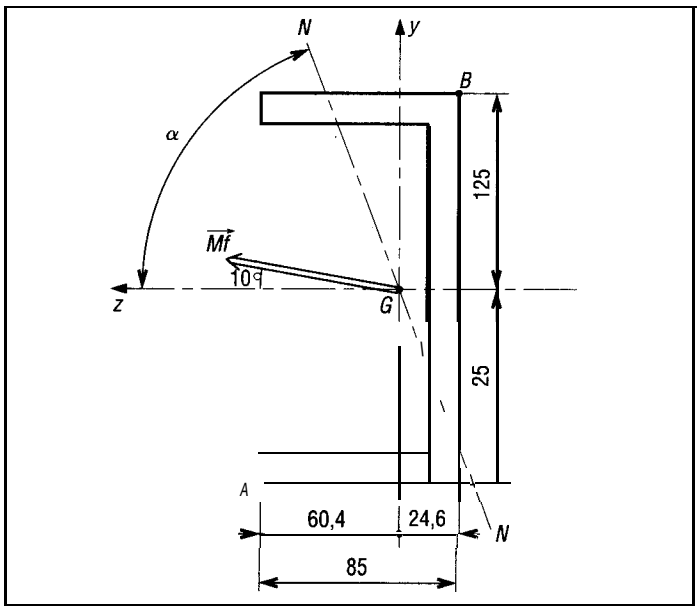


Fig. 8

Résolution

Les dimensions du profilé sont indiquées dans le chapitre « moments quadratiques » : $I_y = 296{,}7$ cm^4 et $I_z = 4\,136$ cm^4.

Coordonnées des points A et B dans le système d'axes (G, y, z) :

y, = − 125 ; $z_A = 60{,}4$ mm

y, = 125 ; $z_B = -24{,}6$ mm

Composantes du moment fléchissant suivant y et z :

$M_{fz} = M_f$ cos 10" = 2 000 cos 10" = 1 970 Nm

$M_{fy} = M_f$ sin 10" = 2 000 sin 10" = 347 Nm

Contrainte au point A :

$$\sigma_A = \frac{Mf_y}{I_y} \cdot z_A - \frac{Mf_z}{I_z} \cdot y, = \frac{(347 \times 10^3 \text{ Nmm}) \times 60{,}4}{296{,}7 \times 10^4 \text{ mm}^4} - \frac{(1970 \times 10^3 \text{ Nmm}) \times (-125)}{4\,136 \times 10^4 \text{ mm}^4}$$

$$\sigma_A = 7{,}064 + 5{,}954 = 13{,}018 = 13 \text{ MPa}$$

Contrainte au point B :

$$\sigma_B = \frac{Mf_y}{I_y} \cdot z_B - \frac{Mf_z}{I_z} \cdot y_B = \frac{347 \times (-24{,}6)}{2967} - \frac{1970 \times 125}{41360} = -8{,}83 \text{ MPa}$$

Plan neutre NN :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{I_z}{I_y}\tan\theta\right) = \arctan\left(\frac{4\,136}{296{,}7}\tan 10°\right) = 67{,}86°$$

Les contraintes en A et B sont les contraintes maximales dans la section. Les points A et B sont les point les plus éloignés du plan neutre NN.

Remarque : les contraintes à droite du plan neutre NN sont des contraintes de compression ; $\sigma_B = -8{,}83$ MPa en est la contrainte maximale. Les contraintes à gauche du plan neutre sont des contraintes de traction ; $\sigma_A = 13$ MPa est la contrainte maximale.

II -Poutres non symétriques

La poutre ne possédant aucun plan de symétrie, le premier travail consistera à déterminer les axes principaux d'inertie (U, V) de la section (angle β).

Remarque : pour les profilés usuels (cornières inégales, etc.), utiliser les tableaux de dimensions des fabricants.

Une fois les axes principaux U et V connus, l'étude de la flexion déviée est identique à celle du paragraphe I, en prenant les axes principaux comme axes de calcul (repère de calcul (G, U, V)).

$M_f = M_{fU} + M_{fV}$

$M_{fU} = M_f \sin\theta$ et $M_{fV} = M_f \cos\theta$

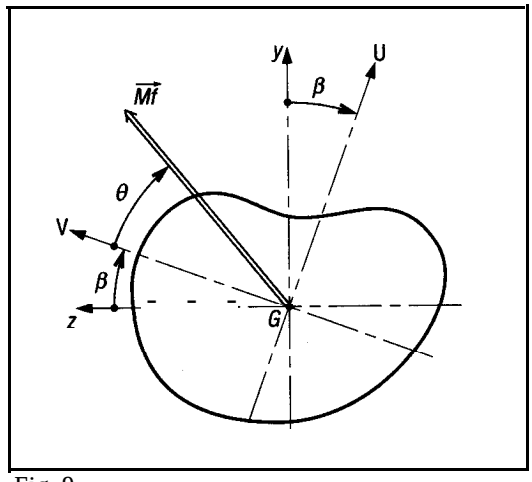


Fig. 9

Pour le point A de coordonnées U_A et V_A, la contrainte est :

$$\sigma_A = \frac{Mf_U}{I_U} \cdot V_A - \frac{Mf_V}{I_V} \cdot U_A$$

Plan neutre (ou axe neutre) NN :

$$\tan\alpha = \left(\frac{I_V}{I_U}\right)\tan\theta$$

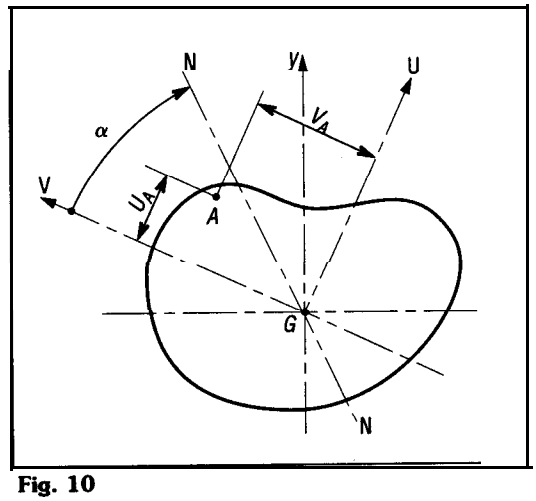


Fig. 10

Exemple : une cornière à ailes inégales 150 x 100 x 10 supporte un moment fléchissant M_f de 2 000 Nm dans la direction z. Déterminons les contraintes aux points A, B et C.

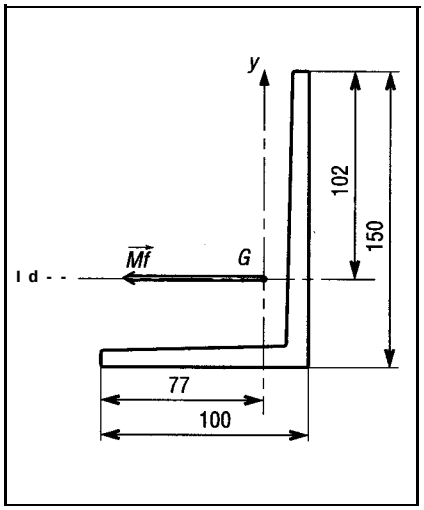


Fig. 11

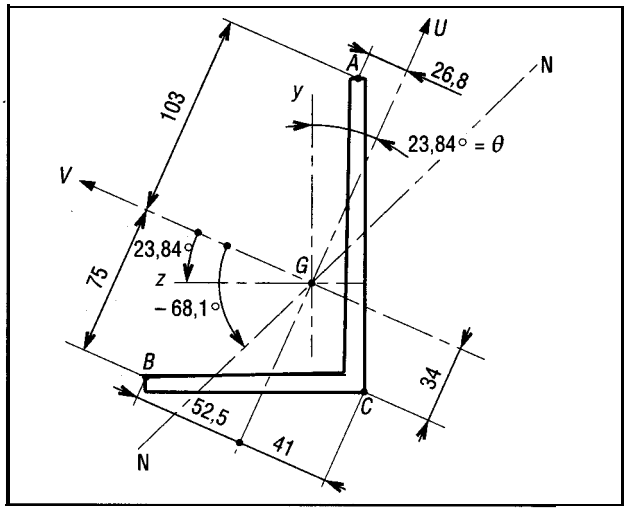


Fig. 12

Résolution

Les dimensions du profilé et les axes principaux d'inertie de la section V et U sont indiquées dans les tables de profilés :

$I_z = 552\ \text{cm}^4$; $I_y = 198\ \text{cm}^4$; $I_U = 113\ \text{cm}^4$; $I_V = 637\ \text{cm}^4$.

Remarque

$I_z + I_y = I_U + I_V$

Coordonnées des points A, B, C dans le système d'axes (G, U, V) :

$V_A = 26{,}8$ mm ; $U_A = 103$; $V_B = 52{,}5$; $U_B = -75$; $V_C = -41$; $U_C = -34$

Coordonnées de M_f sur les axes (U, V) :

$M_{fU} = -M_f \sin 23{,}84° = -2\,000 \sin 23{,}84° = -808$ Nm

$M_{fV} = M_f \cos 23{,}84° = 2\,000 \cos 23{,}84° = 1\,829$ Nm

Les axes principaux sont inclinés de $23{,}84°$ par rapport aux axes (y, z).

Contrainte en A :

$$\sigma_A = \frac{M_{fU}}{I_U} \cdot V_A - \frac{M_{fV}}{I_V} \cdot U_A = \frac{(-808 \times 10^3\ \text{Nmm}) \times 26{,}8 - (1\,829 \times 10^3\ \text{Nmm}) \times 103}{113 \times 10^4\ \text{mm}^4 \qquad 637 \times 10^4}$$

$$= -19{,}16 - 29{,}57 = -48{,}73\ \text{MPa}$$

$$\sigma_B = \frac{M_{fU}}{I_U} \cdot V_B - \frac{M_{fV}}{I_V} \cdot U_B = \frac{-808 \times 52{,}5}{1130} - \frac{1\,829 \times (-75)}{6\,370} = -16\ \text{MPa}$$

$$\sigma_C = \frac{M_{fU}}{I_U} \cdot V_C - \frac{M_{fV}}{I_V} \cdot U_C = \frac{-808 \times (-41)}{1130} - \frac{1829 \times (-34)}{6370} = 39\ \text{MPa}$$

Plan neutre NN :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{I_V}{I_U} \times \tan\theta\right) = \arctan\left(\frac{637}{113} \times \tan 23{,}84°\right) = 68{,}13°$$

Remarque : les contraintes à droite du plan neutre (oc étant la contrainte maximale) sont des contraintes de traction. Les contraintes à gauche du plan neutre (σ_A étant la contrainte maximale) sont des contraintes de compression.

EXERCICES À RÉSOUDRE

• I Une poutre IPE de 600 (h = 600 ; b = 220 ; I_z = 92 080 cm^4 ; I_y = 3 387 cm^4) encastrée en A supporte à son extrémité B une charge F légèrement inclinée de θ = 1,2° par rapport à la verticale y. Déterminer les contraintes maximales en D et E dans la section d'encastrement A et l'orientation du plan neutre. Comparer avec le cas θ = 0. F = 100 kN ; L = 1,5 m ; h et b en mm.

Réponse

σ_D = 59MPa; σ_E = −59 MPa ; $\alpha \simeq$ 30"; $\sigma_{maxi\ (\theta = 0)}$ = 48,9 MPa.

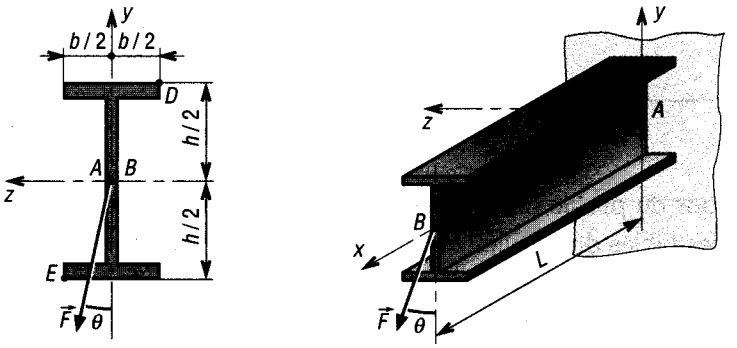


Fig. 13

❑ Une poutre en T supporte un moment fléchissant maximal M_f de 1 875 Nm incliné de 30" par rapport à l'axe z. Déterminer les contraintes en A et B et l'orientation du plan neutre.

Réponse

σ_A = 74,8 MPa ; σ_B = − 90,4 MPa ; α = 21,4°.

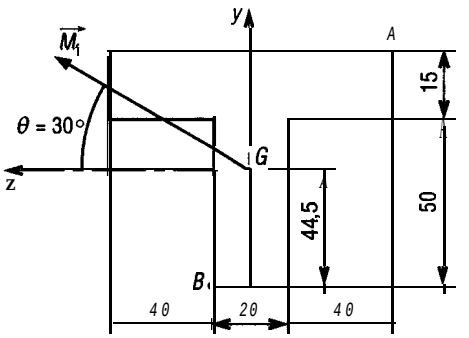


Fig. 14

3 Une cornière à ailes inégales 150 x 100 x 10 supporte un moment fléchissant M_f = 1 000 Nm porté par l'axe z. Déterminer les contraintes maximales ainsi que l'orientation du plan neutre.

Données :

U et V : axes principaux

tan β = 0,442 ; I_z = 552 cm^4 ;

I_y = 198 cm^4 ; I_V = 634 cm^4 ;

I_U = 112 cm^4

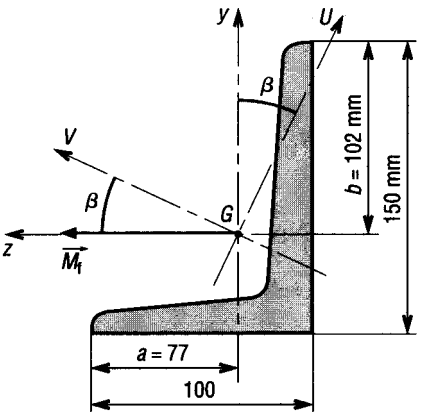


Fig. 15

29 SOLLICITATIONS COMPOSÉES

OBJECTIF

- Donner la valeur des efforts intérieurs et des contraintes pour les principales sollicitations composées : flexion + traction ; flexion + torsion ; traction + torsion ; traction + cisaillement ; torsion + cisaillement.

Les poutres sont parfois chargées de façon complexe et les sollicitations engendrées, appelées sollicitations composées, ne peuvent pas être étudiées et schématisées directement à partir des sollicitations simples : traction, cisaillement, torsion et flexion.
Cependant, dans un grand nombre de cas, les études peuvent être ramenées à la superposition de plusieurs sollicitations simples.

I - Flexion + traction

1. Efforts intérieurs : N, T et M_f

La poutre encastrée proposée supporte une charge concentrée $\vec{F}$ en B, inclinée de l'angle a.
La charge peut se décomposer en une charge transversale F_y et une charge axiale F_x, toutes deux agissant en B.
F_y engendre de la flexion avec efforts tranchants T et moments fléchissants M_f.
F_x amène des efforts normaux N comme ceux rencontrés en traction.

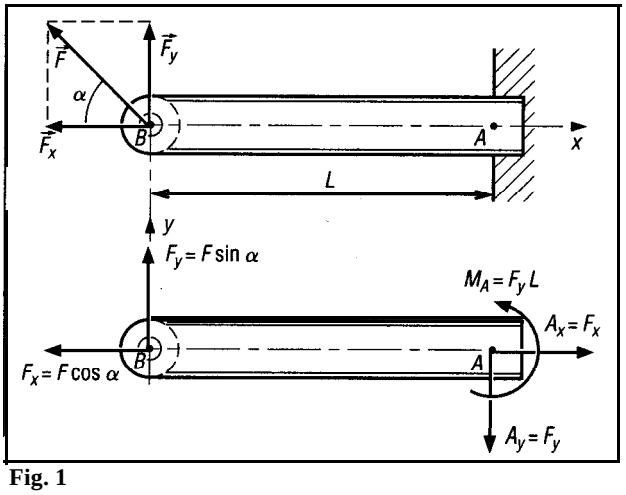


Fig. 1

Remarques : l'étude peut être abordée par le théorème de superposition.

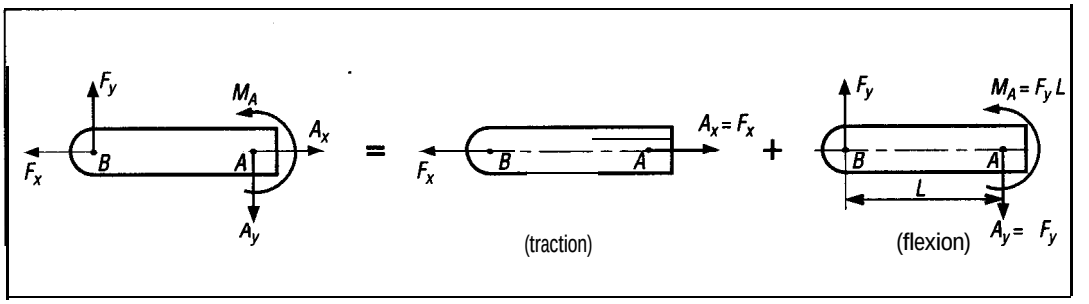


Fig. 2

Les efforts intérieurs N, T, M_f peuvent être mis sous la forme de diagrammes (même démarche qu'en flexion).

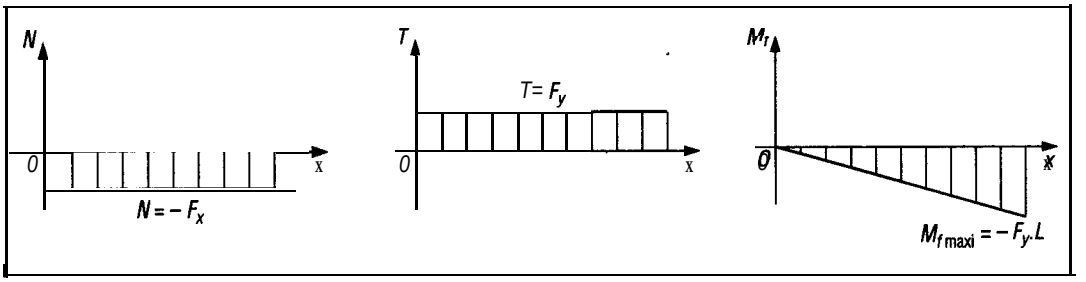


Fig. 3

2. Contraintes

Il y a superposition des contraintes résultant de la flexion avec celles engendrées par la traction. Les contraintes s'additionnent algébriquement ou vectoriellement.

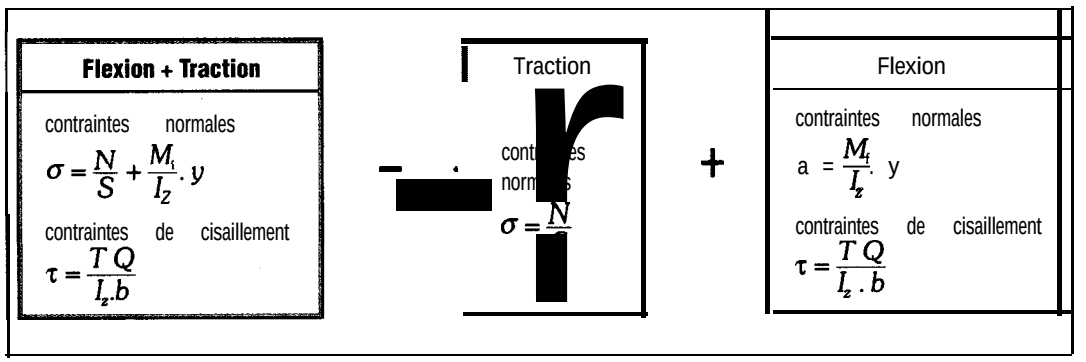


Fig. 4

Cas des contraintes normales

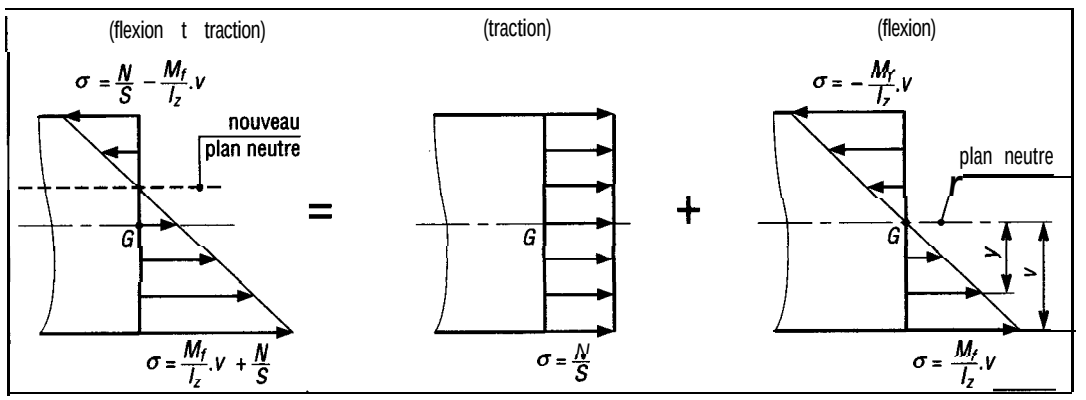


Fig. 5

Remarque : il y a déplacement du plan neutre et celui-ci ne passe plus par le barycentre G de la section comme dans le cas de la flexion. L'allure des contraintes dépend de leurs intensités respectives, trois formes variantes sont indiquées sur les figures 5 et 6.

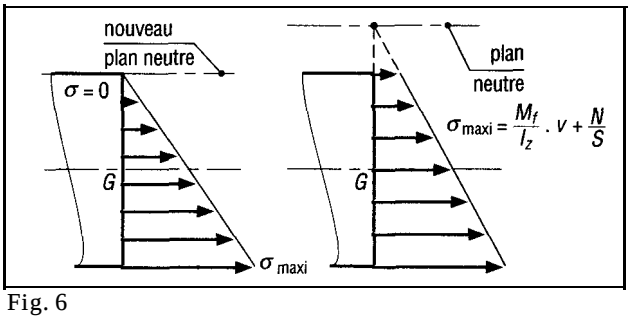


Fig. 6

3. Cas des poutres avec charge axiale **excentrée**

Exemple 1

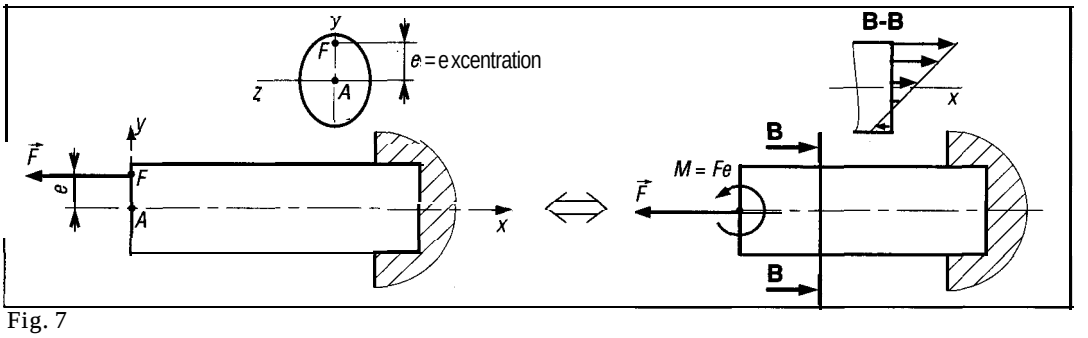


Fig. 7

Exemple 2

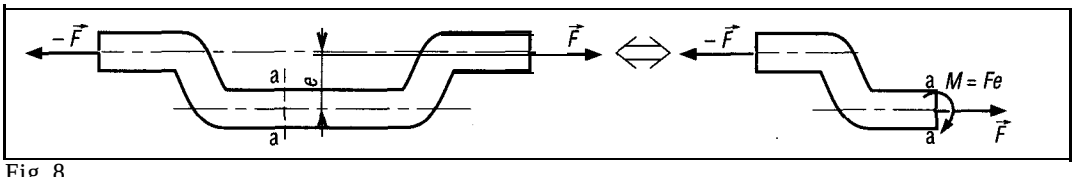


Fig. 8

Dans le cas de la traction ou de la compression, une charge axiale $\vec{F}$ excentrée par rapport à la ligne moyenne engendre un couple de flexion supplémentaire $(F \times e)$.
L'étude se ramène à celle des paragraphes précédents avec $M_f = F \cdot e$.
Les contraintes tangentielles τ sont nulles et les contraintes normales deviennent :

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M_f}{I_z} \times y = \frac{F}{S} + \frac{F.e.y}{I_z} \leq \sigma_{admissible}$$

II - Flexion + torsion

Ce cas est fréquent avec les arbres de transmission.

Exemple : arbre cylindrique ABC, en forme de L ou coudé, encastré en A et supportant une charge concentrée $\vec{F}$ à son extrémité C.

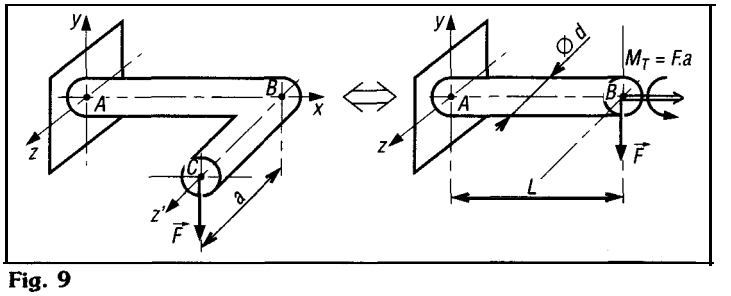


Fig. 9

Le tronçon AB de la poutre est à la fois sollicité en torsion (M_T = Ea) et en flexion (M_f engendrée par $\vec{F}$ en B).
L'encastrement A est la zone la plus chargée : couple de torsion M_T = Fa (axe x), moment fléchissant $M_f = F \cdot L$ (axe z) et un effort tranchant T = F (suivant y) qui sera en général négligé dans la plupart des études.

1. Étude des contraintes

Flexion :
contrainte normale maximale

$$\sigma = \frac{M_f}{I_z} \cdot v$$

Torsion :
contrainte de cisaillement maximale

$$\tau = \frac{M_T}{I_0} \cdot v$$

Flexion + Torsion

$$\tau_{admissible} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

d'après théorie de la contrainte du cisaillement maximal **appropriée** aux métaux ductiles

Remarque : pour un arbre circulaire de diamètre d (V = $d/2$), la contrainte peut encore s'écrire ($I_0 = 2I_z = \pi d^4/32$) :

$$\tau_{adm} = \sqrt{\left(\frac{M_f}{2I_z} V\right)^2 + \left(\frac{M_T}{I_0} V\right)^2} = \left(\frac{16}{\pi d^3}\right) \sqrt{M_T^2 + M_f^2}$$

et

$$d = \left(\frac{16}{\pi \cdot \tau_{adm}} \sqrt{M_T^2 + M_f^2}\right)^{1/3}$$

2. Moment idéal de flexion (M,)

Ce moment permet de faire les calculs de résistance comme si la poutre était uniquement sollicitée en flexion.

Formule de Mohr-Cacquot

$$M_{fi} = \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) M_f + \frac{1}{2\lambda} \sqrt{M_T^2 + M_f^2} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{R_{pg}}{R_{pe}}$$

R_{pg} : contrainte admissible au cisaillement du matériau
R_{pe} : contrainte admissible en traction ou à l'extension du matériau

La condition de résistance s'exprime par :

$$\sigma_i = \left(\frac{M_{fi}}{I_z} V\right) \leq R_{pe}$$

Approximations usuelles indicatives
Pour les aciers : $\lambda \simeq 0{,}5$; pour certaines fontes : A $\simeq$ 1 ;
Pour les matériaux moulés : $\lambda \simeq 0{,}8$.

III - Traction + torsion et traction plus cisaillement

Si σ est la contrainte normale engendrée par la traction et τ la contrainte de cisaillement résultant de la torsion ou du cisaillement, la condition de résistance peut s'écrire :

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\,\tau^2} \leqslant R_{pe}$$

IV - Torsion + cisaillement

La torsion et le cisaillement amènent des contraintes tangentielles τ de même nature, et faciles à additionner. La condition de résistance peut s'écrire :

$$\tau_{maxi} = \tau_{maxi}\ (\text{cisaillement}) + \tau_{maxi}\ (\text{torsion}) = \frac{T}{S} + \frac{M_T}{I_0}\,V \leqslant R_{pg}$$

EXERCICES À RÉSOUDRE

1 La vis proposée est encastrée en A dans une poutre en bois et supporte une charge concentrée $\vec{F}$, inclinée de 45°, à son extrémité B. Si la contrainte admissible en traction du matériau de la vis est de 200 MPa, déterminer la charge $\vec{F}$ tolérable.

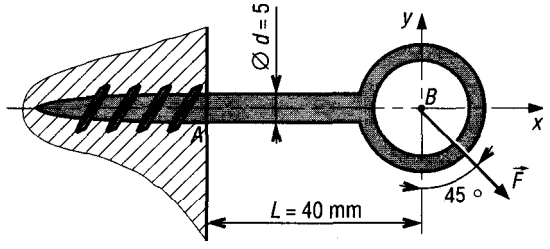


Fig. 10

2 Reprendre l'exercice 1 avec $F = 141{,}4$ N et $d = 6$ mm. En déduire la contrainte maximale exercée dans la vis.

Réponse

$\sigma_{maxi} = 192$ MPa.

3 Un tube ($D = 800$, $d = 780$), dont le poids est de 200 daN par mètre, est transporté par deux élingues AC et BC inclinées de 30°. Déterminer la contrainte normale maximale dans le tube, si on néglige les effets de l'excentration des charges en A et B.

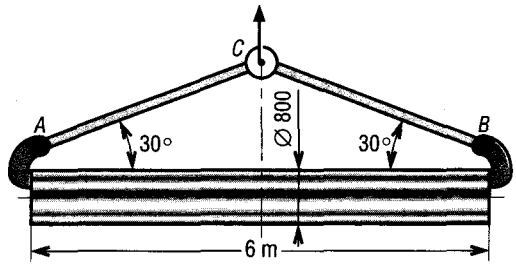


Fig. 11

4 Reprendre l'exercice 3 en tenant compte de l'excentration. e = 400.

Réponse

σ_{maxi} = 1.25 MPa.

5 Une petite presse d'assemblage se compose d'un socle fixe (3), d'une tête pneumatique (1) réglable en haùteur sur une colonne cylindrique (2) de diamètre 75 mm.
Si l'effort $\vec{F}$ exercé est de 20 kN, déterminer la contrainte normale maximale dans la colonne.

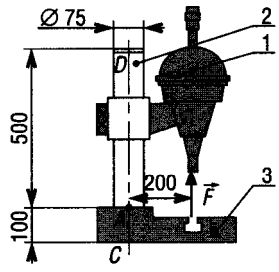


Fig.12

6 La poutre *ABC*, de section rectangulaire 15 x 80 mm, supporte les charges concentrées suivantes (en N) :

$\vec{F}$ F_x = 3 500
F_y = 7 500
$\vec{B}$ B_x = 8 690
B_y = − 10 360
$\vec{C}$ C_x = − 12 190
C_y = 2 860

Déterminer la contrainte maximale dans la poutre si on néglige les effets des efforts tranchants.

Réponse

σ_{maxi} = 85 MPa.

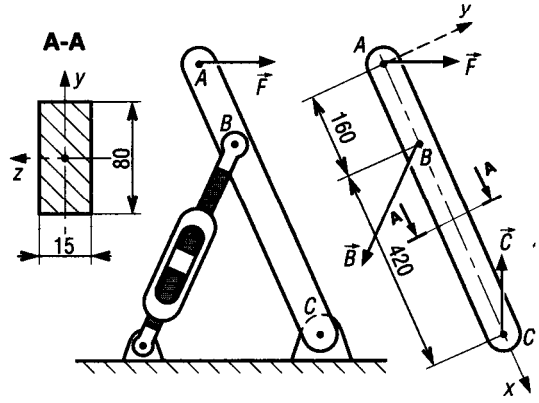
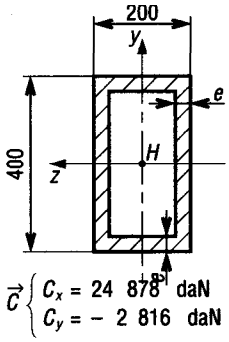


Fig.13

❑ L'étude du bras (2) d'un transporteur de laitier (transporteur spécial) se ramène schématiquement au dessin indiqué. Les forces $\vec{B}$, , $\vec{C}_{1/2}$ et $\vec{D}_{3/2}$ schématisent les actions exercées par les solides (5), (2) et (3) dans le cas le plus défavorable.
a) Tracer les diagrammes des efforts normaux *N*, tranchants *T* et des moments fléchissants M_f. Quelle est la particularité du M_f en *I* ?
b) On impose une contrainte admissible en flexion de 10 daN.mm^{-2}. Déterminer l'épaisseur e minimum à donner à la section *H*.



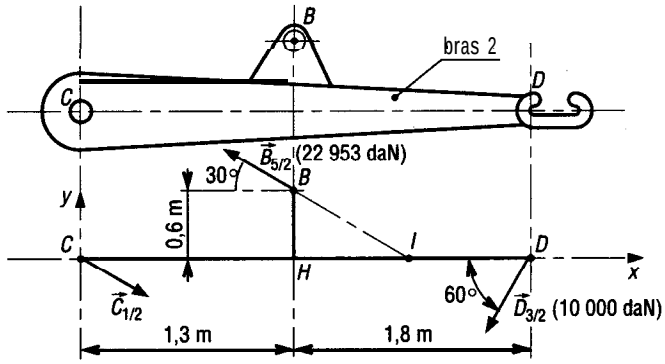


Fig. 14

❑ L'étude de la flèche (2) d'un chargeur sur chenilles pour tout terrain se ramène schématiquement au dessin indiqué. Les forces $\overrightarrow{A_{1/2}}$, $\overrightarrow{B_{10/2}}$, $\overrightarrow{M_{5/2}}$ et $\overrightarrow{D_{3/2}}$ schématisent les actions exercées par les solides (1), (3), (5) et (10).

a) Tracer les diagrammes des efforts normaux, tranchants et des moments fléchissants.

b) On impose une contrainte admissible en flexion de 8 daN.mm^{-2}. Déterminer l'épaisseur b minimum à donner à la section K.

Réponse

N_{maxi} = **9 226** daN ; T_{maxi} = 8 048 daN ; $M_{f\,maxi}$ = 79 150 Nm ; b = 39,3 mm.

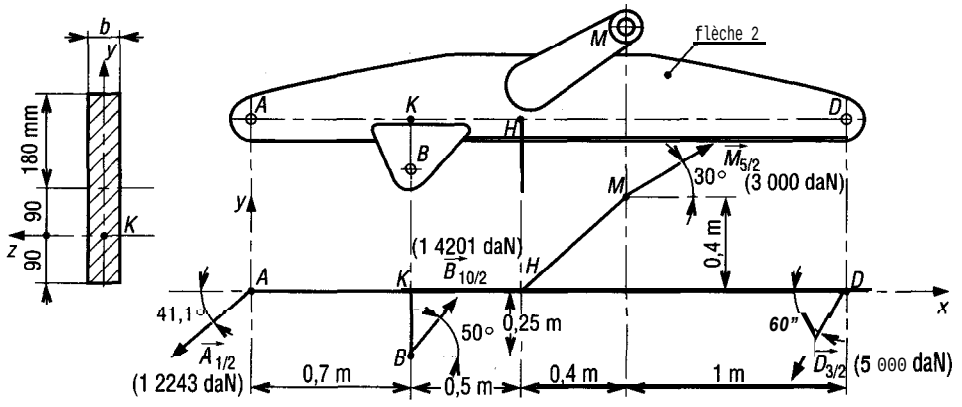


Fig. 15

9 Une presse de carrossier se compose d'une fourche forgée et d'une vis de manoeuvre. L'effort de serrage est F = 2 500 daN suivant l'axe de la vis. Déterminer les contraintes dans la section AA, en K et J.

Réponse

$\sigma_K \approx \sigma_J$ = 400 MPa.

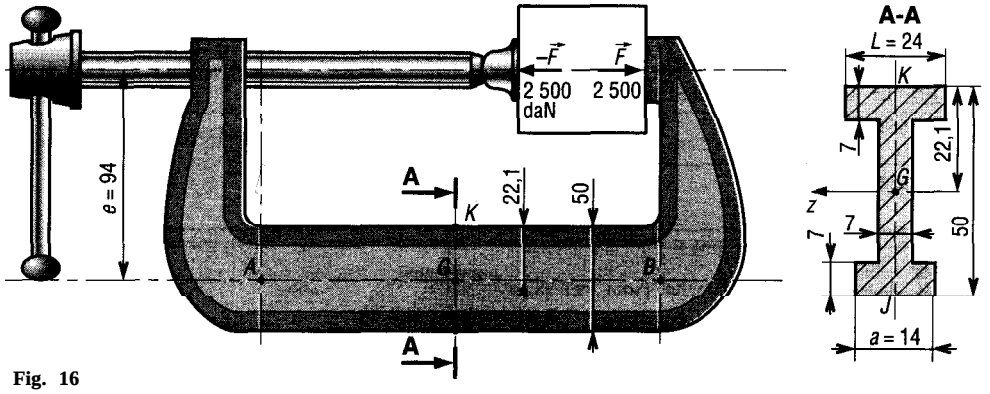


Fig. 16

❑ Reprendre l'exercice 9 avec a = 7. Comparer les résultats des deux exercices.

❑ Une biellette coudée supporte deux forces $(\vec{F})$ égales et opposées, d'intensité 15 kN. Si la contrainte normale admissible est de 100 MPa, déterminer l'épaisseur a du profil.

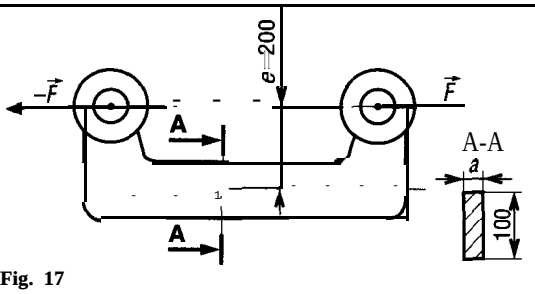


Fig. 17

❑ Reprendre l'exercice 11 avec un profil circulaire de diamètre d = 26 mm. Déterminer les charges $\vec{F}$ admissibles lorsque l'excentration e est égale à 0, à 20, à 50 et à 100 mm.

Réponse

53,1 kN ; 7,45 kN ; 3,24 kN et 1,67 kN.

❑ Un arbre de diamètre d = 40 mm est fraisé sur une moitié comme l'indique la figure.
Si l'arbre supporte un effort F de 25 kN suivant son axe, déterminer les contraintes en A et B.

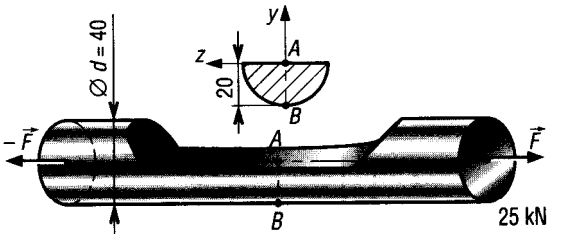


Fig. 18

❑ Un profilé en H supporte un effort de compression de 500 kN concentré au point A excentré de e = 67,5 mm. Le poids du profilé est négligé ; S = 97,3 cm² ;
I_y = 4 763 cm4 ; I_z = 13 673 cm⁴.
Déterminer les contraintes maximales dans le profilé.

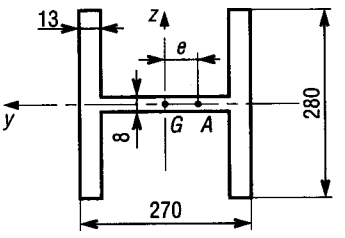


Fig. 19

❑ Reprendre l'exercice 14 avec le profilé UAP de 300 proposé et e = 24,82 mm.
Si la contrainte maximale en compression est de 100 MPa, déterminer la charge admissible en compression.

Réponse

F = 332 kN.

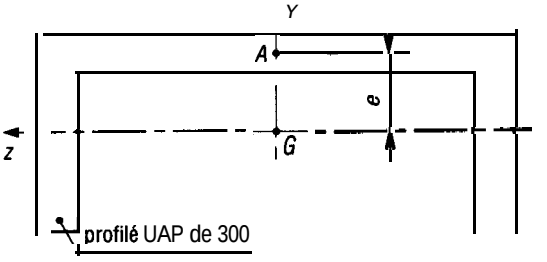


Fig. 20

❑ ' Le béton supporte peu ou pas les contraintes de traction. Afin d'éviter ce type de contraintes, on utilise des barres ou tirants en acier qui compriment le béton à l'état initial (précontrainte), avant montage ou chargement.
Pour la poutre proposée, calculer la charge de traction (F) nécessaire dans la barre pour qu'il n'y ait aucune contrainte de traction dans le béton pour la position indiquée. On négligera les dimensions de la tige, poids du béton : 1 900 daN.m⁻³.

Réponse

F = 20 kN.

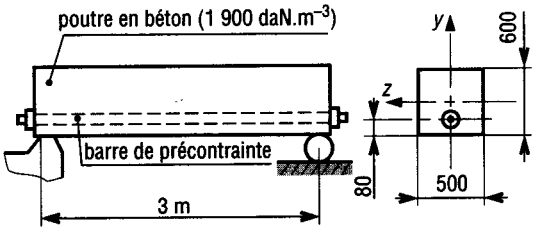


Fig. 21

❑ Une poutre OI de section circulaire pleine, de diamètre 80 mm, supporte à la fois de la flexion et de la torsion. La poutre est encastrée en 0 et un bras IJ portant une charge verticale $\vec{F}$ (direction y) est fixé à l'extrémité I. F = 300 daN.

a) Déterminer les contraintes de flexion et de torsion en A et B.

b) Calculer la contrainte maximale de cisaillement dans la poutre.

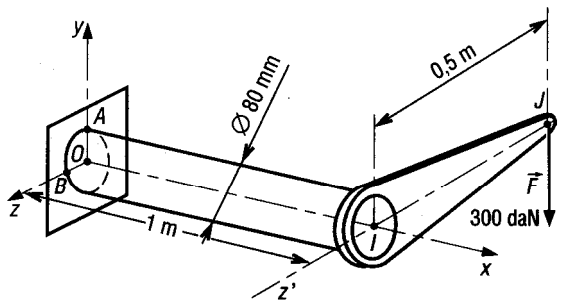


Fig. 22

Réponse

σ_A = 59.7 MPa ; $\tau_A = \tau_B$ = 14,9 MPa ; σ_B = 0 ; τ_{maxi} = 33,4 MPa.

18 Reprendre l'exercice 17. Si on impose une contrainte de cisaillement maximale de 50 MPa, déterminer la charge F admissible.

19 Reprendre l'exercice 17. Si on impose une contrainte de cisaillement maximale de 50 MPa, déterminer le diamètre minimal de la poutre.

Réponse

d = 69,9 mm.

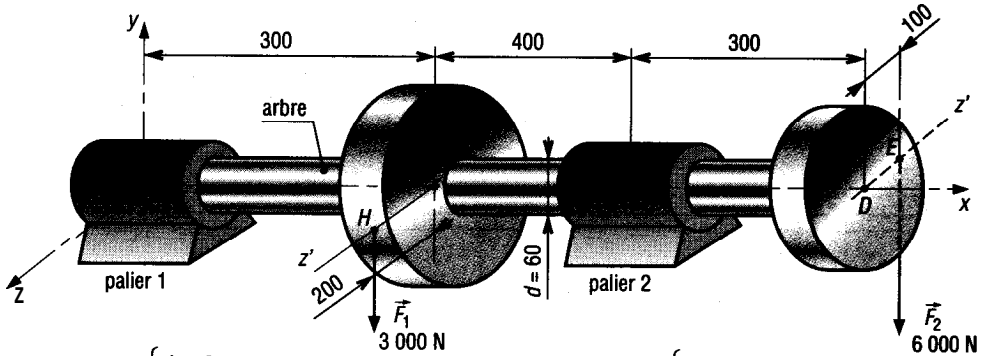
❑ Un arbre de transmission $ABCD$, de diamètre d = 60 mm, est guidé en rotation en A et C par deux paliers à roulements et porte en B et D deux roues dentées supportant les charges indiquées ($\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ en H et E) de direction verticale y. $\vec{A}$ et $\vec{C}$ schématisent les actions des paliers sur l'arbre.

a) Déterminer les diagrammes des T, M_T et M_f entre A et D.

b) Calculer la contrainte maximale de cisaillement dans l'arbre.

Réponse

T_{maxi} = 6 kN ; M_T = 600 Nm ; $M_{f\,maxi}$ = 1 800 Nm ; τ_{maxi} = 44,8 MPa.



$$\vec{A}\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = -857\ \text{N} \\ A_z = 0 \end{cases} \qquad \vec{C}\begin{cases} C_x = 0 \\ C_y = 9\,857\ \text{N} \\ C_z = 0 \end{cases}$$

Fig.23

21 Reprendre l'exercice 20. Si on impose une contrainte de cisaillement maximale de 60 MPa, déterminer le diamètre minimal de l'arbre.

❑ Reprendre l'exercice 20 pour la configuration proposée, avec poulies et courroies, et un diamètre d'arbre de 50 mm.

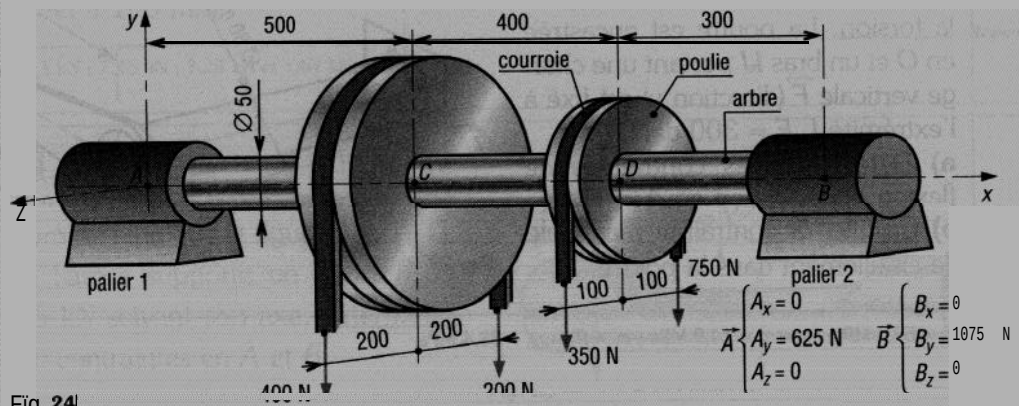


Fig. 24

23 Un plat d'épaisseur 15 mm est boulonné sur un poteau par quatre boulons de diamètre 20 mm et supporte une charge F de 50 kN inclinée de 36,9° par rapport à la verticale y. Déterminer les contraintes de cisaillement dans les boulons A et B résultant à la fois de la torsion autour de 0 (OA = OB = OC) et du cisaillement pur dans la direction F.

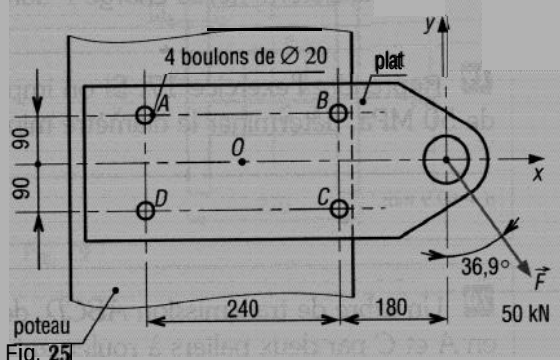


Fig. 25

Réponse

$\tau_A = 64.8$ MPa ; $\tau_B = 103.3$ MPa

❑ Reprendre l'exercice 23 avec un montage utilisant trois rivets de 25 mm de diamètre et une charge F (30 kN) horizontale. Déterminer les contraintes de cisaillement dans les trois rivets en A, B et C.

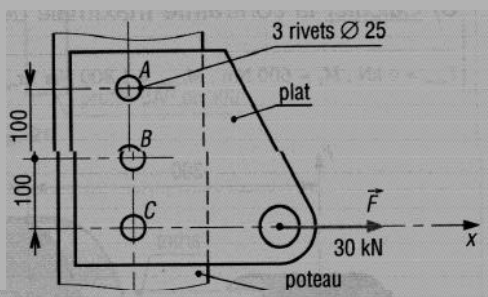


Fig. 26

25 Un plat, boulonné sur un profilé par 5 boulons A, B, C, D et E de diamètre 12 mm, supporte la charge verticale F de 20 kN. Déterminer les contraintes de cisaillement dans chaque boulon résultant à la fois de la torsion et du cisaillement.

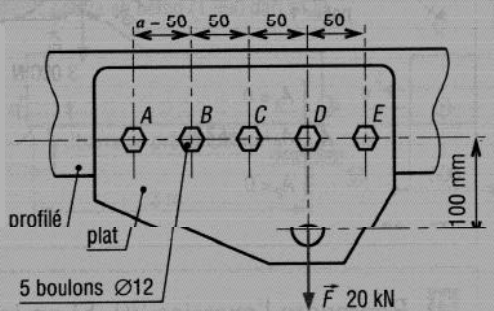


Fig. 27

Réponse

$\tau_A = 0$; $\tau_B = 17,7$; $\tau_C = 35,4$;
$\tau_D = 53$; $\tau_E = 70,7$ MPa

30 FLAMBAGE

OBJECTIFS

- Définir le flambage, la charge d'Euler et la contrainte critique d'Euler.
- Donner des notions sur le flambage plastique.
- Développer les principales procédures de calcul : Euler-Rankine, Duteil, Euler (formule de la parabole), etc.
- Aborder le cas des charges excentrées.

Dans le cas du flambage, les formules établies tiennent compte des déformations. Celles-ci ne peuvent plus être supposées infiniment petites et négligées comme dans les chapitres précédents. De même, les forces extérieures ne sont plus proportionnelles aux déformations et, dans certains cas, de grandes déformations peuvent être causées par des accroissements de charges infimes. Tous ces phénomènes sont connus sous le nom d'instabilité élastique.

Les procédures de calcul des poutres flambées varient d'un pays à l'autre, d'une profession à l'autre, en obéissant souvent à des normes précises. Nous nous limiterons à une étude générale ayant un caractère universel.

1 - Charge critique d'Euler F_{cr}

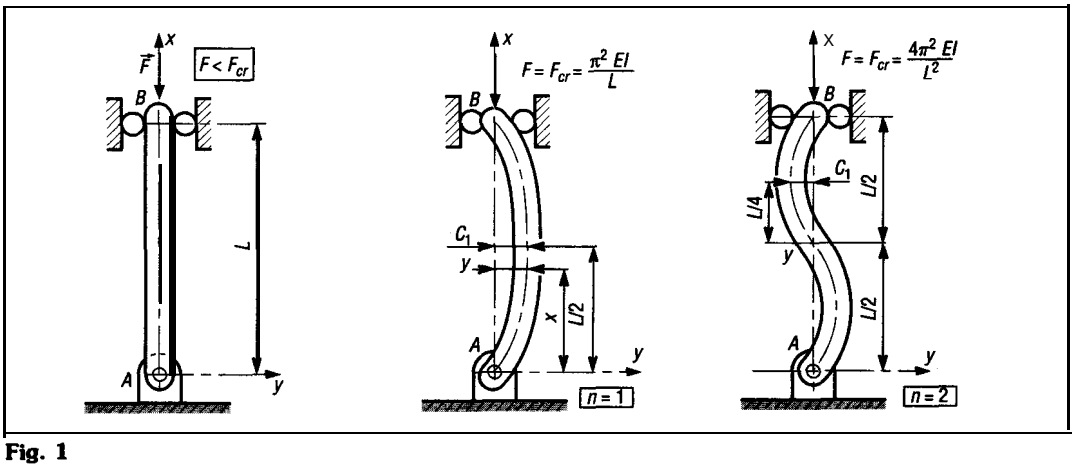


Fig. 1

Prenons le cas d'une poutre parfaitement droite avant déformation, articulée à ses deux extrémités A et B, et chargée $(\vec{F})$ rigoureusement suivant son axe ou sa ligne moyenne (x). Utilisons la formule $M_f = -EIy''$ du chapitre "flexion - déformation" :

$$EIy'' = -M_f = -F \cdot y \quad (1)$$

ou $EIy'' + F \cdot y = 0$

Équation différentielle qui donne après intégration :

$y = C_1 \sin \frac{n\pi x}{L}$ (n = 1, 2, 3, . ..)

C_1 est la flèche dans la section médiane (fig. **1**). En remplaçant y par sa valeur dans l'équation (1), on obtient :

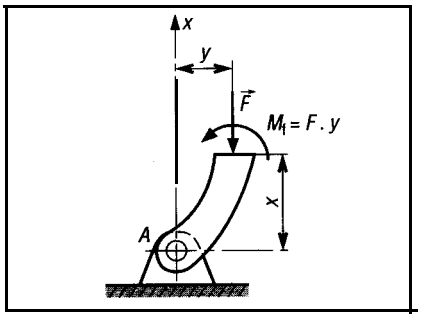


Fig. 2

$$F = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad \text{et} \quad \boxed{F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}} \quad \text{lorsque } n = 1.$$

F_{cr} est appelée charge critique d'Euler. Plusieurs cas sont possibles pour la poutre :

$F < F_{cr}$: compression usuelle, la poutre reste droite, elle est dite en équilibre stable (il y a stabilité élastique).

$F = F_{cr}$: la poutre peut rester droite ou fléchir (flamber) avec une flèche égale à C_1, elle est en équilibre neutre. À noter que $C_1 = y_{maxi}$ est en général petit.

$F > F_{cr}$: il y a instabilité en position droite (équilibre instable) avec une forte tendance au flambage. C_1 augmentera très rapidement avec un léger accroissement de F.

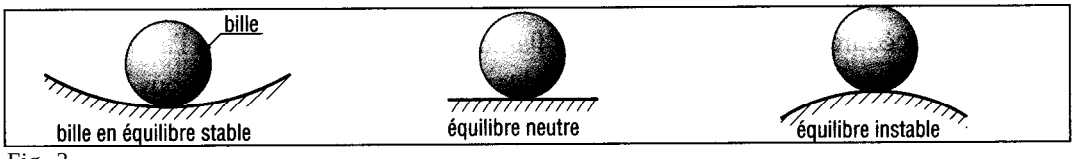


Fig. 3

Remarques

$\frac{F}{F_{cr}}$	1,0154	1,0637	1,1517	1,2939	1,5184
$\frac{}{L}$	0,1097	0,2111	0,2966	0,3597	0,3958
a	20"	40"	60"	80"	100"

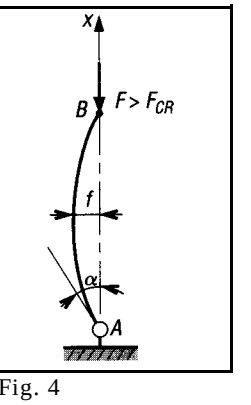


Fig. 4

Le flambage se produit suivant un axe perpendiculaire à l'axe du moment quadratique le plus faible.

Exemple 1

Pour les deux sections $I_y < I_z$, le flambage se produit dans le plan (x, z).

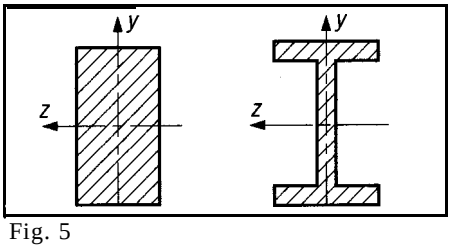


Fig. 5

Exemple 2

Pour les cinq sections, toutes de même aire (S), celle du triangle équilatéral (c) est celle qui résiste le mieux au flambage (21 % plus résistante que la section circulaire).

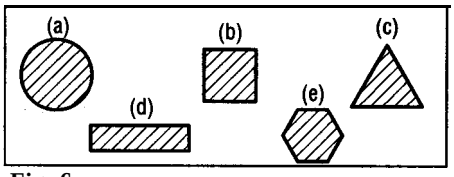


Fig. 6

II • Principaux cas

Le flambage des poutres dépend en grande partie de la nature des liaisons ou des appuis aux extrémités A et B.

1. Poutre encastrée en A et libre en B

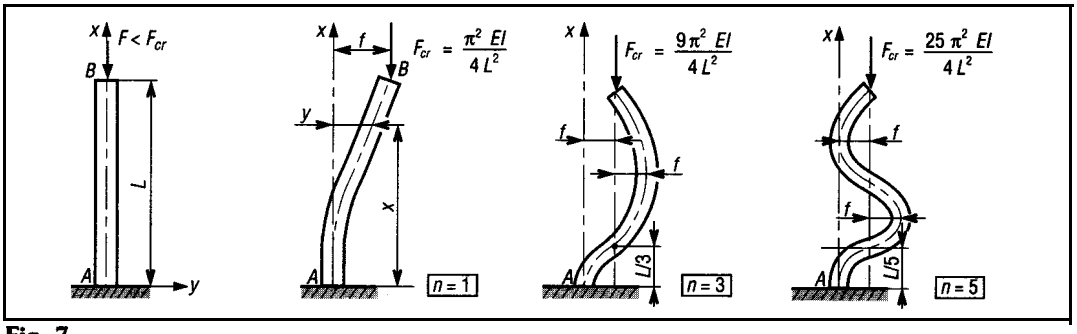
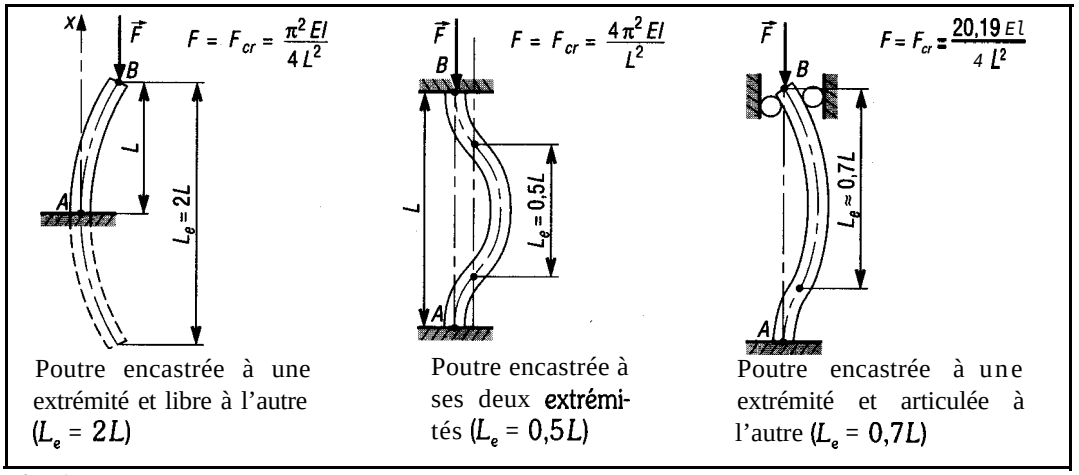


Fig. 7

$F_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{4L^2}$	$y = f\left(1 - \cos\frac{n\pi x}{2L}\right)$	avec n = 1, 3, 5 . . .

2. Autres cas • longueur effective L_e



Poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre ($L_e = 2L$)

Poutre encastrée à ses deux extrémités ($L_e = 0{,}5L$)

Poutre encastrée à une extrémité et articulée à l'autre ($L_e = 0{,}7L$)

Fig. 8

Remarque : les charges critiques peuvent être obtenues en remplaçant L par L_e dans la formule générale de la charge critique d'Euler : $F_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{L_e^2}$

III - Contrainte critique σ_{cr}

La contrainte critique σ_{cr} correspond à la charge critique F_{cr}. La flèche C_1 = y,, étant faible, σ_{cr} peut être considérée comme une contrainte de compression.
Posons $I = Sr^2$ avec S, aire de la section droite et *r* rayon de gyration :

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{S} = \frac{\pi^2 E I}{L^2 S} = \frac{\pi^2 E S r^2}{L^2 S} = \frac{\pi^2 E r^2}{L^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{L}{r} = \text{élancement de la poutre}$$

$\lambda = L/r$ caractérise la flexibilité de la poutre et permet de classer les poutres ou colonnes (courtes ou longues).

Exemple : déterminons la charge et la contrainte critique d'un tube en acier (E = 200 GPa) ; R_e = 240 MPa ; L = 3 m) supposée articulée à ses deux extrémités.

$$I_y = I_z = \frac{\pi}{64}\left(80^4 - 70^4\right) = 832\,031 \text{ mm}^4$$

$$S = \frac{\pi}{4}\left(80^4 - 70^4\right) = 1\,178 \text{ mm}^2$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{S}} = \sqrt{\frac{832\,031}{1\,178}} = 26{,}57 \text{ mm}$$

$$F_a = \frac{\pi^2 \times 200\,000 \times 832\,031}{3\,000^2} = 182485\text{N}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \times 200\,000 \times 26{,}57^2}{3\,000^2} = 154{,}9 \text{ MPa}$$

$$\lambda = \frac{L}{r} = \frac{3\,000}{26{,}5} \simeq 113$$

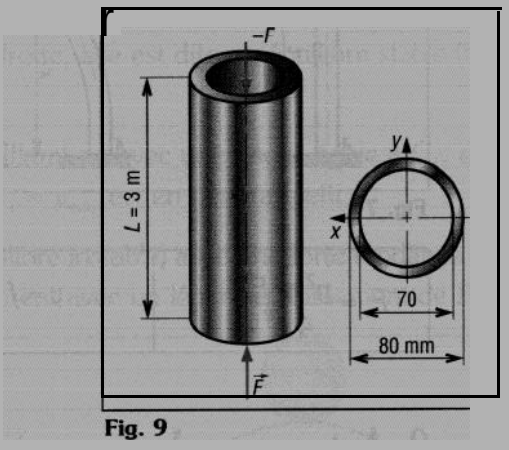
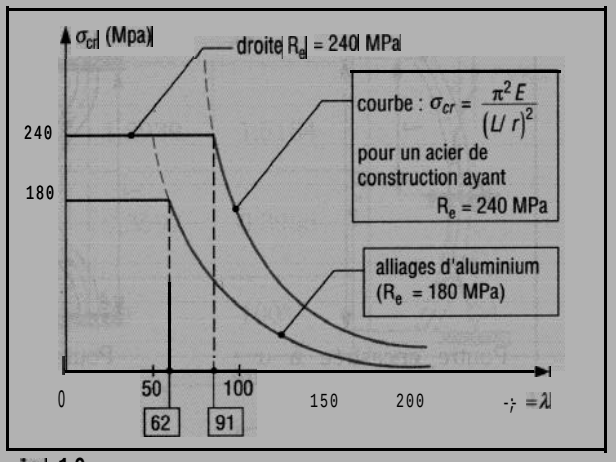


Fig. 9

Remarque

Le graphe proposé figure 10 donne la représentation de σ_{cr} en fonction de λ pour un acier non allié usuel (E = 200 GPa) et pour un alliage d'aluminium courant (E = 70 GPa). L'allure des courbes est hyperbolique et celles-ci ne sont valables que si $\sigma_{cr} < R_e$, R_e étant la limite élastique des matériaux.
En conséquence, pour l'acier indiqué, la formule σ_{cr} est utilisable lorsque $\lambda > 91$ ($\lambda > 62$ pour l'aluminium).



ig. 10

Si $\lambda < 91$, les contraintes obtenues à l'aide de la formule sont supérieures à la limite élastique R_e. Pour l'exemple précédent, avec λ = 113, l'utilisation de la formule était donc justifiée.

Exemple 2

Déterminons la charge critique d'un profilé IPE

$E = 200$ GPa ; $R_e = 240$ MPa ; $I_y = 15\ 442\ 186$ mm^4
$I_z = 45\ 785\ 456$ mm^4 ; $S = 5\ 890$ mm^2

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \times 200\,000 \times 15\ 442\,186}{4\,000^2} = 1\,905\,\text{kN}$$

$$r = \sqrt{\frac{I_y}{S}} = \sqrt{\frac{15\ 442\,186}{5\,890}} = 51{,}2\,\text{mm}$$

$$\lambda = \frac{4\,000}{51{,}2} = 78{,}1 < 91$$

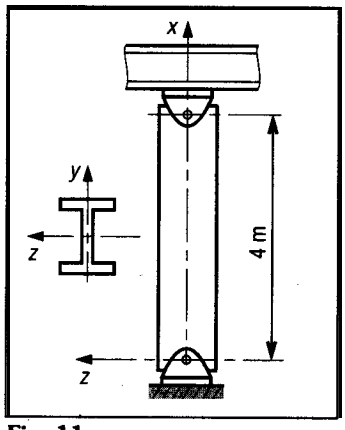


Fig. 11

La poutre est une poutre courte pour laquelle on ne peut pas appliquer Euler. Le calcul est un calcul de résistance en compression, charge limite :

$F_{limite} = R_e S = 240 \times 5\,890 = 1\,414$ kN $< F_{cr}$

IV • Flambage plastique des colonnes moyennes

Lorsque les poutres longues ou élancées ($A > \lambda_{cr}$) deviennent instables ou flambent, les contraintes correspondantes dans le matériau restent dans le domaine élastique ($a < R_e$). Si les poutres sont courtes, le problème du flambage ne se pose pas et les sollicitations sont uniquement en compression.

En ce qui concerne les colonnes moyennes ($A < \lambda_{cr}$), l'instabilité ou le flambage se produit lorsque les contraintes dans le matériau deviennent supérieures à la limite élastique R_e. De plus, quand $\sigma > R_e$, le module d'élasticité longitudinal E varie et diminue progressivement. Pour ces cas, Euler n'est plus applicable et il est nécessaire d'adopter un autre modèle de calcul. Certaines procédures de calcul normalisées prennent en compte ce phénomène.

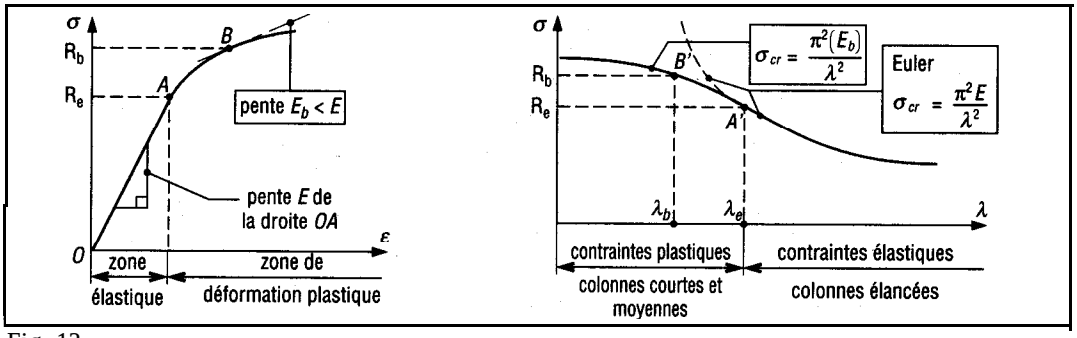


Fig. 12

Une approche possible est fournie par l'utilisation d'un module d'élasticité intermédiaire E_b défini à partir de la tangente en un point significatif B de la courbe (σ, ε) du matériau. E_b peut être variable ou choisi comme valeur moyenne entre E et E_{mini}. La contrainte critique devient :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_b}{\lambda^2}$$

V-Procéduresdecalcul

Les procédures varient d'un pays à l'autre, d'une profession à l'autre, d'une norme à l'autre. Celles proposées dans ce paragraphe sont destinées aux résolutions d'exercices. Incomplètes, elles ne fournissent qu'un aspect du processus de détermination qui fait également appel à des normes et des législations qui sortent du cadre de cet ouvrage.

1. Cas des poutres en acier

a) Méthode simplifiée d'Euler-Rankine

Cette procédure est souvent utilisée en France pour des études simplifiées.

Principe : la charge critique d'Euler (F_{cr}) ne doit jamais être atteinte.

Données et paramètres

F_{adm} : charge admissible par la poutre

$\lambda_{cr} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{R_e}}$ = élancement critique

$\lambda = \frac{L_e}{r}$ $\begin{cases} L_e = \text{longueur effective (voir paragraphe III)} \\ r = \sqrt{\frac{I_z}{S}} = \text{rayon de gyration de la section} \end{cases}$

R_{pc} : résistance pratique en compression du matériau

k : coefficient de sécurité adopté pour la construction

s : coefficient de sécurité habituel

Formule fondamentale : $k = \frac{F_{cr}}{F_{adm}} = \frac{2R_e}{R_{pc}} = 2s$

Poutres courtes ($\lambda < 20$)	Poutres moyennes ($20 \leqslant a \leqslant 100$) *	Poutres longues ($\lambda \geqslant 100$) *
calcul de compression	calcul à partir de Rankine	calcul à partir d'Euler
$F_{adm} = R_{pc} \cdot S$	$F_{adm} = \frac{R_{pc} \cdot S}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}$	$F_{adm} = \frac{R_{pc} \cdot S}{2\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}$

* La méthode s'utilise aussi avec des poutres ou poteaux en fonte avec 80 à la place de 100 comme limite.

b) Méthode de Duteil

Cette méthode, normalisée en France pour certaines études, est valable dans tous les cas d'élancement (λ) de poutres en acier. La méthode repose sur des résultats expérimentaux et consiste à chercher la valeur limite d'affaissement (σ_s) de la contrainte de compression (σ_c) dans une poutre.

Principe : la méthode prend en compte les contraintes de compression dues au moment fléchissant engendrée par la flèche f résultant du flambage. Étapes de déterminatiin :

Déterminer : L_e ; I_z ; $r = \sqrt{\frac{I_z}{S}}$; $\lambda = \frac{L_e}{r}$

↓

Contrainte critique : $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

↓

$\sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_{cr} + 1{,}3\ \mathrm{R},)$

Contrainte d'affaiblissement admissible :
$\sigma_S = 0 \quad 0 \quad - \quad d \quad -$

↓

Vérifier : $\sigma_c = \frac{F}{S} \leqslant \frac{\sigma_S}{\alpha}$

α : coefficient de sécurité

- construction mécanique: $2 \leqslant \alpha \leqslant 2{,}5$
- construction métallique : $1{,}3 \leqslant \alpha \leqslant 1{,}5$

c) Méthode 3 : Euler - formule de la parabole

Cette méthode est normalisée dans de nombreux autres pays (États-Unis...) et sert de base à un certain nombre de normes internationales. La démarche se rapproche de la méthode d'Euler-Rankine du paragraphe a, avec les remarques du paragraphe IV.

$\lambda_{cr} = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{R_e}}$ (λ_{cr} est différent de celui du paragraphe a).

σ_{adm} est la contrainte admissible à ne pas dépasser.

La méthode prend en compte les contraintes résiduelles de compression dans les profilés entraînées par le laminage.

Pour les poutres courtes ou moyennes (tronçon AB du graphe), la contrainte est exprimée à partir de l'équation d'une parabole. Pour les poutres longues (tronçon BC du graphe), on retrouve la formule classique d'Euler.

a, et α_2 sont des coefficients de sécurité.

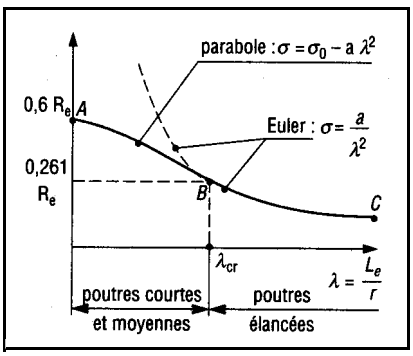


Fig. 13

Poutres moyennes et courtes ($0 \leqslant a \leqslant \lambda_{cr}$)	Poutres élancées ($\lambda_{cr} \leqslant \lambda < 200$)
$\alpha_1 = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^3$ $\sigma_{adm} = \frac{R_e}{\alpha_1}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2\right]$	$\alpha_2 = \frac{23}{12} \simeq 1{,}92$ $\sigma_{adm} = \frac{R_e}{2\,\alpha_2}\left(\frac{\lambda_{cr}}{\lambda}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{\alpha_2 . \lambda^2}$
Si $\lambda = \lambda_{cr}$ alors $\alpha_1 = \alpha_2 = 1{,}92$; α_1 varie entre 1,66 et 1,92.	

2. Poutres en alliage d'aluminium

Les fabricants proposent des spécifications dont la forme générale est indiquée par le graphe de la figure 14.

Les coefficients de sécurité sont intégrés aux formules.

Deux exemples d'alliages d'usage courant sont proposés de façon indicative.

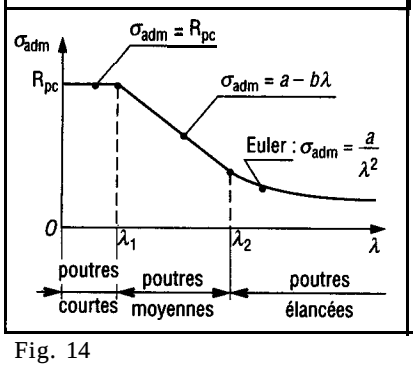
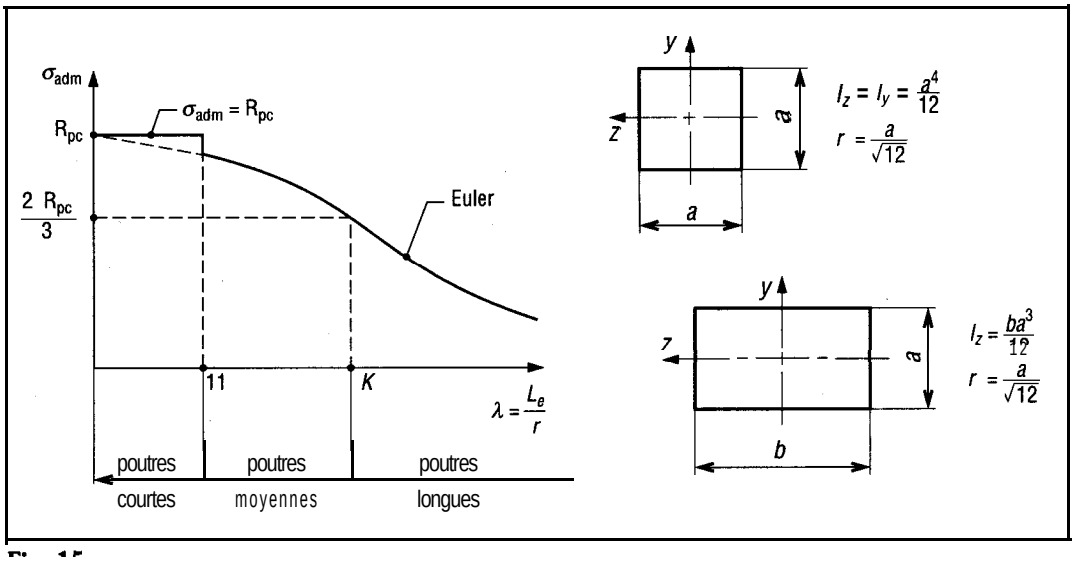


Fig. 14

Alliage 6061-T6 : $R_e \simeq 240$ MPa	Alliage 2014-T6 : $R_e = 390$ MPa
$0 \leqslant \lambda \leqslant 9{,}5$: $\sigma_{adm} = 131$ MPa $= R_{pc}$	$0 \leqslant \lambda \leqslant 12$: $\sigma_{adm} = R_{pc} = 193$ MPa
$9{,}5 < \lambda \leqslant 66$: $\sigma_{adm} = 139 - 0{,}868\ \lambda$ (MPa)	$12 < \lambda \leqslant 55$: $\sigma_{adm} = 212 - 1{,}585\ \lambda$ (MPa)
$a \geqslant 66$: $\sigma_{adm} = \dfrac{350}{\lambda^2}$ (GPa)	$\lambda \geqslant 55$: $\sigma_{adm} = \dfrac{372}{\lambda^2}$ (GPa)

3. Poutres en boii

Les formules proposées sont données pour des poutres de sections rectangulaires ou carrées.



R_{pc} : contrainte admissible en compression du bois dans le sens des fibres, valeurs indicatives : $7 \leqslant R_{pc} \leqslant 12{,}5$ MPa.

$k = \sqrt{\dfrac{0{,}45E}{R_{pc}}}$; valeurs indicatives : $7 \leqslant E \leqslant 12{,}5$ GPa et $18 \leqslant k < 30$.

Formes générales des conditions de non flambage

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 11 : \sigma_{adm} = R_{pc}$$

$$11 < \lambda \leqslant k : \sigma_{adm} = R_{pc}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{L_e}{a} \cdot k^{-1}\right)^2\right]$$

$$k \leqslant \lambda \leqslant 50 : \sigma_{adm} = \frac{2R_{pc}}{3}\left[\frac{k}{(L_e/a)}\right]^2 = \frac{0{,}3E}{(L_e/a)^2}$$

Exemple : $R_{pc} = 8{,}27$ MPa ; $E = 12{,}4$ GPa ; $E/R_{pc} = 1\ 500$; $k = 26$.

VI - Cas des charges excentrées - Formule de la sécante

1. Déformation!?

Le moment fléchissant est maximal au milieu de la poutre (x = $L/2$).

$M_{f\,maxi} = F\,(e + f)$

$M_f = F(e + y)$

Par intégration de $EIy'' = -F$ (e + y), on obtient :

$$y = e\left(\tan\frac{kL}{2}\sin kx + \cos kx - 1\right)$$

avec $k^2 = \frac{F}{EI}$

$$f = y_{maxi} = e\left(\sec\frac{kL}{2} - 1\right)$$

$$f \simeq \frac{e\,k^2 L^2}{8} = \frac{F\,e\,L^2}{8EI}$$

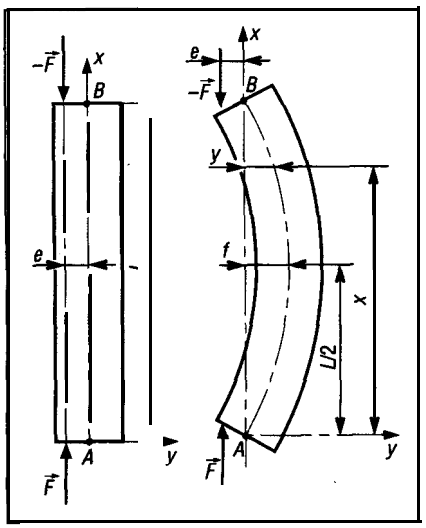


Fig. 16

Rappel: $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = 1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{5\,\theta^4}{4!} + \ldots$

si θ est petit : $\sec\theta = 1 + \frac{\theta^2}{2}$

2. Formule de la sécante

La contrainte dans la poutre résulte de l'addition de la contrainte de compression avec la contrainte due à la flexion.

$$\sigma_{maxi} = \frac{F}{S} + \frac{M_{f\,maxi}}{I_z / V} = \frac{F}{S} + \frac{F \cdot e}{I_z / V} \cdot \left(\sec\frac{kL}{2}\right)$$

En posant $r^2 = I/S$, on obtient :

$$\sigma_{maxi} = \frac{F}{S}\left[1 + \frac{eV}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{F}{ES}}\right)\right] \leq R_e$$

$\frac{eV}{r^2}$ est le taux d'excentration ;

$\frac{L}{r} = \lambda$ est l'élancement

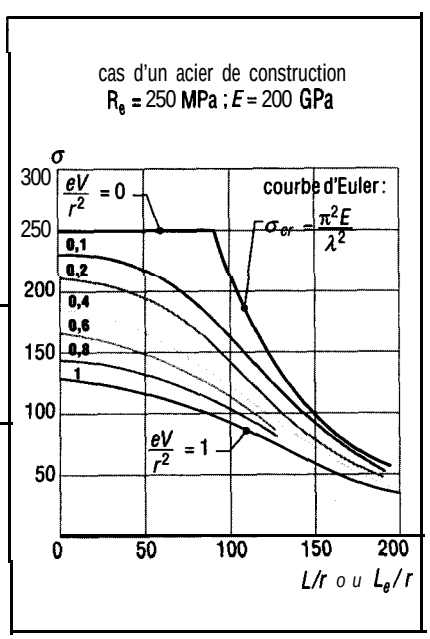


Fig. 17

Exemple

Un profilé HE 300 B, encastré en A et libre de se déplacer en B dans le plan (x, y), supporte une charge excentrée F de 300 kN (excentration e = 300). Déterminons la contrainte de compression maximale dans la colonne. Quelle est la charge maximale tolérable et le coefficient de sécurité adopté si R_e = 240 MPa ?

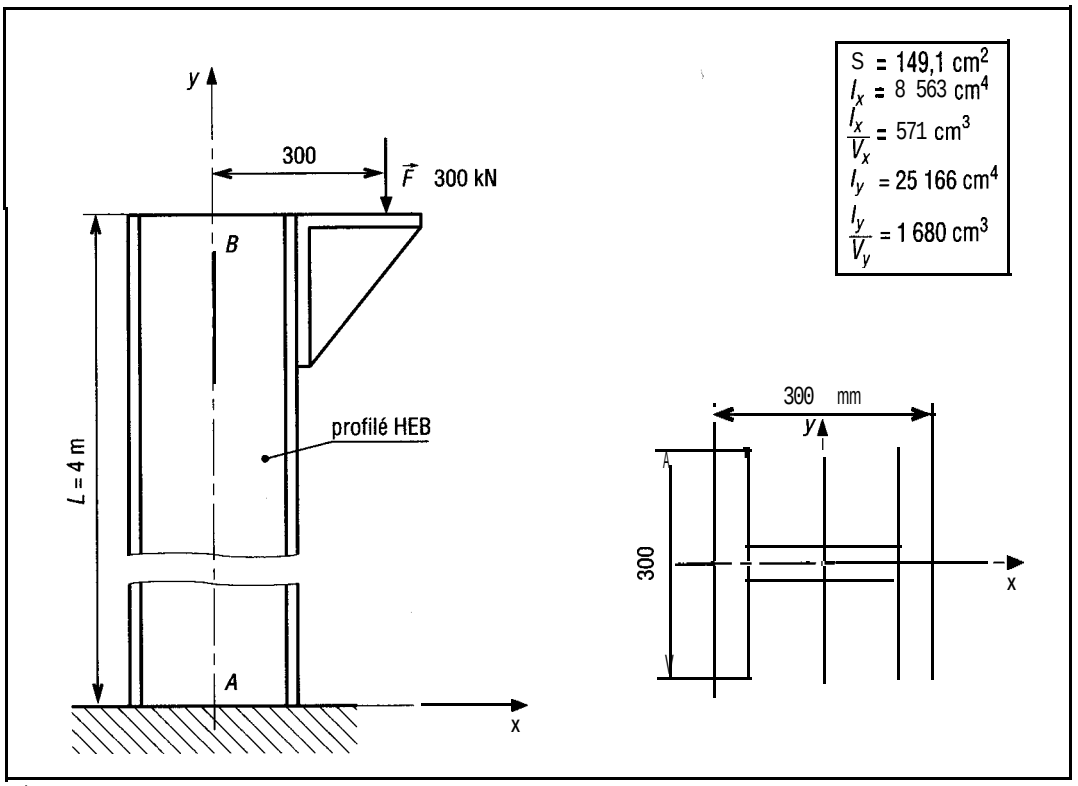


Fig. 18

Résolution

a) Longueur effective $L_e = 2\ L = 8$ m ; $r_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}} = \sqrt{\frac{25\,166}{149,1}} = 13$

$$\frac{L_e}{2\,r_y} = \frac{800}{2 \times 13} = 30,77 \quad ; \quad \frac{e\,V_y}{r_y^2} = \frac{e\,S}{\frac{I_y}{V_y}} = \frac{300 \times 14\,910}{1\,680\,000} = 2,66 ;$$

$$\frac{F}{S} = \frac{300 \times 10^3}{14\,910} = 20,12$$

$$\sigma_{maxi} = 20,12\left[1 + 2,66 \sec\left(30,77\sqrt{\frac{300 \times 10^3}{200 \times 10^9 \times 14\,910}}\right)\right] = 73,64 \text{ MPa}$$

b) $\sigma = R_e = 240$ MPa, la charge maximale tolérable doit être calculée à partir de la formule de la sécante et non à partir du rapport R_e/σ_{maxi} car il n'y a pas linéarité de la relation entre σ et F :

$$R_e = \frac{F_{maxi}}{14\,910}\left[1 + 2,66 \sec\left(30,77\sqrt{\frac{F_{maxi}}{200 \times 10^9 \times 14\,910}}\right)\right]$$

après calcul on obtient : F_{maxi} = 978kN et $s = \frac{978}{300} = 3,26$

31 ANALYSE DES CONTRAINTES

OBJECTIFS

- Développer la notion de contraintes planes : équations, contraintes principales, cercle de Mohr, etc.
- Définir la notion de contraintes triaxiales : tricercle de Mohr, etc.
- Aborder le cas des réservoirs sous pression.
- Décrire les principaux critères de limite élastique : Tresca, Von Mises, Coulomb et Mohr.

Les contraintes dans les poutres, arbres, barres, etc., données par les formules des chapitres précédents, sont indiquées pour des sections droites.
Dans ce chapitre, nous aborderons des méthodes permettant de déterminer les contraintes dans des sections inclinées ou dans des directions quelconques.

1 - Analyse des contraintes planes

La plupart des contraintes rencontrées en traction, torsion, flexion, etc., sont des exemples de contraintes planes.

1. Définition

Pour réaliser l'analyse des contraintes en un point M quelconque d'une poutre ou autre objet, considérons un parallélépipède infinitésimal (très petit) entourant M et dont les côtés sont parallèles aux axes x, y, *z* de référence.
Afin de simplifier les notations, les faces de l'élément seront désignées par les directions de leur normale (le côté droit correspond à x, le côté gauche à $-x$, le dessus à y, etc.).
En contraintes planes, seules les faces x et y de l'élément supportent des contraintes.

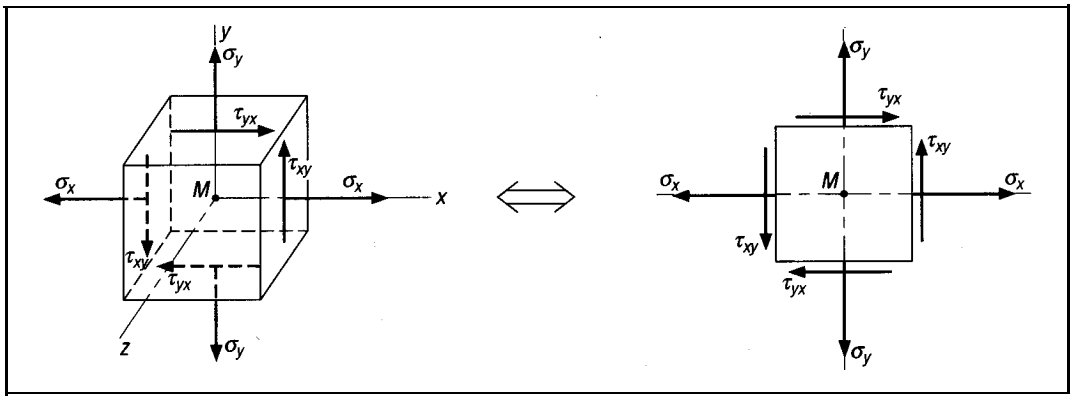


Fig. 1

Remarque

L'équilibre de l'élément (statique) montre que les contraintes sont égales sur des côtés opposés : $\sigma(-x) = -\sigma_x$

τ_{xy} est la contrainte tangentielle (ou de cisaillement) sur la face x dans la direction y. τ_{yx} est la contrainte tangentielle sur la faxe y dans la direction x.

Une contrainte est positive si elle agit sur une face positive et dans une direction avec un sens positif.L'équilibre de l'élément montre que : $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

2. Contraintes dans une section inclinée

τ_{xy}, σ_x et σ_y sont des contraintes connues, par exemple suite à une étude de torsion et de flexion.

Déterminons, en fonction de σ_x, σ_y et τ_{xy}, les contraintes σ_{x1}, σ_{y1} et τ_{x1y1} exercées sur les faces du parallélépipède lorsque l'on tourne celui-ci de l'angle 8.

À cette fin, étudions l'équilibre du prisme triangulaire de la figure 3.

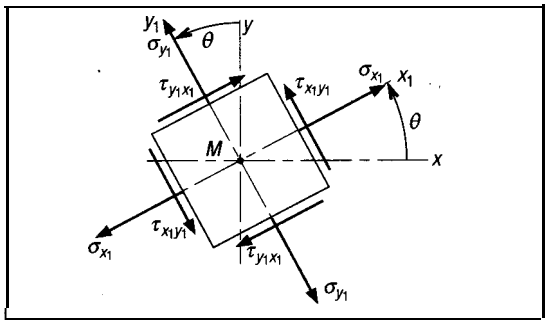


Fig. 2

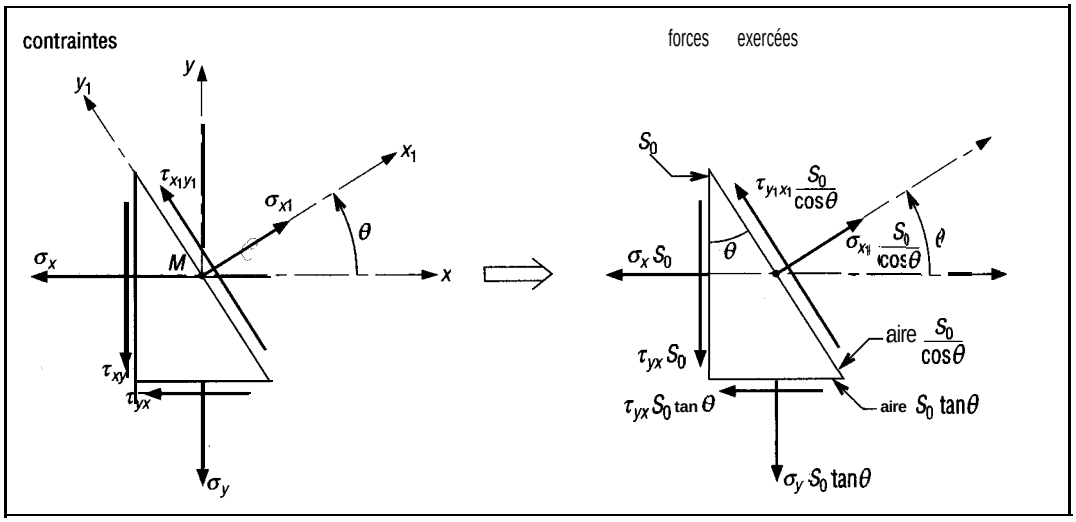


Fig. 3

L'équilibre conduit à deux équations de projection sur les axes x_1 et y, :

a) Projection des forces sur x_1

$\sigma_{x1} (S_0 / \cos \theta) - \sigma_x S_0 \cos \theta - \sigma_y S_0 \tan \theta \sin \theta - \tau_{xy} S_0 \sin \theta - \tau_{yx} S_0 \tan \theta \cos \theta = 0$

b) Projection des forces sur y,

$\tau_{x1y1} (S, / \cos \theta) + \sigma_x S_0 \sin \theta - \tau_{xy} S_0 \cos \theta - \sigma_y S_0 \tan \theta \cos \theta + \tau_{xy} S_0 \tan \theta . \sin \theta = o$

En remarquant que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ et que $\tau_{x1y1} = \tau_{y1x1}$, on obtient après simplification :

$\sigma_{x1} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$

$\tau_{x1y1} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos 19 + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$

Sachant que $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$; $2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta$; $2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$, on obtient les équations de transformation :

$$\sigma_{x1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (1)$$

$$\tau_{x1y1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (2)$$

Remarque 1 : si on remplace θ par $\theta + 90$" dans l'équation (1), on obtient σ_{y1} tel que :

$$\sigma_{y1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (3)$$

Remarque 2 : si on ajoute les équations (1) et (3), on obtient :

$$\sigma_{x1} + \sigma_{y1} = \sigma_x + \sigma_y$$

pendante de l'angle θ.

Autrement dit, la somme des contraintes normales agissant sur les faces perpendiculaires d'un même élément soumis a des contrainins planes est constante ou indé-

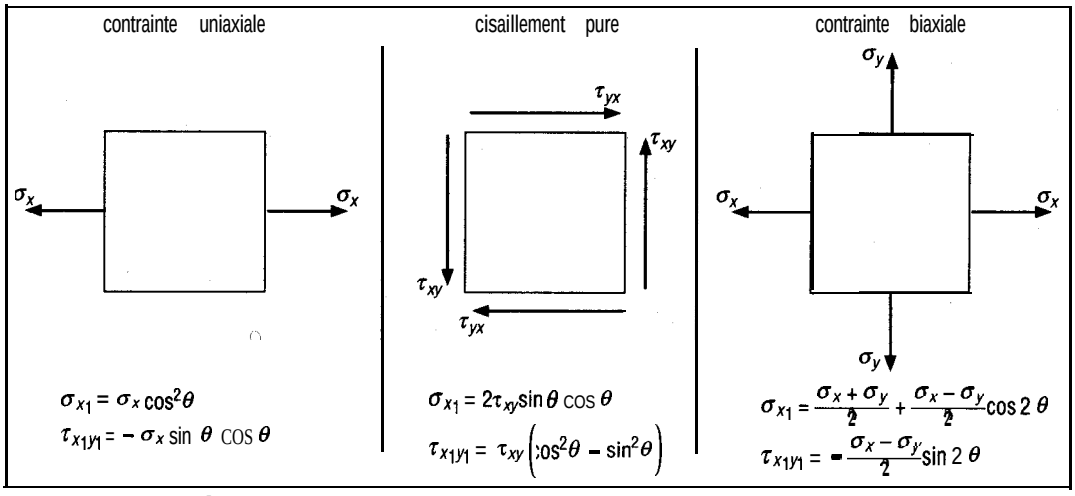


Fig. 4 : cas particuliers

Exemple

Les contraintes en un point M de la structure de la navette spatiale sont (après mesures expérimentales) : σ_x = 110 MPa ; σ_y = 40 MPa ; τ_{xy} = 28 MPa.

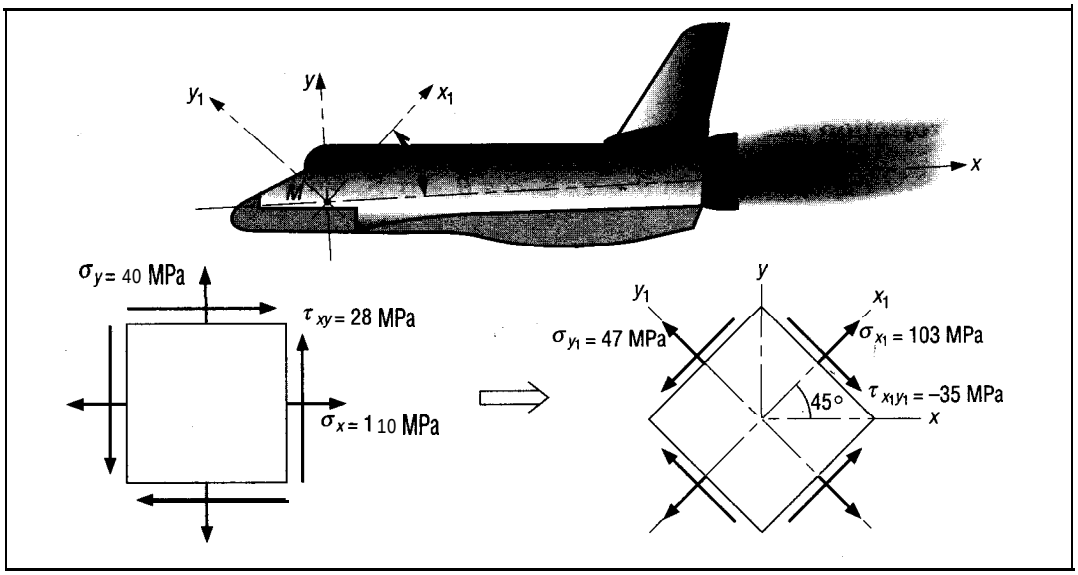


Fig. 5

Déterminons la valeur des contraintes dans une direction à 45".

$$\sigma_{x1} = \frac{110+40}{2} + \frac{110-40}{2}\cos 90 + 28 \sin 90 = 103 \text{ MPa}$$

$$2_{x1y1} = -\frac{110-40}{2}\sin 90 + 28 \cos 90 = -35 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y1} = \frac{110+40}{2} - \frac{110-40}{2}\cos 90 - 28 \sin 90 = 47 \text{ MPa}$$

3. Contraintes principales

Les contraintes σ_{x1} et τ_{x1y1} précédentes varient de façon combinée avec l'angle θ.
En conception des machines, la connaissance des valeurs maximales de ces contraintes est nécessaire pour faire des choix ou des déterminations.
Les valeurs extrêmes des contraintes sont appelées contraintes principales.

a) Détermination

Dérivons la contrainte σ_{x1} par rapport à l'angle θ.

$$\frac{d\sigma_{x1}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta + 2\tau_{xy}\cos 2\theta$$

σ_{x1} atteint sa valeur maximale lorsque sa dérivée est nulle. Notons θ_p l'angle θ donnant la direction des axes principaux.

$$-(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta_p + 2\tau_{xy}\cos 2\theta_p = 0 \Rightarrow \boxed{\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}}$$

Si σ_{x1} est maximale, parallèlement σ_{y1} est minimale.

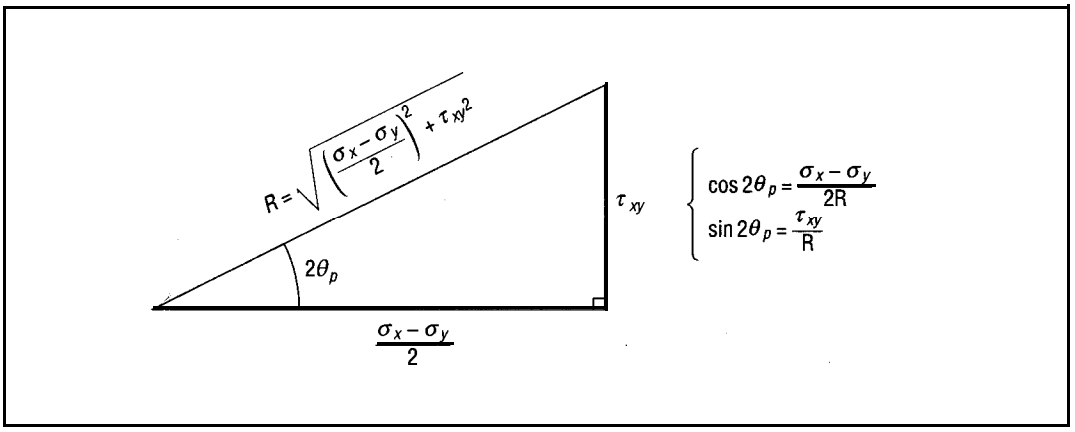


Fig. 6

Posons : $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

Appelons σ_1 et σ_2 les contraintes principales ($\sigma_1 = \sigma_{x1}$ maxi).
La relation (1) du paragraphe 2 donne après calcul :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R = \sigma_{moy} + R = \sigma_{maxi}$$

Comme $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$, il en résulte que :

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R = \sigma_{moy} - R = \sigma_{mini}$$

Remarque : l'équation (2) du paragraphe 2 donne :

$$\tau_{x1y1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta_p + \tau_{xy}\cos 2\theta_p$$
$$= -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \times \frac{\tau_{xy}}{R}\right) + \left(\tau_{xy} \times \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}\right) = 0$$

Autrement dit, lorsque σ_{x1} est maximale, τ_{x1y1} est nulle. Pour les axes principaux, l'élément est soumis à des contraintes biaxiales et les contraintes tangentielles sont nulles.

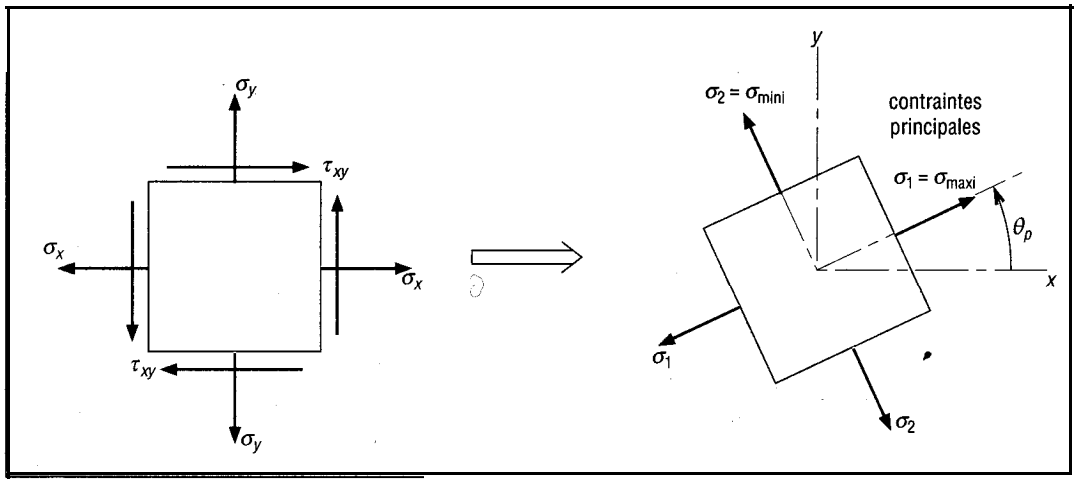


Fig. 7

b) Cas particuliers

En traction et en contraintes biaxiales, les axes principaux sont les axes x, y de départ ($\theta_p = 0$).

En cisaillement pur ($\sigma_x = \sigma_y = 0$), $\theta_p = 45°$, $R = \tau_{xy}$, $\sigma_1 = \tau_{xy}$ et $\sigma_2 = -\tau_{xy}$. Les axes principaux sont à 45".

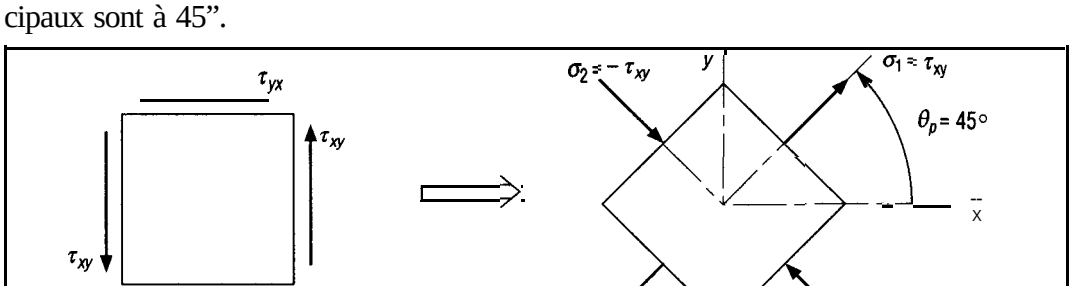


Fig. 8

4. Contraintes de cisaillement **maximal**

La contrainte τ_{x1y1} du paragraphe 2 est maximale lorsque sa dérivée est nulle. Celle-ci est nulle pour $\theta = \theta_c$.

$$\frac{d\tau_{x1y1}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta = 0$$

d'où : $\tan 2\theta_c = -\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2\,\tau_{xy}}$

$$\tan 2\theta_c = -\frac{1}{\tan 2\theta_p}$$

$$\theta_c = \theta_p \pm 45°$$

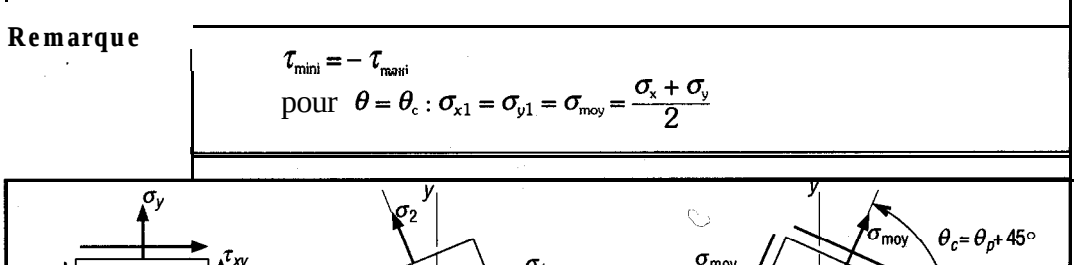
La contrainte de cisaillement maximal apparaît dans une direction faisant 45" avec les axes des contraintes principales. On obtient :

$$\tau_{maxi} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = R$$

Remarque

$$\tau_{mini} = -\tau_{maxi}$$

pour $\theta = \theta_c : \sigma_{x1} = \sigma_{y1} = \sigma_{moy} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$



ig. 9

Cas particuliers

En traction ou compression, la contrainte de cisaillement maximale apparaît dans une direction à 45" par rapport aux axes x et y.

Même remarque pour des contraintes biaxiales.

En cisaillement pur, les contraintes de cisaillement sont maximales suivant les axes x et y.

Exemple : reprenons l'exemple de la navette du paragraphe 2 et déterminons les contraintes principales et la contrainte de cisaillement maximale.

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\times 28}{110-40} = 0{,}8 \text{ d'où } \theta_p = 19{,}33° \text{ et } \theta_c = 19{,}33 \pm 45°$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{110-40}{2}\right)^2 + 28^2} = 44{,}82\,\text{MPa} = \tau_{maxi} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$\sigma_1 = 75 + 44{,}82 = 119{,}82\,\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = 75 - 44{,}82 = 30{,}18\,\text{MPa}$$

$$\sigma_{moy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{110+40}{2} = 75 \text{ MPa}$$

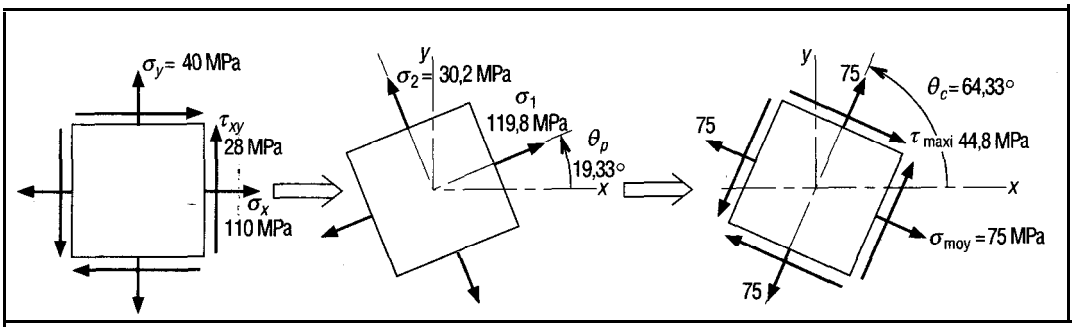


Fig. 10

5. Cercle de Mohr pour contraintes planes

Cette représentation graphique, universellement utilisée (elle fait partie des « bibliothèques » de nombreuses calculatrices de poche) permet de visualiser les relations existant entre les contraintes.

La théorie fut développée en 1882 par Otto Mohr (1835-1918), ingénieur allemand.

Écrivons les équations de transformation du paragraphe 2 sous la forme :

$$\sigma_{x1} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{x1y1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta.$$

Sous cette forme, les équations sont les équations d'un cercle, écrites sous forme paramétrique (angle 2θ comme paramètre).

En élevant chaque membre au carré puis en ajoutant membre à membre pour éliminer θ, on obtient :

$$\left(\sigma_{x1} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x1y1}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2$$

équation d'un cercle ayant σ_{x1} et τ_{x1y1} comme coordonnées et pour rayon R.
Les coordonnées du centre du cercle C sont $\sigma_{x1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \sigma_{moy}$ et $\tau_{x1y1} = 0$.

a) Construction du cercle

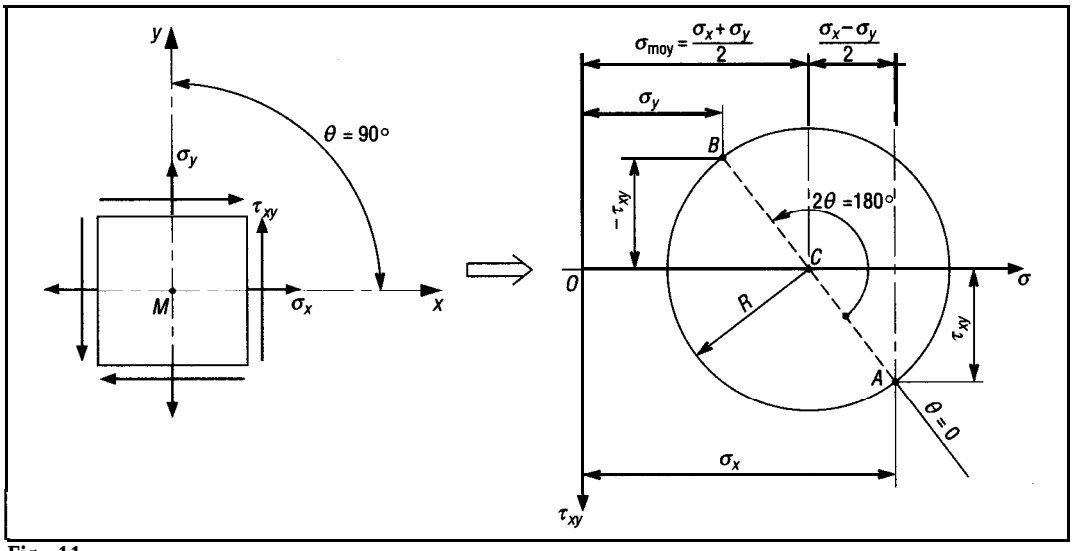


Fig. 11

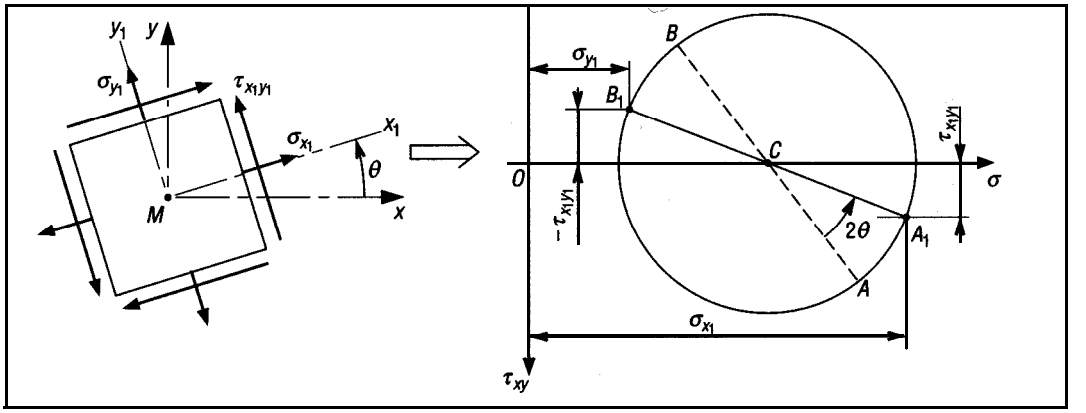
Tracer dans l'ordre :
- les axes de coordonnées : σ en abscisse (positif vers la droite) et τxy en ordonnée (positif vers le bas); choisir une échelle pour les contraintes ;
- le centre C du cercle à la distance $\sigma_{moy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ de l'origine 0 ;
- le point A de coordonnées σ_x et τ_{xy} ;
- le cercle de Mohr de centre C et de rayon $AC = R$.

b) Détermination des contraintes dans une direction x_1 inclinée de θ

- Le diamètre AB sert de référence angulaire ($\theta = 0$).
- Sur le cercle de Mohr, tracer l'angle 2θ [$2\theta = (AC, A_1C)$].

À noter que 28 a la même orientation que l'angle θ tracé sur la figure représentant les contraintes au point M.

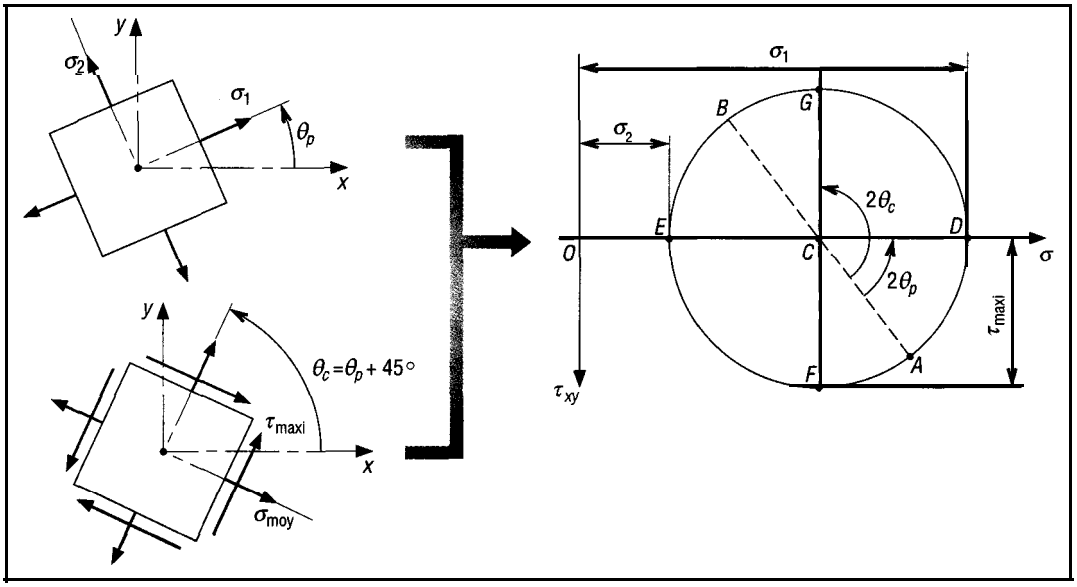
- Mesurer, à l'échelle des contraintes choisies, les coordonnées des points A, (σ_{x1} et τ_{x1y1}) et B_1 (σ_{y1} et $-\tau_{x1y1}$).



Fii. 12

Remarque : le cercle de Mohr représente l'état des contraintes en un point. Une fois établi, il permet de déterminer les contraintes dans n'importe quelle direction (θ) choisie et en particulier les contraintes principales et la contrainte de cisaillement maximale. Lorsque θ = 90, A devient B et on retrouve les contraintes σ_y et $-\tau_{xy}$ dans la direction perpendiculaire.

c) Détermination des contraintes principales et de la contrainte de cisaillement maximale



'ig. 13

- Les contraintes principales correspondent aux points d'intersection D et E du cercle avec l'axe σ pour lesquelles τ_{xy} = 0. Elles sont définies dans la direction θ_p (θ_p étant la moitié de l'angle ACD).
- La contrainte de cisaillement maximale apparaît en F et G pour $\theta_c = \theta_p \pm 45°$. En G, $\theta_c = \theta_p + 45°$ et $\tau_G = -\tau_{maxi}$. En F, $\theta'_c = \theta_p - 45°$ et $\tau_F = \tau_{maxi}$.

d) Exemple

Reprenons l'exemple de la navette spatiale des paragraphes précédents :

$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ = 75 MPa ; R = 44,8 MPa ; $2\theta_p = 39°$ ($\theta_p \simeq 19{,}5°$) ; $\theta_c = \theta_p \pm 45°$

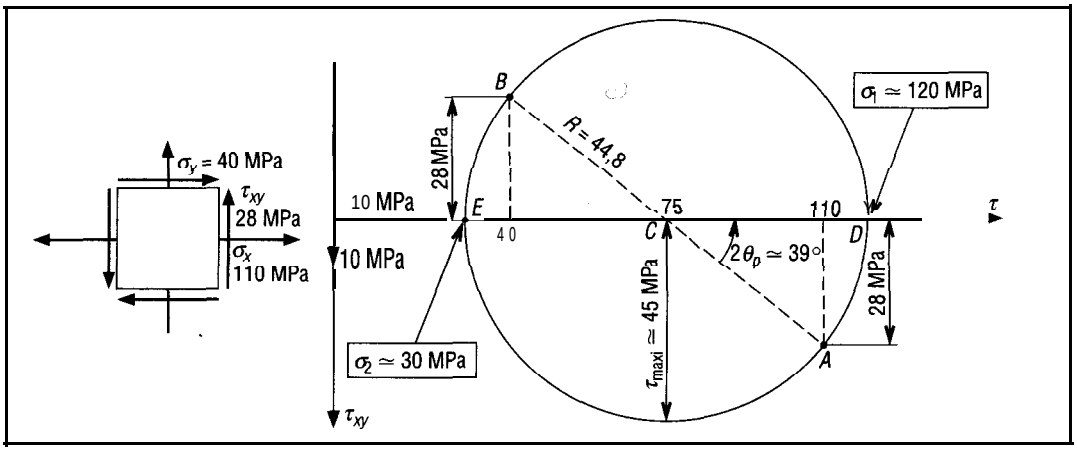


Fig. 14

-6. Loi de Hooke en contraintes planes

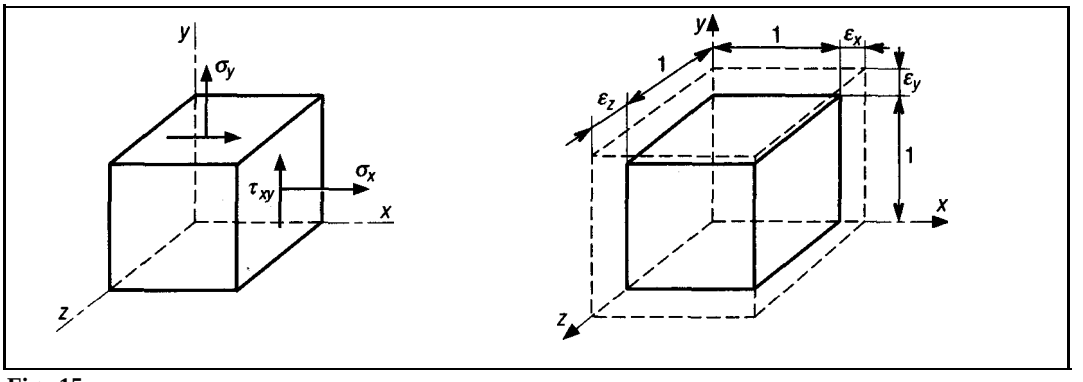


Fig. 15

ε_x, ε_y et ε_z sont les déformations relatives des côtés du parallélépipède infinitésimal entourant le point M ($\varepsilon_x = \Delta x/x$; $\varepsilon_y = \Delta y/y$; etc.).

γ_{xy} est l'angle de glissement des sections droites du parallélépipède Sous l'action des contraintes de cisaillement τ_{xy}.

E est le module d'élasticité longitudinal du matériau et v le coefficient de Poisson correspondant.

On montre :

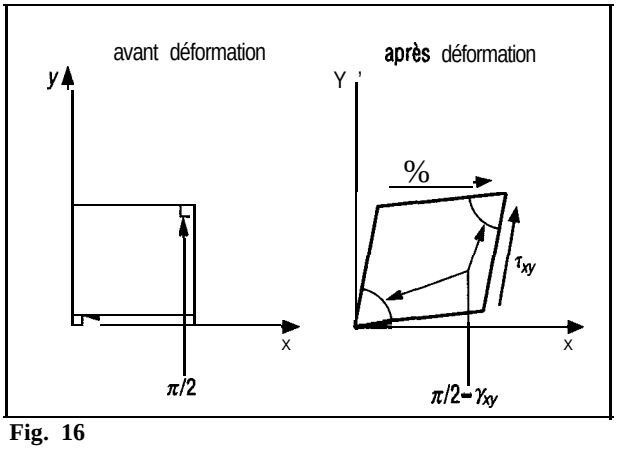


Fig. 16

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) \qquad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \qquad \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right) \qquad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right)$$

II-Contraintes triaxiales

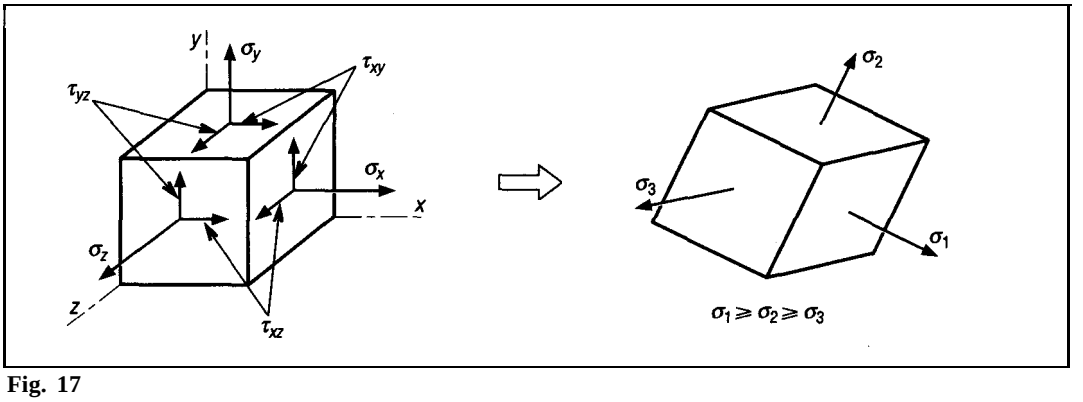


Fig. 17

Si un solide est soumis à un état de contraintes tridimensionnel, chaque face de l'élément (parallélépipède infinitésimal) entourant un point M considéré supporte une contrainte normale et deux contraintes tangentielles (σ_x, τ_{xy} et τ_{xz} pour la face x, etc.), dans le cas le plus général.

1. Contraintes principales • Contraintes triaxiales

De la même manière qu'en contraintes planes, il est possible de développer des équations de transformations (voir ouvrages d'élasticité) et déterminer les contraintes principales pour l'élément.

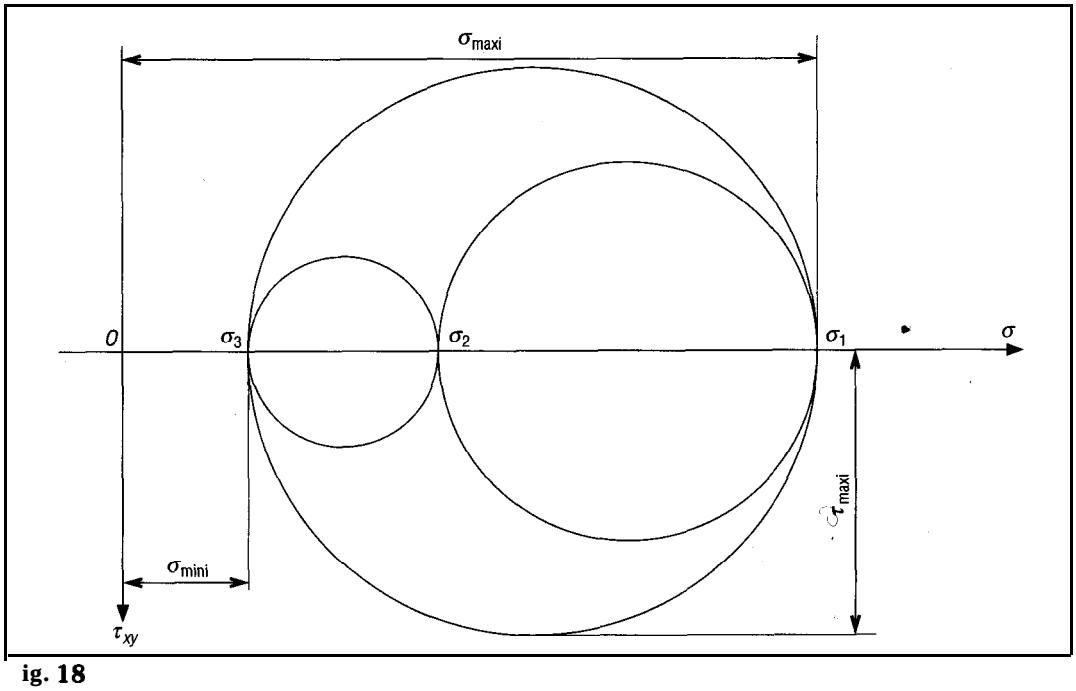
Ces contraintes principales sont aussi appelées contraintes triaxiales et les contraintes de cisaillement correspondantes sur chaque face sont nulles.

La technique générale du cercle de Mohr peut être utilisée ; aux trois contraintes principales σ_1, σ_2, σ_3, on peut faire correspondre trois cercles de Mohr : (or, σ_2) ; (σ_1, σ_3) et (σ_2, σ_3).

L'ensemble des trois cercles tracés sur une même figure constitue le tricercle de Mohr.

La contrainte de cisaillement maximal dans l'élément est égale au rayon du plus grand cercle.

Remarque : si on fait tourner l'élément de la figure 17 autour de l'axe principal lié à σ_3, la transformation des contraintes σ_1 et σ_2 peut être analysée par un cercle de Mohr. Même remarque pour les axes liés à σ_1 et σ_2.



ig. 18

Contrainte de cisaillement absolue

D'après le tricercle :

$$\tau_{maxi} = \frac{1}{2} \left| \sigma_{maxi} - \sigma_{mini} \right|$$

Si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\tau = 0$, il n'y a pas de contrainte de cisaillement et le tricercle se réduit à un point.

2. Cas des contraintes planes

Si pour le cas précédent on pose $\sigma_3 = 0$, on retrouve le cas des contraintes planes.

On remarquera que la contrainte de cisaillement maximale n'est pas forcément égale à $1/2\,(\sigma_1 - \sigma_2)$ mais vaut $1/2\,(\sigma_{maxi} - \sigma_{mini})$, avec : σ_{mini} égal à σ_2 ou 0.

Cas 1 :

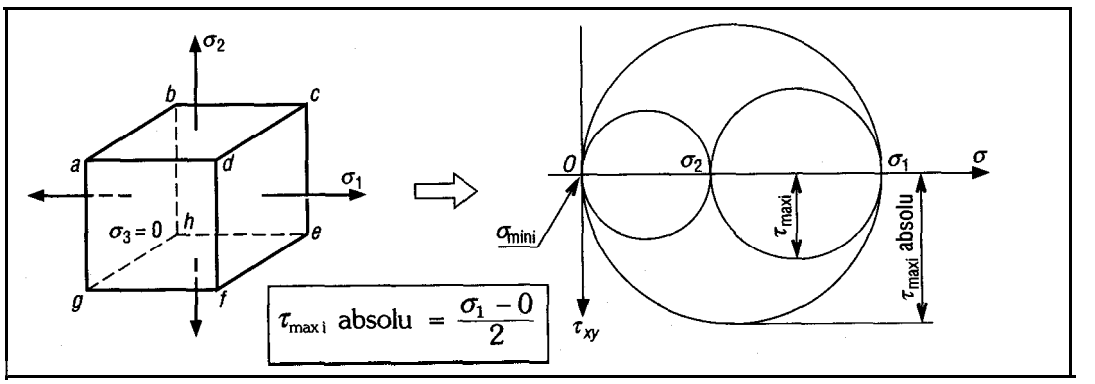


Fig. 19

Cas 2 :

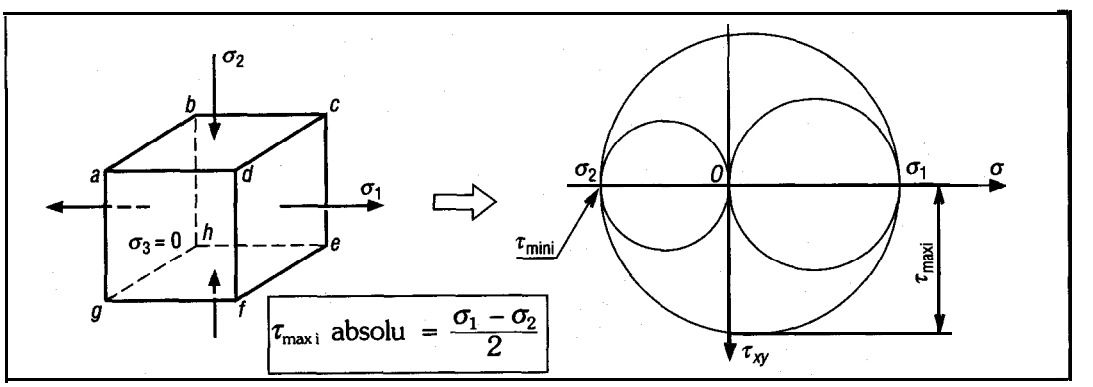


Fig. 20

Remarques : dans le cas 1, les plans de cisaillement maximal sont les plans diagonaux *acge* et *bhdf*. Pour ce cas, une étude en contrainte plane simple (paragraphe I) nous aurait donné le seul cercle $\sigma_1\sigma_2$ et $\tau_{maxi} = 1/2\,(\sigma_1 - \sigma_2)$.

Valeur inférieure à celle déterminée par le tricercle $\tau_{maxi\ absolu} = \frac{\sigma_1}{2}$, encore appelée **contrainte de cisaillement absolue.**

Dans le cas 2, *abef* et cdgh sont les plans diagonaux où il y a cisaillement maximal. L'étude en contrainte plane ou par tricercle donne le même résultat :

$\tau_{maxi} = 1/2\,(\sigma_1 - \sigma_2)$.

Exemple : l'étude à partir des formules usuelles de flexion donne, pour le point M de la poutre encastrée, $\sigma_x = -40$ MPa, $\sigma_y = 0$ et $\tau_{xy} = -80$ MPa. Déterminons la contrainte de cisaillement maxi en M.

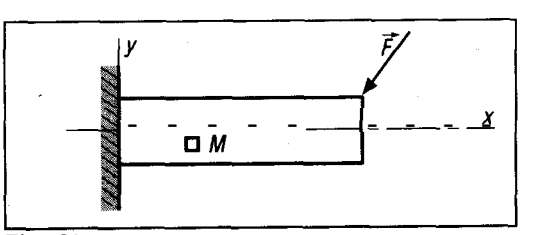


Fig. 21

Pour cet exemple, l'utilisation du cercle de Mohr simple ou du tricercle donne le même τ_{maxi} pour une même orientation.

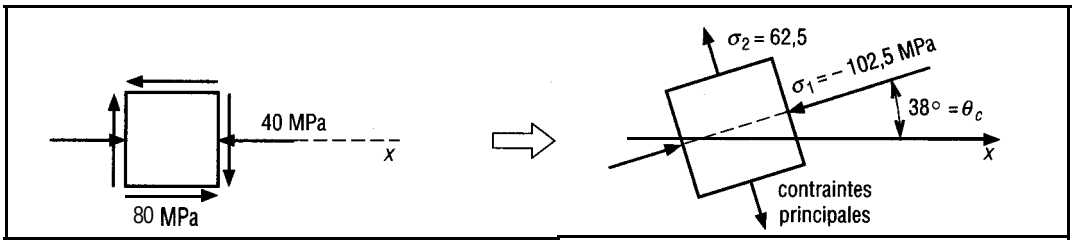
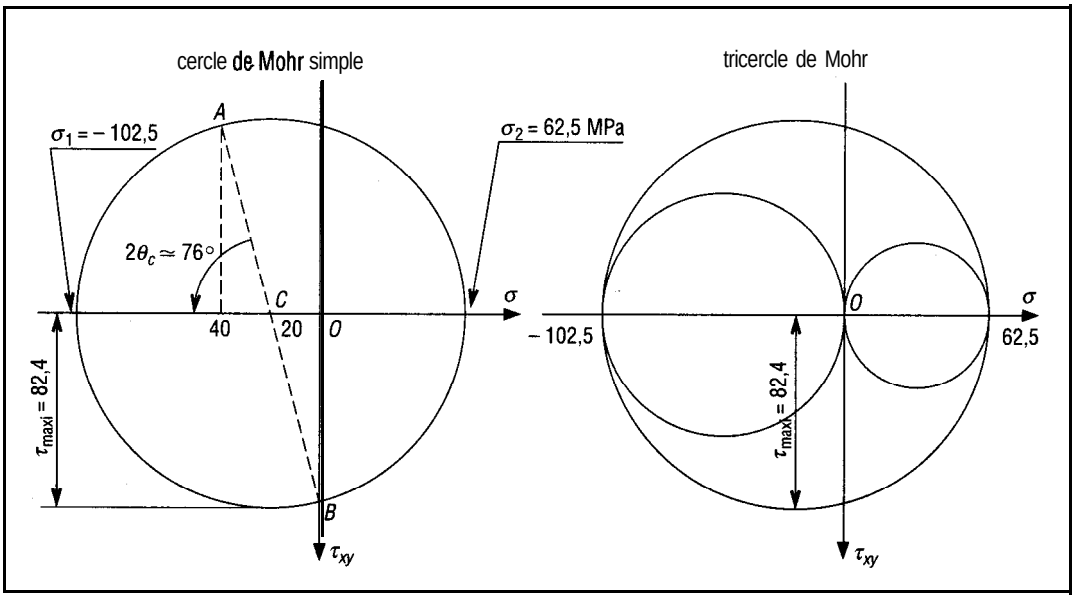


Fig. 22



ig. 23

III - Application aux réservoirs sous pression - Enveloppes minces

Les études qui suivent supposent des réservoirs d'épaisseur (e) mince.

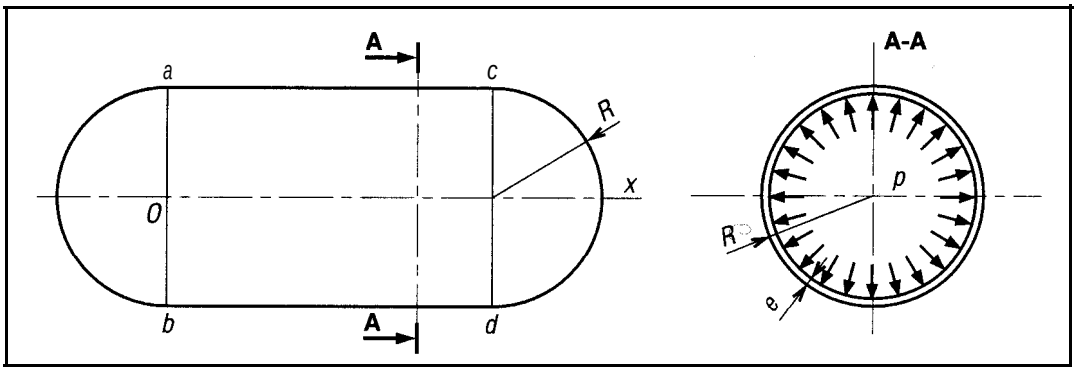


Fig. 24

Pour la cuve de compresseur proposée sur la figure 23, soumise à une pression intérieure égale à p, déterminons les contraintes exercées dans la partie cylindrique (diamètre $2R$) et celles dans les fonds hémisphériques (rayon R).

1. **Contraintes** dans la partie hémisphérique - Cas des réservoirs sphériques

Pour mettre en évidence les contraintes dans l'enveloppe, isolons l'un des deux fonds avec l'air qui y est contenu et appliquons le principe fondamental de la statique. σ schématise la contrainte au niveau de la coupure. Compte tenu des symétries σ est constante en tout point de la coupure.

p s'exerce sur une surface circulaire d'aire πR^2 et σ agit sur une surface annulaire dont l'aire est sensiblement égale à $2\pi Re$ (e petit devant R).

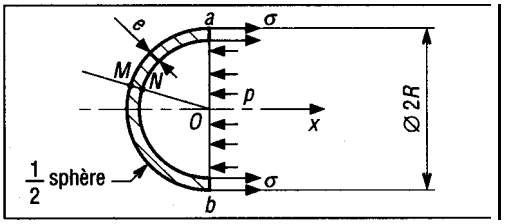


Fig. 25

En projetant les résultantes des actions exercées sur l'axe x, on obtient :

$\sigma \times 2\pi Re - p \times \pi R^2 = 0$ d'où : $\sigma = \dfrac{pR}{2e}$

Remarque : dans le cas d'un réservoir sphérique, l'étude peut être recommencée avec n'importe quel plan de coupure diamétral (ab), la valeur de la contrainte σ reste identique ($\sigma = pR/2e$). Tous les points d'une même sphère ont le même état de contrainte, deux cas possibles suivant que le point est à l'extérieur ou à l'intérieur de l'enveloppe.

a) Contrainte en un point extérieur M

On est dans un état de contraintes biaxiales avec $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.

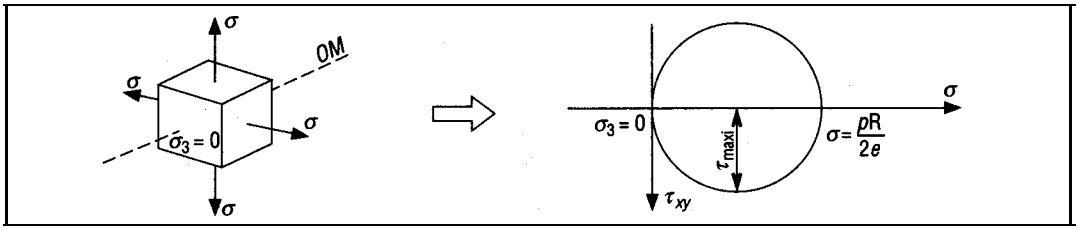


Fig. 26

Le tricercle de Mohr se réduit à un seul cercle et

$$\tau_{maxi} = \frac{\sigma}{2} = \frac{pR}{4e}$$

b) Contrainte en un point intérieur N

La pression p exerce une contrainte supplémentaire et, on est en contraintes triaxiales.

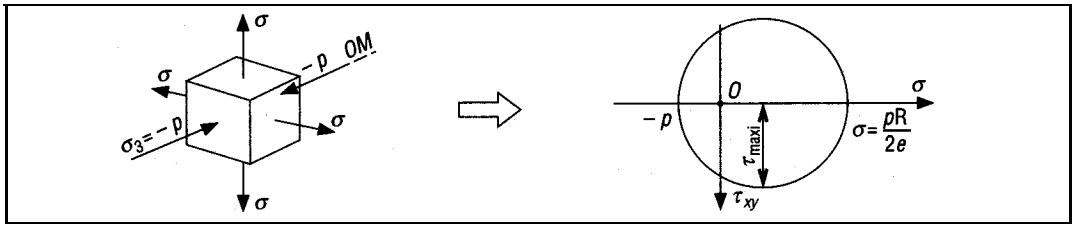


Fig. 27

Le tricercle de Mohr des contraintes en N se réduit à un seul cercle et

$$\tau_{maxi} = \frac{1}{2}(\sigma + p) = \frac{pR}{4e} + \frac{p}{2}$$

2. Contraintes dans la partie cylindrique • Cas des réservoirs cylindriques

Si, pour le réservoir de la figure 23, on pratique une coupure dans le plan de coupe AA, l'étude est analogue à celle du paragraphe 1 et on obtient : $\sigma_1 = pR/2e$.

Si on effectue une coupure dans un plan longitudinal (a, b, c, d), l'isolement du demi-cylindre et de l'air qui y est contenu conduit à un équilibre différent, en appliquant le principe fondamental de la statique.

La pression p s'exerce sur une surface rectangulaire d'aire b x 2R et σ_2 agit sur deux surfaces rectangulaires dont l'aire totale est égale à 2be.

En projetant les résultantes des actions exercées sur l'axe y, on obtient :

$\sigma_2 \times 2be - p \times 2bR = 0$

d'où : $\sigma_2 = \frac{pR}{e} = 2\sigma_1$

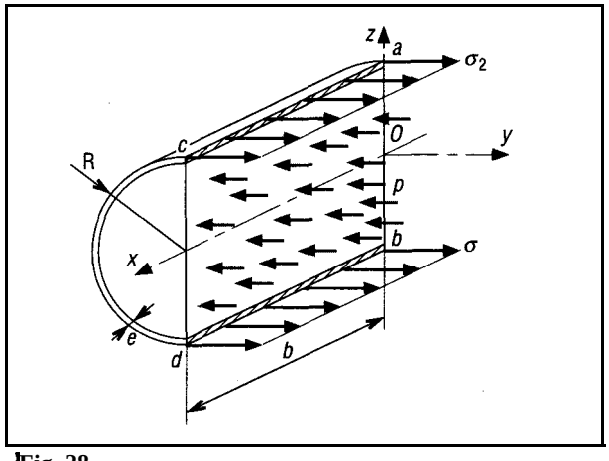
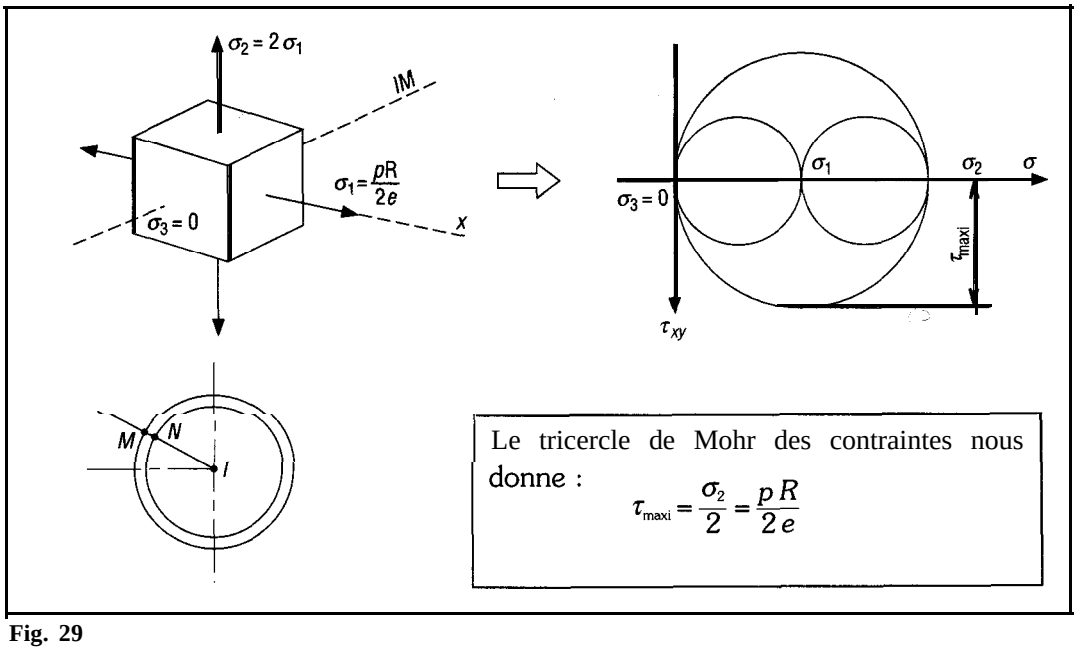


Fig. 28

Remarque : l'étude est identique pour n'importe quel plan (a, b, c, d) longitudinal et tous les points d'un même cylindre ont même état de contraintes. Deux cas sont possibles selon que le point est à l'extérieur ou à l'intérieur de l'enveloppe.

a) Contrainte en un point extérieur (M)

On est dans un état de contraintes biaxiales.

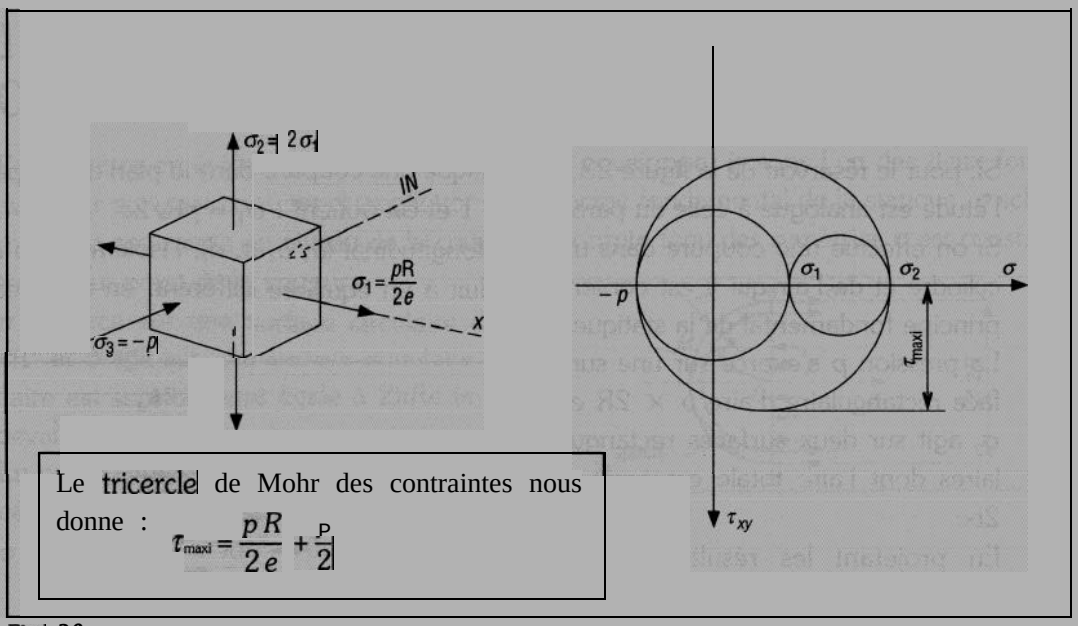


Le tricercle de Mohr des contraintes nous donne : $\tau_{maxi} = \frac{\sigma_2}{2} = \frac{pR}{2e}$

Fig. 29

b) Contrainte en un point intérieur (N)

La pression p exerce une contrainte supplémentaire et on est dans un état de contraintes triaxiales.



Le tricercle de Mohr des contraintes nous donne :

$$\tau_{maxi} = \frac{pR}{2e} + \frac{p}{2}$$

Fig. 30

Exemple

Un corps de vérin, de forme tubulaire (diamètre D = 100 mm, épaisseur e = 5 mm), supporte une pression d'air intérieure de 20 bars.

Déterminons les contraintes normales principales et la contrainte de cisaillement maximale exercées.

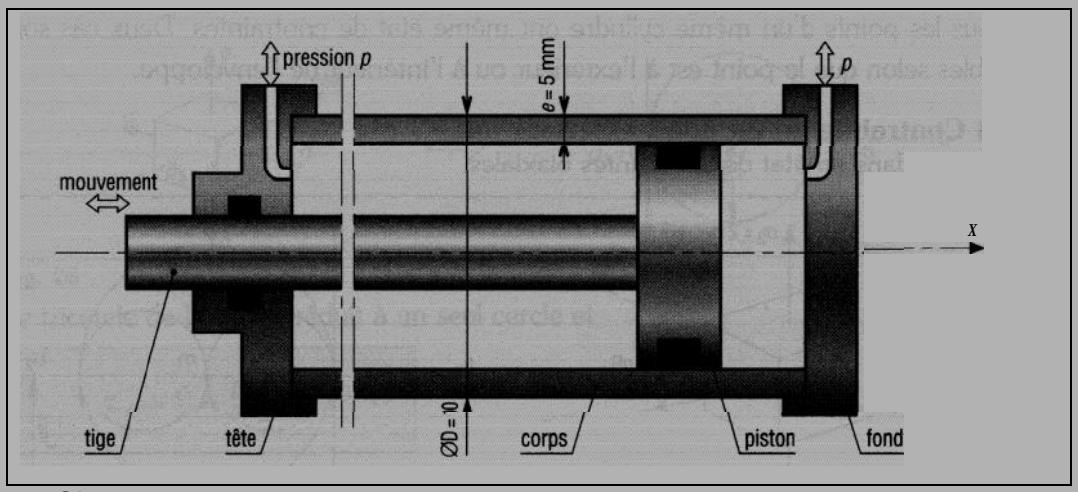


Fig. 31

$$p = 20\,\text{bars} = 20 \times 10^5\,\text{Pa} = 2\ \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{pR}{e} = \frac{p \times 50}{5} = 10\,p = 20\,\text{MPa}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_2}{2} = 5\,p = 10\,\text{MPa}$$

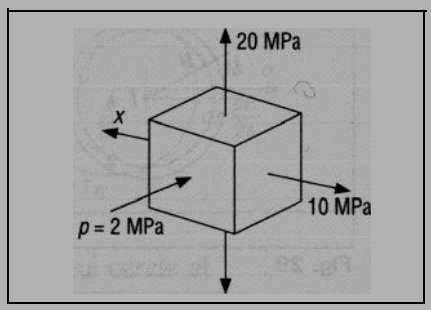


Fig. 32

La contrainte maximale apparaît en un point intérieur du tube :

$$\tau_{maxi} = \frac{pR}{2e} + \frac{p}{2} = 5\,p + 0{,}5\,p = 5{,}5\,p = 11\ \text{MPa}$$

IV • Critères de limite élastique

Au moment de la conception des machines, il est souvent nécessaire de mettre une limite supérieure aux contraintes sollicitant les matériaux.

Si le matériau est ductile ou malléable, sa limite élastique (Re) servira de référence ; si le matériau est fragile, on utilisera la résistance à la rupture R,.

Les modes de rupture et les critères sont plus faciles à définir lorsque le matériau est sollicité dans un état de contrainte uniaxial (exemple : en traction, $\sigma_{admissible} \leqslant Re$). Cependant, lorsque les contraintes sont biaxiales ou triaxiales, d'autres critères sont nécessaires.

Les critères proposés dans ce paragraphe sont utilisés dans tous les pays industrialisés et sont régulièrement employés pour élaborer des cahiers des charges, des codifications ou des normalisations.

Aucun des critères présentés n'est universel et le choix de l'un ou l'autre dépendra du comportement final du matériau : ductile ou fragile, évolution avec la température, procédé de fabrication, environnement chimique, variation des charges, etc.

Pour chaque cas, il est d'abord nécessaire de déterminer les contraintes normales (σ) et tangentielles (τ) aux points les plus sollicités en tenant compte des concentrations de contraintes. Lorsque les contraintes maximales ont été établies (par calcul ou expérimentation), il est nécessaire de déterminer les contraintes principales aux points critiques car les critères abordés sont basés sur la connaissance de ces dernières.

Il existe de nombreux critères, seuls les plus utilisés seront développés.

1. Critères pour matériaux ductiles ou malléables

a) Critère de Tresca ou de la contrainte de cisaillement maximal

Le mode de rupture le plus usuel des matériaux ductiles est le glissement engendré par les contraintes de cisaillement.

Exemple : cas d'une poutre travaillant en traction

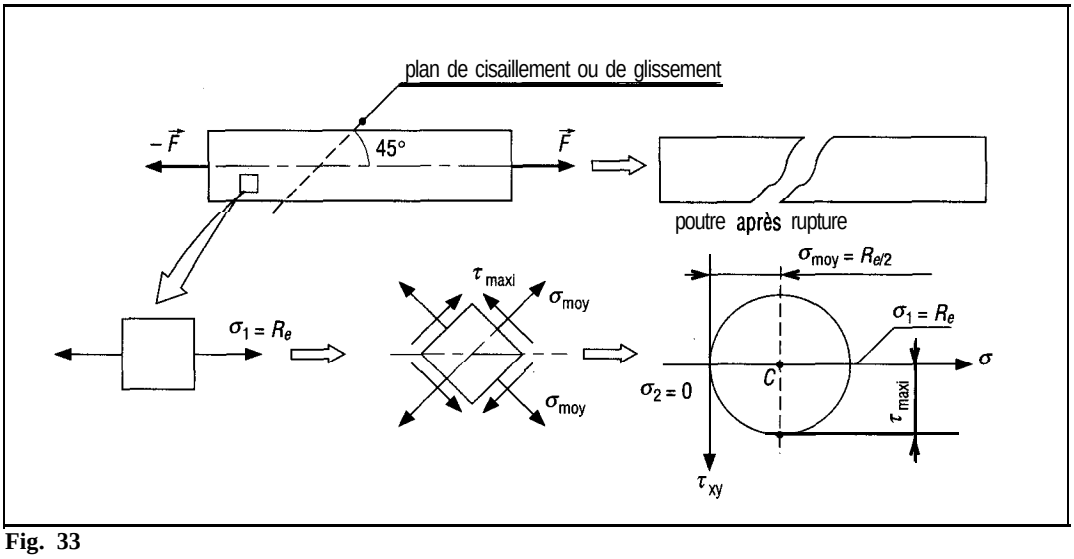


Fig. 33

En traction : $\tau_{maxi} = \dfrac{\sigma_1}{2} = \dfrac{\sigma_{maxi}}{2} \leqslant \dfrac{R_e}{2}$

Dans le cas général, pour éviter la rupture des pièces ou des composants en traction, il suffit que la contrainte de cisaillement maximale τ_{maxi} exercée reste inférieure à la valeur limite admissible par le matériau ou par $\sigma_{maxi} \leqslant R_e$.

Dans le cas des contraintes planes et d'après le paragraphe II 2, lorsque les contraintes principales ont même signe, $\tau_{maxi} = 1/2\ \sigma_{maxi}$.

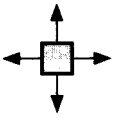
Si les contraintes principales ont des signes différents, alors :

$\tau_{maxi} = 1/2\ |\sigma_{maxi} - \sigma_{mini}|$.

En conséquence, le critère peut s'écrire :

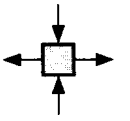
$|\sigma_1| \leqslant Re$ et $|\sigma_2| \leqslant Re$

si σ_1 et σ_2 sont de même signe.



$|\sigma_1 - \sigma_2| < Re$

si σ_1 et σ_2 sont de signes opposés.



Graphe représentant le critère de Tresca.

Si le point de coordonnées (σ_1, σ_2) tombe en dehors de I'hexagone de Tresca, il y a rupture. Henri Édouard Tresca (1814-1885) est un ingénieur français.

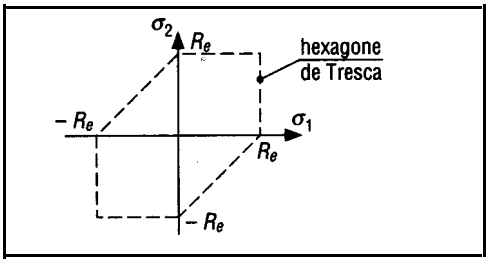


Fig. 34

b) Critère de Von Mises ou de l'énergie de déformation

Un matériau, lorsqu'il est déformé par une charge extérieure, tend à stocker de l'énergie interne dans son volume (analogie avec un ressort).

Par exemple, en traction $U = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$ et en cisaillement $U = \frac{1}{2}\tau\gamma$.

Le critère est basé sur l'énergie de déformation par unité de volume du matériau déformé. Celle-ci ne doit pas dépasser l'énergie de distorsion engendré dans le cas des contraintes limites élastiques (R_e, etc.).

Dans le cas des contraintes planes, le critère s'énonce : $\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 \leqslant R_e^2$

(équation d'une ellipse dans le système d'axe σ_1, σ_2).

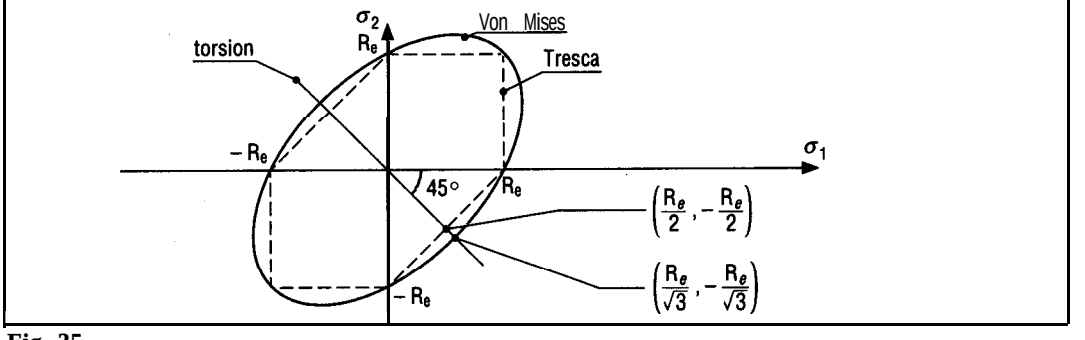


Fig. 35

L'ellipse de Von Mises passe par les sommets de l'hexagone de Tresca. Pour ces six points, les deux critères donnent les mêmes résultats. Dans les autres cas, le critère de Tresca est plus sévère.

Dans le cas particulier du cisaillement pur ou de la torsion $\sigma_{maxi} = -\sigma_{mini}$. Les points correspondants sont situés sur la bissectrice des 2^e et 4^e quadrants. Les limites sont $\sigma_1 = -\sigma_2 = 0{,}5$ Re avec Tresca et $\sigma_1 = -\sigma_2 = 0{,}577$ Re avec Von Mises. Pour ces cas, Von Mises est plus précis et est plus proche de l'expérimentation.

2. Critères pour matériaux fragiles

Schématiquement, lorsqu'un matériau fragile est soumis à un essai de traction, sa rupture se produit soudainement sans déformation plastique préalable. Les contraintes normales maximales atteignent la valeur de la limite à la rupture par traction R,.

a) Critère de la contrainte normale maximale ou de Coulomb

Pour un composant, la rupture se produit dès que la contrainte normale principale maximale atteint la résistance à la rupture R_r du matériau. Le critère s'énonce :

$$|\sigma_1| \leq R_r$$
$$|\sigma_2| \leq R_r$$

Le critère peut être représenté graphiquement par une aire carrée. Pour les points en dehors de cette surface, il y a rupture.

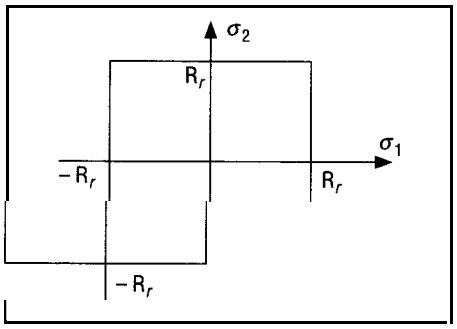


Fig. 36

Remarque : énoncé par Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), physicien français, le critère suppose que la limite à la rupture est la même en traction et en compression.

b) Critère de Mohr

Pour beaucoup de matériaux fragiles, les résistances à la rupture par compression R_{rc} et par traction R_{rt} sont différentes.

Le critère de Mohr est fondé sur des résultats d'essais. La rupture se produit lorsque le cercle de Mohr engendré par les contraintes sort ou est tangent à la courbe enveloppe aux trois cercles A, B, C définis par :

cercle A (compression pure) : $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -R_{rc}$

cercle B (traction pure) : $\sigma_1 = R_{rt}$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

cercle C (cisaillement pur) : $\tau = \tau_{ultime} = \tau_u$

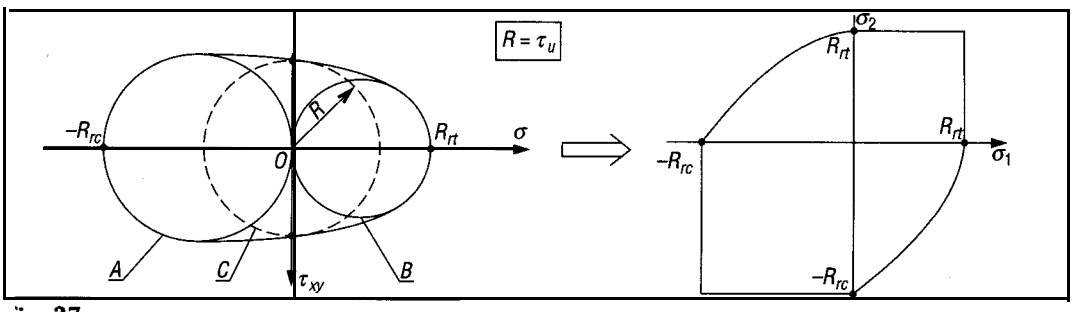


Fig. 37

Remarque : si on ne dispose pas du cercle C, on peut faire une approximation à partir des tangentes aux cercles A et B.

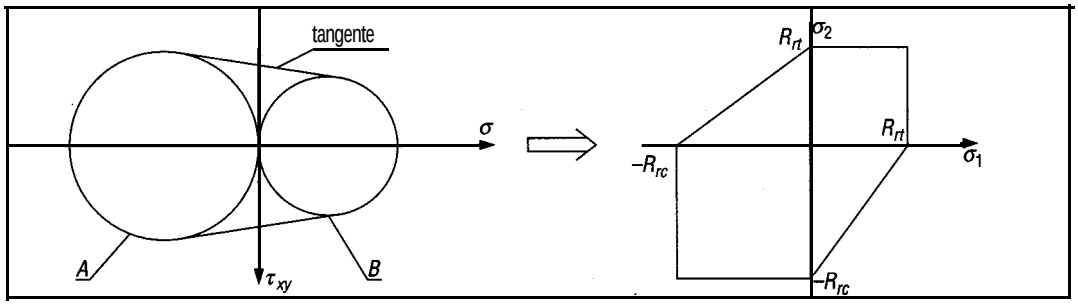


Fig. 38

3. Exemple

Les contraintes en un point critique d'un composant de machine en acier sont σ_x = 100 MPa, σ_y = – 60 MPa et τ_{xy} = 60 MPa.
Si la limite élastique de l'acier utilisé R_e = 300 MPa, déterminer le coefficient de sécurité CS adopté par rapport aux critères de Tresca et de Von Mises.

Solution

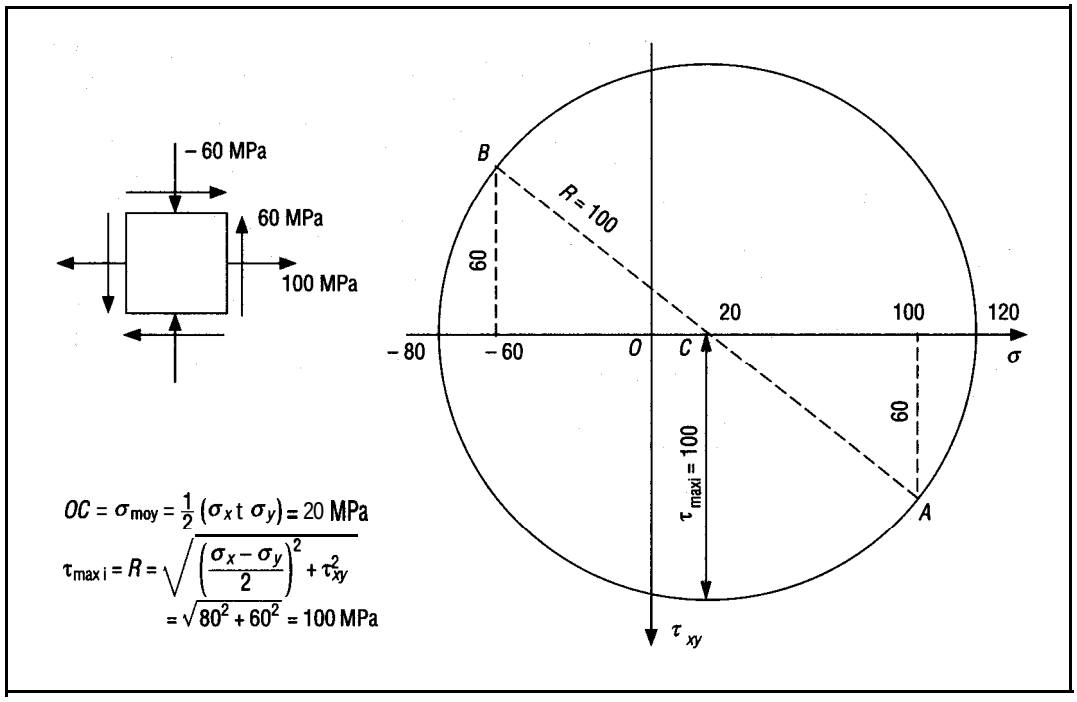


Fig. 39

Contraintes principales :
σ_1 = 20 + 100 = 120 MPa
σ_2 = 20 – 100 = – 80 MPa
Critère de Tresca : $|\sigma_1 - \sigma_2| = 200 \leqslant R_e$

$$CS_1 = \frac{R_e}{200} = \frac{300}{200} = 1{,}5 = \frac{OT}{OM}$$

Remarque

$\tau_{maxi} = 100 \leqslant \frac{R_e}{2} = 150$ donne le même coefficient de sécurité.

Von Mises :

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = 120^2 + 120 \times 80 + 80^2$$

$$= \left(\frac{R_e}{CS_2}\right)^2$$

$$174{,}36 = \frac{300}{CS_2}$$

$$CS_2 = \frac{300}{174{,}32} = 1.72 = \frac{OS}{OM}$$

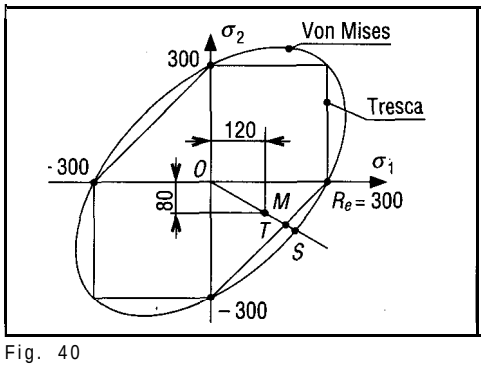


Fig. 40

EXERCICES À RÉSOUDRE

❑ Un point d'un composant de machine est sollicité par le système de contraintes planes : $\sigma_x = -144$ MPa : $\sigma_y = 44$ MPa et $\tau_{xy} = 80$ MPa. Déterminer les contraintes sur l'élément lorsqu'on tourne celui-ci de $\theta = 60"$.

Réponse

$\sigma_{x1} = 66$ MPa ; $\sigma_{y1} = -166$ MPa ; $\tau_{x1y1} = 41{,}4$ MPa.

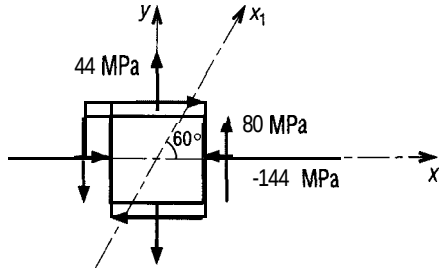


Fig. 41

❑ Reprendre l'exercice 1 avec $\sigma_x = 100$ MPa ; $\sigma_y = -60$ MPa ; $\tau_{xy} = -32$ MPa et $\theta = -30"$.

Réponse

$\sigma_{x1} = 88$ MPa ; $\sigma_{y1} = -48$ MPa ; $\tau_{x1y1} = 54$ MPa.

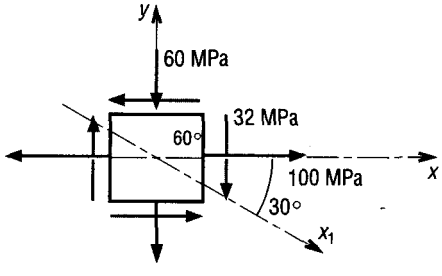


Fig. 42

❑ Reprendre l'exercice 1 avec $\sigma_x = 35$ MPa ; $\sigma_y = 20$ MPa ; $\tau_{xy} = 0$ et $\theta = 50"$.

4 Un élément en contrainte plane est tourné de $\theta = 30$. Les contraintes exercées sont $\sigma_{x1} = -107$ MPa ; $\sigma_{y1} = -31$ MPa et $\tau_{x1y1} = 18$ MPa.

Déterminer les contraintes exercées sur l'élément dans les directions x et y.

Réponse

$\sigma_x = -103{,}5$ MPa ; $\sigma_y = -35$ MPa ; $\tau_{xy} = -24$MPa.

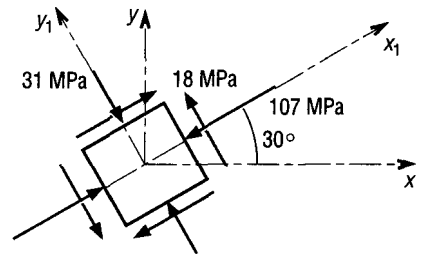


Fig. 43

5 Le point A d'un composant mécanique est soumis au système de contraintes planes σ_x = 20 MPa ; σ_y = 0 et τ_{xy} = 3 MPa. Déterminer des contraintes principales sur l'élément et la direction θ_p.

Réponse

a, = 20,4 MPa ; σ_2 = – 0,44 MPa ; θ_p = 8,35°.

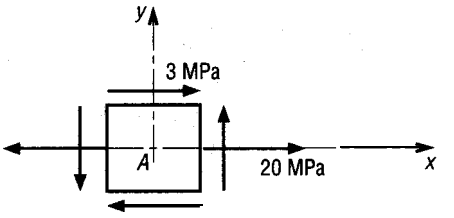


Fig. 44

❑ Reprendre l'exercice 5 avec σ_x = – 20 MPa ; σ_y = 90 MPa ; τ_{xy} = 60 MPa. Déterminer également la contrainte de cisaillement maximale.

Réponse

σ_1 = 116 MPa ; σ_2 = 46,4 MPa ; θ_p = 66,3° ; σ_{moy} = 35 MPa ; τ_{maxi} = 81,4 MPa ; θ_c = 21,3°.

7 Les contraintes exercées au point critique A d'un composant mécanique en alliage d'aluminium sont σ_x = 60 MPa ; σ_y = 120 Mpa et τ_{xy} = 40 MPa. Déterminer les contraintes principales, la contrainte de cisaillement maximale et la contrainte de csaillement absolue.

Réponse

σ_1 = 140 ; σ_2 = 40 ; τ_{maxi} = 50 ; τ_{maxi} (abs) = 70 Mpa.

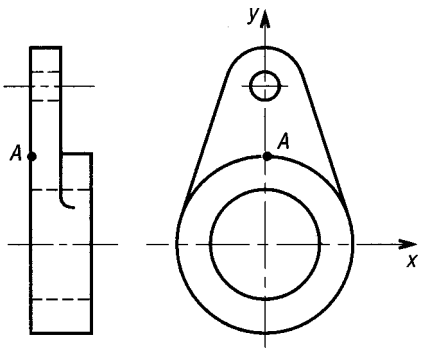


Fig. 45

l

8 Déterminer les contraintes principales résultant de la superposition des deux états de contraintes planes indiqués.

Réponse

σ_1 = 337,2 MPa ; σ_2 = 12,8 MPa ; θ_p = 33,8°.

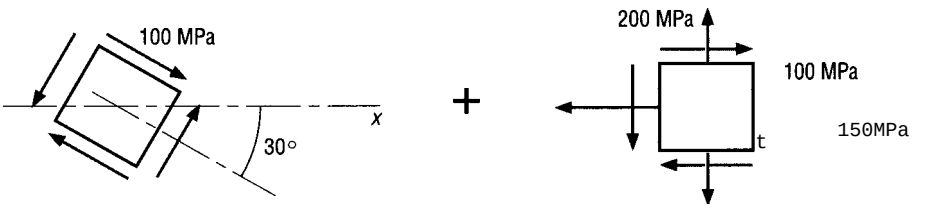


Fig. 46

9 Tracer le tricercle de Mohr correspondant aux contraintes triaxiales : σ_1 = 60 MPa ; σ_2 = – 60 MPa ; σ_3 = 30 MPa. En déduire la contrainte de cisaillement absolue.

Réponse.

τ_{maxi} = 60 MPa.

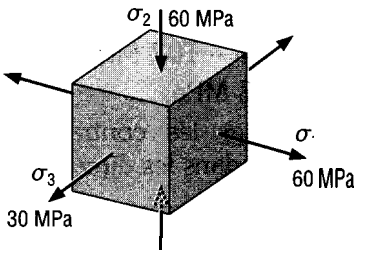


Fig. 47

10 Pour 1a poutre encastrée proposée, déterminer les contraintes principales et la contrainte- de cisaillement maximale en A et B si F = 25 kN et tan a = 4/3.

Réponse

en A ; σ_1 = 13,7 MPa ; σ_2 = 0 ; τ_{maxi} = 6,83 MPa.
en B ; σ_1 = 0 ; σ_2 = – 13,0 MPa ; τ_{maxi} = 6,50 MPa.

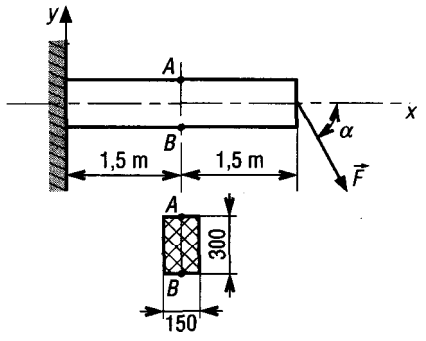


Fig. 48

❑ Au moment du desserrage, une tête de vis supporte un couple M de 40 Nm et une charge F de 200 N en C. La tige est encastrée en 0 dans un bâti (L = 50 mm et d = 12 mm). Déterminer les contraintes principales et la contrainte de cisaillement maximale aux points A et B de la tige.

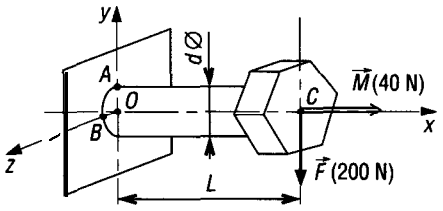


Fig. 49

12 Une cuve de compresseur, diamètre 1,2 m, épaisseur constante 20 mm, avec deux fonds hémisphériques, supporte une pression intérieure de 2 MPa (20 bars).
a) Déterminer la contrainte de cisaillement maximale dans les fonds.
b) Déterminer les contraintes normales exercées parallèlement et perpendiculairement aux cordons de soudure.

Réponse

τ_{maxi} = 16 MPa ; σ_x = 30MPa; σ_y = 60MPa.

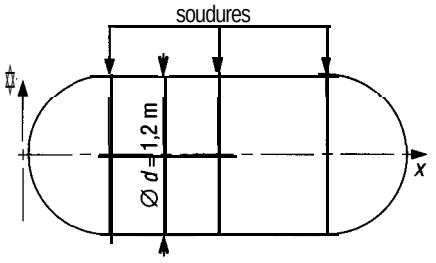


Fig. 50

❑ Reprendre l'exercice 12. La contrainte normale admissible de l'acier du compresseur est de 100 MPa, celle du cordon (parallèlement à sa direction) de 80 MPa. Déterminer l'épaisseur e requise pour la paroi.

14 Un réservoir cylindrique, diamètre 600 mm, épaisseur 5 mm, supporte une pression intérieure de 4 MPa (40 bars). La partie cylindrique est réalisée à partir d'une tôle d'acier soudée en hélice (a = 65”).
Déterminer la contrainte normale exercée perpendiculairement au cordon et la contrainte de cisaillement parallèlement au cordon.

Réponse

σ = 139,1 MPa ; τ = 45.2 MPa.

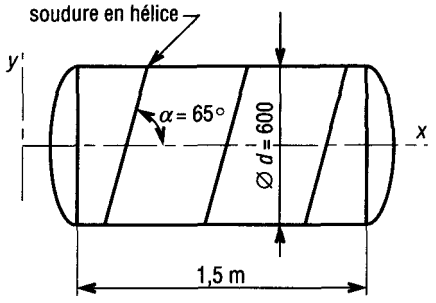


Fig. 51

❑ Reprendre l'exercice 14, a = 75“ ; d = 1 000 mm ; e = 15 mm ; pression de 1,6 MPa (16 bars). Déterminer la contrainte de cisaillement maximale dans la partie cylindrique, la contrainte de cisaillement absolue et les contraintes dans le cordon.

Réponse

τ = 13 MPa ; τ_o = 27,5 MPa ; σ_{x1} = 28,5 MPa ; τ_{x1y1} = 6,7 MPa.

❑ Une poutre cylindrique de diamètre d supporte une charge de tension F = 200 kN et un couple de torsion M. Si la limite élastique en traction du matériau est R_e = 250 MPa, déterminer la valeur du couple M à partir du critère de Tresca.

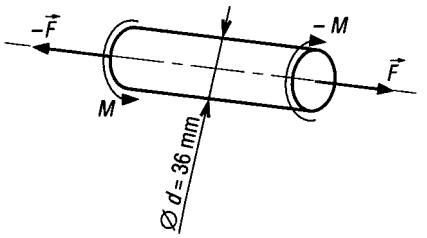


Fig. 52

Réponse

708 Nm.

17 Reprendre l'exercice 16 avec le critère de Von Mises.

❑ Les contraintes relevées en un point critique d'un composant mécanique sont σ_x = 40 MPa ; σ_y = 150 MPa et τ_{xy} = 50 MPa. Le composant est en acier moulé, R_e = 300 MPa. Déterminer le coefficient de sécurité adopté : a) avec le critère de Tresa ; b) avec le critère de Von Mises.

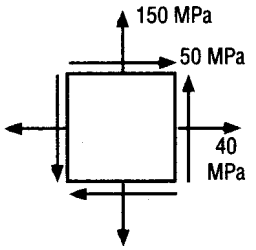


Fig. 53

Réponse

1,772 ; 1,875.

❑ Les contraintes mesurées expérimentalement au point critique d'une pièce moulée en aluminium sont σ_x = 0 ; σ_y = – 100 MPa ; τ_{xy} = – 80 MPa. La résistance à la rupture en compression est R_{rc} = 220 MPa et celle en traction R_{rt} = 100 MPa. En utiliit le critère de Mohr, déterminer s'il y a ou non risque de rupture.

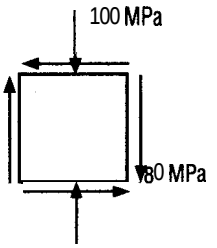


Fig. 54

Réponse

pas de rupture.

❑ Reprendre l'exercice 21 avec σ_x = – 40 MPa ; σ_y = 80 MPa ; τ_{xy} = 40 MPa.

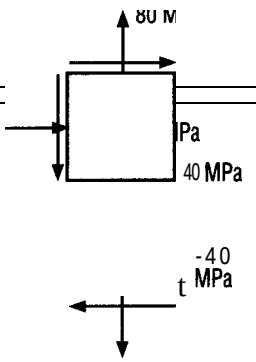


Fig. 55

32 ANALYSE DES DÉFORMATIONS

OBJECTIFS

- Développer la notion de déformations planes : équations, déformations principales, cercle de Mohr, etc.
- Indiquer la différence entre contraintes planes et déformations planes.
- Développer le cas des jauges de contraintes.
- Donner la loi de Hooke généralisée.

L'analyse des déformations en un point d'une structure ou d'un objet et leurs méthodes de transformation sont analogues à celles des contraintes du chapitre précédent. Les relations établies sont particulièrement utiles aux études expérimentales à partir des jauges de contraintes. En effet, les jauges étant orientées et collées dans des directions données, il est souvent nécessaire de transformer et manipuler les résultats obtenus.

1 • Analyse des déformations planes

Dans le cas le plusgénéral, les déformations en un point d'une structure exigent la combinaison de six paramètres : trois allongements relatifs (ε_x, ε_y, ε_z) du même type que celui défini en traction ($\varepsilon = \Delta L/L$) et trois angles de glissement ou trois glissements (γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}) du même type que celui défini dans le cours sur le cisaillement.
Expérimentalement, l'emploi des jauges de contraintes permet de déterminer les déformations (ε) dans des directions particulières. Afin d'analyser et de concevoir, les ingénieurs et les techniciens doivent souvent transformer les valeurs mesurées pour obtenir les déformations dans d'autres directions. Ce processus de transformation est décrit au paragraphe 1 dans le cas des déformations planes, où l'on ne prend en compte que les éléments ε_x, ε_y et γ_{xy}.

Remarque : bien que les contraintes planes (σ_x, σ_y, τ_{xy}) et les déformations planes utilisent les unes et les autres trois composantes agissant dans le même plan, l'une n'entraîne pas nécessairement l'autre et inversement (fig. **12)**. Ceci résulte de l'effet de Poisson décrit par la figure 1. Une contrainte σ_x dans la direction x entraîne non seulement l'allongement ε_x mais aussi les contractions $\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$ et $\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$ (v = coefficient de Poisson). À l'inverse, une déformation plane ε_x exige une contrainte σ_x qui entraîne à son tour des contractions ε_y et ε_z (Poisson). Pour obtenir $\varepsilon_z = 0$ et un état de

déformation plane, il sera nécessaire d'appliquer une contrainte σ_z supplémentaire pour annuler les effets de σ_x sur z. À noter que les glissements et les contraintes de cisaillement ne sont pas affectés par le coefficient de Poisson et $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ implique $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

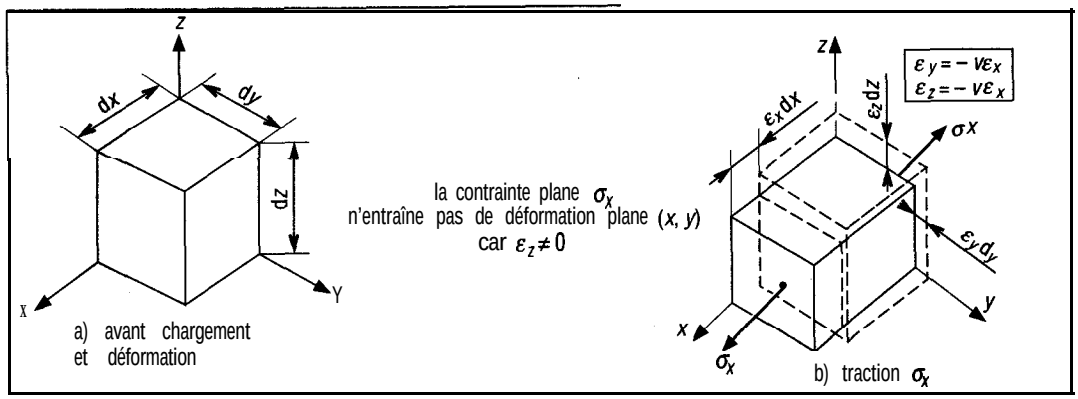
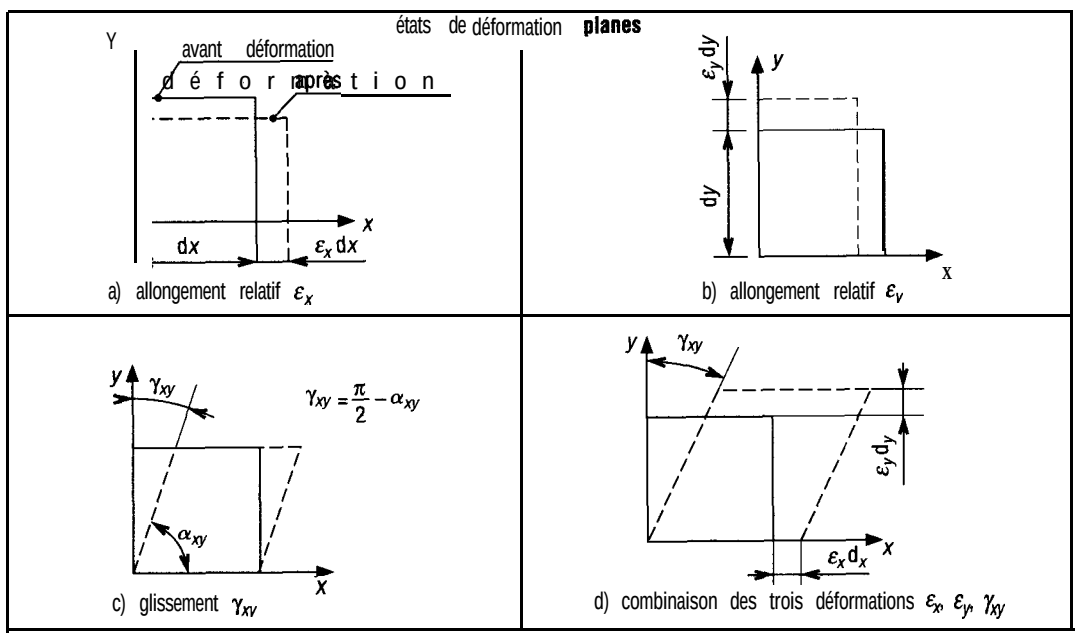


Fig. 1



'ïg. 2

1. Équations de transformations

ε_x, ε_y, γ_{xy} étant connus dans les directions (x, y), les équations de transformations permettent de déterminer ε_{x1}, ε_{y1} et γ_{x1y1} dans les directions (x_1, y_1) inclinées de l'angle θ par rapport à (x, y).

La démarche et la méthode de détermination est la même qu'en contraintes planes : σ_x est remplacé par ε_x, σ_y par ε_y et τ_{xy} par $1/2\ \gamma_{xy}$.

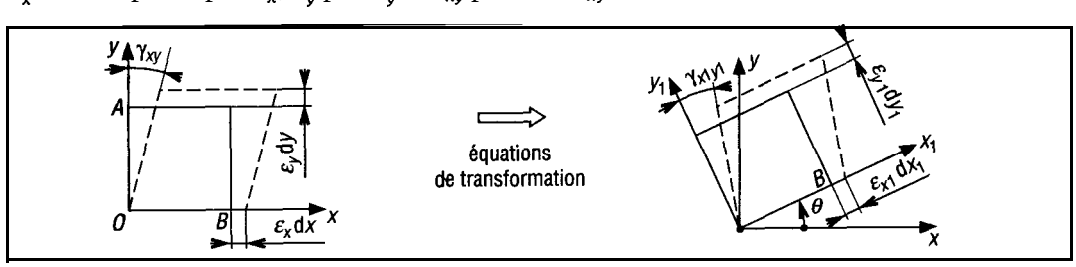


Fig. 3

$$\varepsilon_{x1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta \qquad (1)$$

$$\frac{\gamma_{x1y1}}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta \qquad (2)$$

Si dans l'équation (1) on remplace θ par $\theta + \pi/2$ (ou $\theta + 90°$), on obtient ε_{y1} :

$$\varepsilon_{y1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta \qquad (3)$$

Remarque : si on ajoute membre à membre les équations (1) et (3), on obtient :

$$\varepsilon_{x1} + \varepsilon_{y1} = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

Convention de signe

ε_x et ε_y sont positives si elles engendrent des allongements suivant x et y. γ_{xy} est positif si l'angle AOB devient plus petit que 90". Ces conventions sont en correspondance avec les conventions de signe des contraintes ($\sigma_x > 0$ entraîne un allongement, etc.).

2, Déformations principales

Comme pour les contraintes planes, il existe une direction θ_p pour laquelle $\gamma_{xy} = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_{maxi}$ et $\varepsilon_2 = \varepsilon_{mini}$. Les relations sont analogues :

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad \text{en posant:} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{maxi} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + R$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{mini} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - R$$

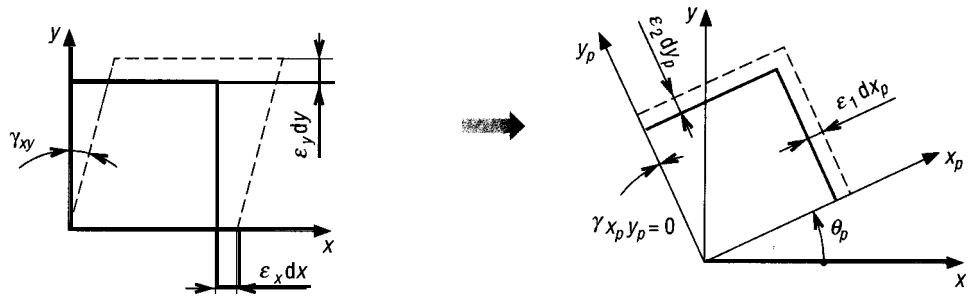


Fig. 4

Remarque : les relations précédentes supposent des matériaux isotropes.

3. Glissement maximal

Même démarche que pour la contrainte de cisaillement maximale, γ_{xy} est maximal pour

$$\theta = \theta_c = \theta_p \pm 45°$$

$$\tan 2\theta_c = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_{xy}}$$

$$\frac{\gamma_{maxi}}{2} = R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

4. Cercle de Mohr des déformations

Encore une fois, même démarche que pour le cercle de Mohr des contraintes.

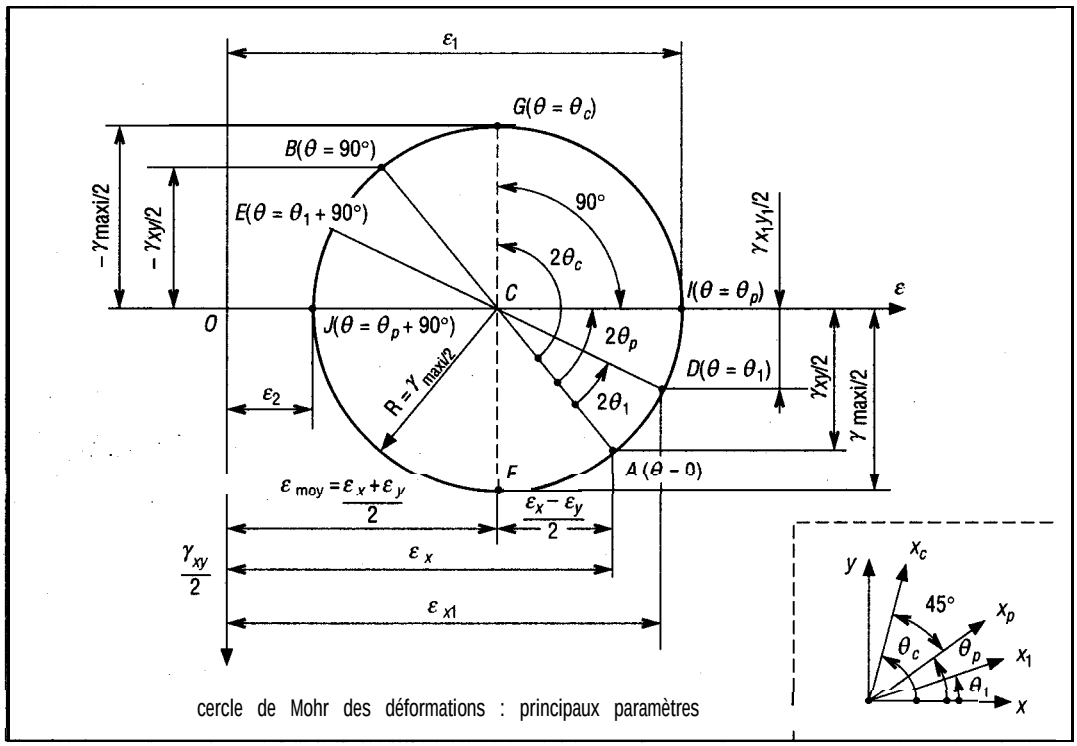


Fig. 5

Les déformations ε_x, ε_y et γ_{xy} apparaissent en A et B.
C le centre du cercle est situé à la distance OC = $(\varepsilon_x + \varepsilon_y)/2$.
Les déformations dans une direction quelconque x_1 $(\theta = \theta_1)$ apparaissent en D et E.
L'axe ε est orienté positivement vers la droite et l'axe $\gamma_{xy/2}$ positivement vers le bas. Il en résulte que les sens des rotations $2\theta_1$, $2\theta_p$ et $2\theta_c$ sont les mêmes que ceux θ_1, θ_p et θ_c de la figure initiale.

Les déformations principales apparaissent en I et J et correspondent aux points d'intersection entre le cercle et l'axe ε. Pour ces points $\gamma_{xy} = 0$.

Le glissement maximal apparaît en G $(\theta = \theta_p + 45° ; \gamma_{xy/2} = -\gamma_{maxi/2})$

et en F $(\theta = \theta_p - 45° ; \gamma_{xy}/_2 = \gamma_{maxi/2})$.

5. Exemple

Un élément de machine supporte en un point les déformations planes suivantes :

ε_x = 500 x 10^{-6} ; ε_y = 100 x 10^{-6}

γ_{xy} = 200 x 10^{-6}

a) Déterminer les déformations dans la direction x_1 à 30".

b) Déterminer les déformations principales.

c) Tracer le cercle de Mohr des déformations.

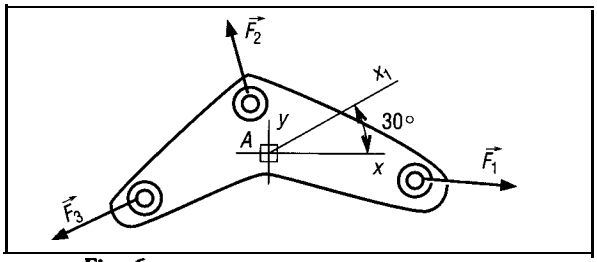


Fig. 6

Résolution

$$\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{(500 + 100)\text{x } 10^{-6}}{2} = 300 \times 10^{-6}$$

$$\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \frac{(500 - 100) \times 10^{-6}}{2} = 200 \times 10^{-6}$$

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{200 \text{x} 2\ 10^{-6}}{} = 100 \times 10^{-6}$$

a) Déformations dans la direction x_1

ε_{x1} = 300 x 10^{-6} + 200 x 10^{-6} cos 60" + 100 x 10^{-6} x sin 60" = 486.6 X 10^{-6}

ε_{y1} = 300 x 10^{-6} – 200 x 10^{-6} cos 60" – 100 x 10^{-6} X sin 60" = 113,4 X 10^{-6}

$\frac{\gamma_{x1y1}}{2}$ = – 200 x 10^{-6} sin 60" + 100 x 10^{-6} cos 60" = – 123,2 X 10^{-6}

γ_{x1y1} = – 246,4 x 16

Remarque : $\varepsilon_x + \varepsilon_y$ = 600 x 10^{-6} = $\varepsilon_{x1} + \varepsilon_{y1}$ = (486,4 + 113,4) x 10^{-6}

b) Déformations principales

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{200 \times 10^{-6}}{(500 - 100) \times 10^{-6}} = 0{,}5 \text{ et } \theta_p = 13{,}3° \text{ et } 103{,}3°$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(200 \times 10^{-6}\right)^2 + \left(100 \times 10^{-6}\right)^2} = 224 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + R = \left(300 \times 10^{-6}\right) + \left(224 \times 10^{-6}\right) = 524 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - R = \left(300 \times 10^{-6}\right) - \left(224 \times 10^{-6}\right) = 76 \times 10^{-6}$$

$$\frac{\gamma_{maxi}}{2} = R = 224 \times 10^{-6} \text{ et } \gamma_{maxi} = 448 \times 10^{-6}$$

c) Cercle de Mohr des déformations

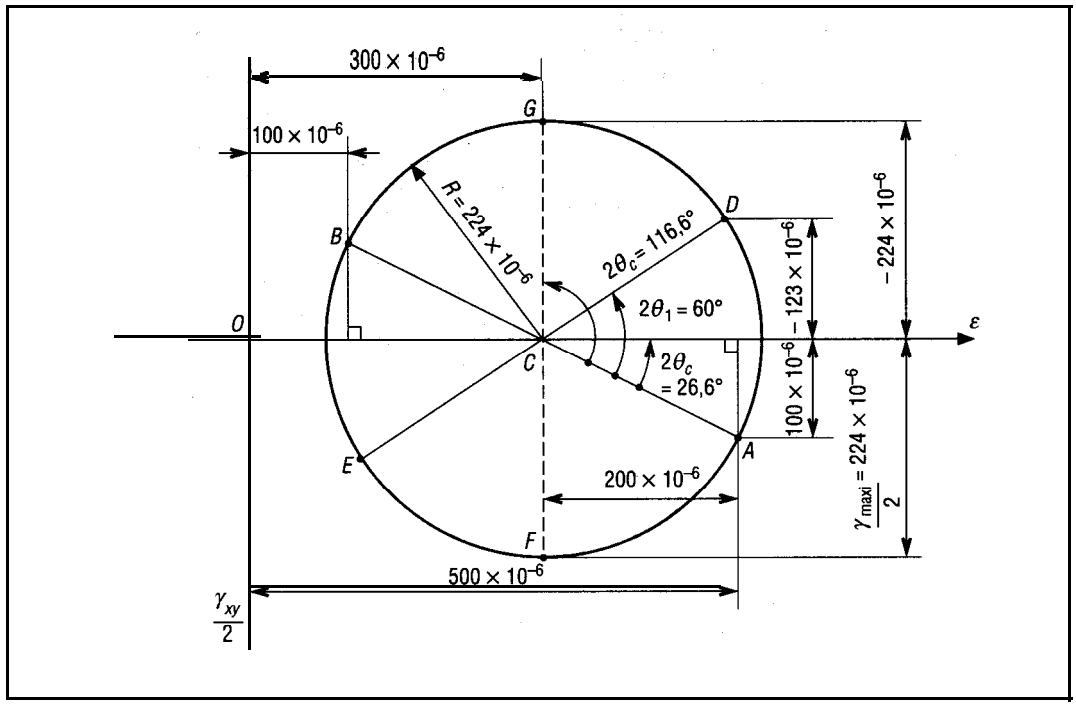
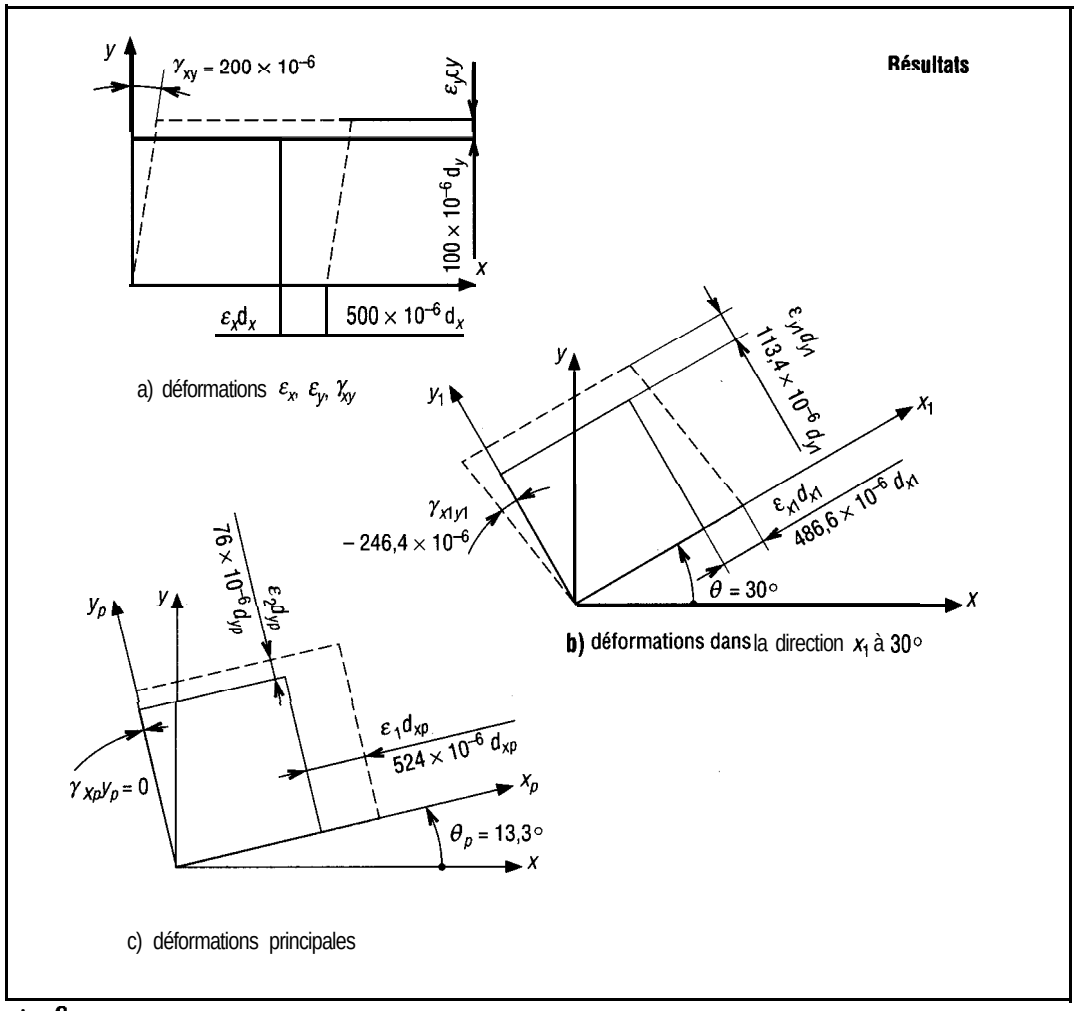


Fig. 7



ig. 8

II - Jauges de contraintes

La mesure des déformations en un point (M) est généralement réalisée par un ensemble de trois jauges (A, B, C) encore appelé « rosette ». Les jauges sont collées sur la surface (libre) de la structure ou de l'objet et, sous charge, suivent les déformations de celui-ci. Les déformations mesurées sont uniquement celles du plan des jauges. S'il n'y a pas de contraintes en surface (pression superficielle, etc.), les jauges supportent un état de contraintes planes et non pas un état de déformations planes (voir différences, fig. **12**). De plus, la normale (ou la perpendiculaire) à la surface est axe principal de déformations. Si les jauges ne mesurent pas les déformations selon cet axe, néanmoins ces déformations n'affectent pas celles réalisées dans le plan des jauges.

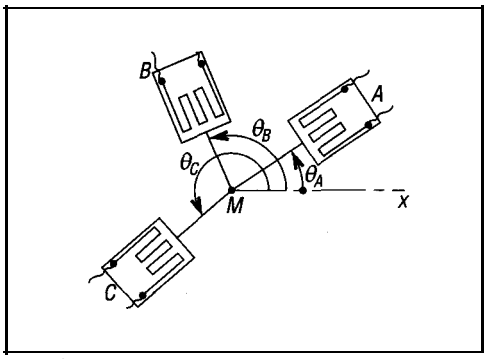


Fig. 9

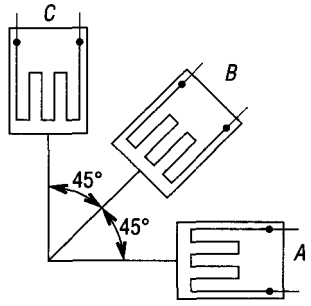
Dans le cas général, les jauges sont orientées dans trois directions définies par les angles θ_A, θ_B, θ_C et permettent de mesurer les déformations ε_A, ε_B, ε_C suivant ces directions. À partir de ces valeurs et des équations de transformations du paragraphe II, il est possible d'obtenir les déformations ε_x, ε_y et γ_{xy} et les déformations principales au point M. On obtient :

$$\varepsilon_A = \varepsilon_x \cos^2 \theta_A + \varepsilon_y \sin^2 \theta_A + \gamma_{xy} \sin \theta_A \cos \theta_A \qquad (1)$$

$$\varepsilon_B = \varepsilon_x \cos^2 \theta_B + \varepsilon_y \sin^2 \theta_B + \gamma_{xy} \sin \theta_B \cos \theta_B \qquad (2)$$

$$\varepsilon_C = \varepsilon_x \cos^2 \theta_C + \varepsilon_y \sin^2 \theta_C + \gamma_{xy} \sin \theta_C \cos \theta_C \qquad (3)$$

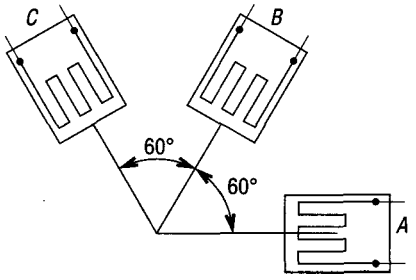
Les valeurs de ε_x, ε_y et ε_z sont obtenues en résolvant le système de trois équations (1), (2) et (3) à trois inconnues. Les jauges sont souvent collées dans des directions à 45" ou à 60°, ce qui simplifie les équations précédentes (fig. **10**).



a) Rosette à 45"

$\varepsilon_x = \varepsilon_A ; \varepsilon_y = \varepsilon_C$

$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_B - (\varepsilon_A + \varepsilon_C)$



b) Rosette à 60"

$\varepsilon_x = \varepsilon_A ; \varepsilon_y = \frac{1}{3}(2\varepsilon_B + 2\varepsilon_C - \varepsilon_A)$

$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_B - \varepsilon_C)$

Fig. 10

Remarque : si les directions principales sont connues (symétrie, etc.), deux jauges orientées suivant ces directions suffisent pour les déterminations.

Exemple

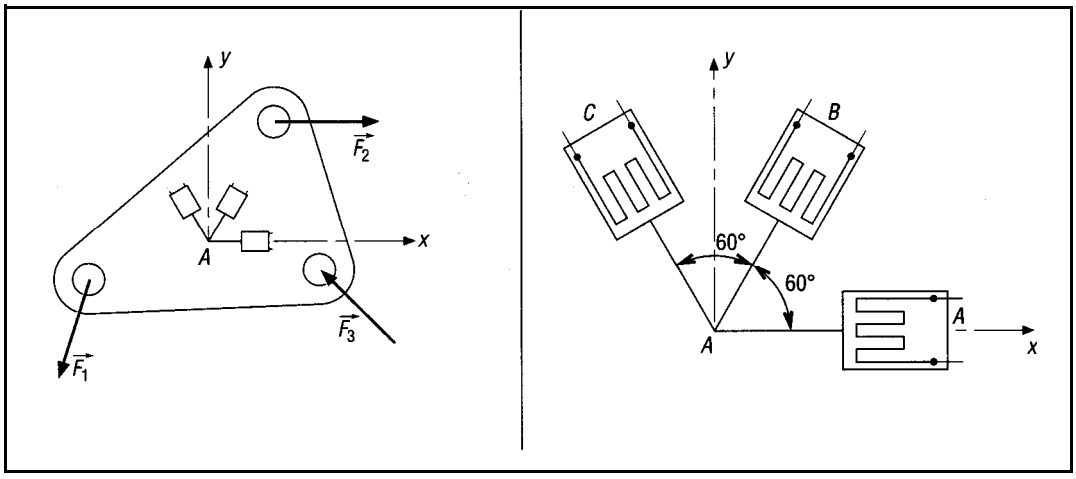


Fig. **11**

Sous charges (F_1, F_2, F_3), on mesure les déformations en un point A d'un composant mécanique par l'intermédiaire d'une rosette à 60". Déterminer ε_x, ε_y, ε_z et les déformations principales ε_1 et ε_2 si :
ε_A = 120 x 10^{-6} ; ε_B = 260 x 10^{-6} ; ε_C = 400 x 10^{-6}.

Résolution

$$\varepsilon_x = \varepsilon_A = 120\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{3}\left(2\varepsilon_B + 2\varepsilon_C - \varepsilon_A\right) = \frac{1}{3}\left(2\times260 + 400\times2 - 120\right)\times10^{-6} = 400\times10^{-6}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(260-400\right)\times10^{-6} = -162\times10^{-6}$$

Déformations principales

$$R = \left[\sqrt{\left(\frac{120-400}{2}\right)^2 + \left(\frac{162}{2}\right)^2}\right]\times10^{-6} = 162\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + R = \frac{(120+400)\times10^{-6}}{2} + 162\text{x } 10^{-6} = 422\text{x } 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - R = \frac{(120+400)\times10^{-6}}{2} - 162\text{x } 10^{-6} = 98 \text{ x } 10^{-6}$$

III - Relations entre contraintes et déformations

Les relations de ce paragraphe supposent des matériaux homogènes, isotropes et se déformant de manière linéairement élastique.

1. Loi de Hooke généralisée

Soit un point d'un matériau supportant un état de contrainte triaxial σ_x, σ_y, σ_z, engendrant les déformations ε_x, ε_y, ε_z. Les contraintes sont liées aux déformations par la loi de Hooke ($\sigma = E\varepsilon$ en traction) et le coefficient de Poisson v tel que $\varepsilon_{\text{latérale}} = -v\varepsilon_{\text{longitudinale}}$.

En superposant les trois états de contraintes, on obtient la loi de Hooke généralisée :

$$\varepsilon_x = 1/E\,[\sigma_x - \nu\,(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = 1/E\,[\sigma_y - \nu\,(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = 1/E\,[\sigma_z - \nu\,(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}\ ;\ \tau_{xz} = G\gamma_{xz}\ ;\ \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

Remarque 1 : à partir des équations précédentes, on peut exprimer σ_x, σ_y et σ_z en fonction ε_x, ε_y et ε_z.

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\,\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\,\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_z + \varepsilon_x)\right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\,\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right]$$

Remarque 2 : les trois constantes caractéristiques du matériau E (module d'élasticité longitudinal), G (module d'élasticité transversal) et v (coefficient de Poisson) sont liées par la relation : $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

Exemple : reprenons l'exemple du paragraphe II avec E = 200 GPa, v = 0,3 et déterminons les contraintes principales en A.

Résolution : au point A, la contrainte σ_z normale à la surface est nulle (pas de pression superficielle, etc.) ; les contraintes exercées sont des contraintes planes. Appliquons la loi de Hooke généralisée dans ce cas avec $\sigma_z = \sigma_3 = 0$.

Les déformations principales obtenues étaient :

ε_1 = 422 x 10^{-6} et ε_2 = 98 x 10^{-6}

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + 0\right)\right]$$

$$422\text{x}\ 10^{-6} = \left(\frac{1}{200\times 10^9\ \text{Pa}}\right)(4 - 0{,}3\,\sigma_2) \qquad (1)$$

$$84{,}4\text{x}\ 10^{6} = \sigma_1 - 0{,}3\,\sigma_2$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu\left(\sigma_1 + 0\right)\right]$$

$$98\text{x}\ 10^{-6} = \left(\frac{1}{200\times 10^9\ \text{Pa}}\right)\left(\sigma_2 - 0{,}3\,\sigma_1\right) \qquad (2)$$

$$19{,}6\text{x}\ 10^{6} = \sigma_2 - 0{,}3\,\sigma_1$$

La résolution des équations (1) et (2) donne : σ_1 = 99,2 MPa et σ_2 = 49,5 MPa.

Remarque : ces résultats auraient pu être obtenus à partir de $\varepsilon_x = 120 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_y = 400 \times 10^{-6}$ et $\gamma_{xy} = -162 \times 10^{-6}$.
À partir de ces valeurs, on obtient $\sigma_x = 52{,}8$ MPa et $\sigma_y = 95{,}9$ MPa en utilisant les équations de la remarque 1.
$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 76{,}9 \times 10^9$ Pa $\times (-162 \times 10^{-6}) = -12{,}46$ MPa
en remarquant que :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200 \times 10^9}{2(1+0{,}3)} = 76{,}9 \times 10^9 \text{ Pa}$$

Ayant σ_x, σ_y et τ_{xy}, on obtient les contraintes principales σ_1 et σ_2 par la méthode décrite au chapitre précédent :

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{52{,}8 - 95{,}9}{2}\right)^2 + 12{,}42^2} = 24{,}87 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R = \frac{52{,}8 + 95{,}9}{2} + 24{,}87 = 99{,}2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R = \frac{52{,}8 + 95{,}9}{2} - 24{,}87 = 49{,}5 \text{ MPa}$$

2, Comparaison de l'état de contraintes planes et de l'état de déformations planes

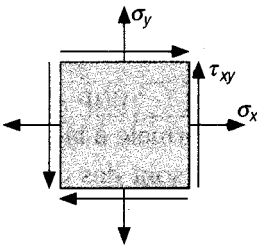
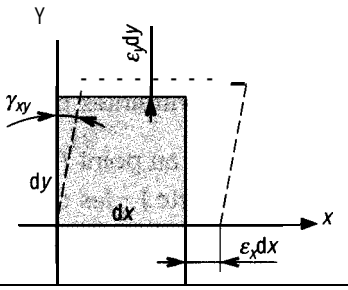
État	Contraintes planes	Déformations planes
		
Contraintes	$\sigma_z = 0$; $\tau_{xz} = 0$; $\tau_{yz} = 0$ $\sigma_x \neq 0$; $\sigma_y \neq 0$; $\tau_{xy} \neq 0$	$\tau_{xz} = 0$; $\tau_{yz} = 0$ $\sigma_x \neq 0$; $\sigma_y \neq 0$; $\sigma_z \neq 0$; $\tau_{xy} \neq 0$
Déformations	$\gamma_{xz} = 0$; $\gamma_{yz} = 0$ $\varepsilon_x \neq 0$; $\varepsilon_y \neq 0$; $\varepsilon_z \neq 0$ $\gamma_{xy} \neq 0$	$\varepsilon_z = 0$; $\gamma_{xy} = 0$; $\gamma_{yz} = 0$ $\varepsilon_x \neq 0$; $\varepsilon_y \neq 0$; $\gamma_{xy} \neq 0$
Valeurs avec loi de Hooke généralisée	$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$ $\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$ $\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$ $\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$ $\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$ $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$	$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y]$ $\varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x]$ $\sigma_x = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y]$ $\sigma_y = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x]$ $\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ $\tau_{xy} = \theta\gamma_{xy}$

Fig. 12

EXERCICES À RÉSOUDRE

1 Un point d'une structure a un état de déformation plane caractérisé par : $\varepsilon_x = 500 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_y = -300 \times 10^{6}$; $\gamma_{xy} = 200 \times 10^{-6}$. Déterminer les déformations dans la direction x_1 à 30".

Réponse

$\varepsilon_{x1} = 387 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_{y1} = -187 \times 10^{-6}$; $\gamma_{x1y1} = 592 \times 10^{-6}$.

2 Un point d'une structure supporte un état de déformation plane caractérisé par $\varepsilon_x = 350 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_y = 200 \times 10^{-6}$ et $\gamma_{xy} = 80 \times 10^{-6}$. Déterminer les déformations principales, le glissement maximal et les directions correspondantes.

Réponse

$\varepsilon_1 = 360 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_2 = 190 \times 10^{-6}$; $\theta_p = 14{,}03°$; $\gamma_{maxi} = 170 \times 10^{-6}$; $\theta_c = 59{,}03°$.

3 Au point M d'une structure, on colle une rosette delta (rosette à 60"). Les mesures sont :
$\varepsilon_A = 120 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_B = 270 \times 10^{-6}$ et $\varepsilon_C = 528 \times 10^{-6}$.
a) Déterminer les déformations principales.
b) Déterminer les contraintes principales en M si la structure est en acier ($E = 200$ GPa ; $\nu = 0{,}3$).

Réponse

$\varepsilon_1 = 544 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_2 = 68 \times 10^{-6}$; $\theta_p = 19{,}3°$;
$\sigma_1 = 124$ MPa ; $\sigma_2 = 51$MPa.

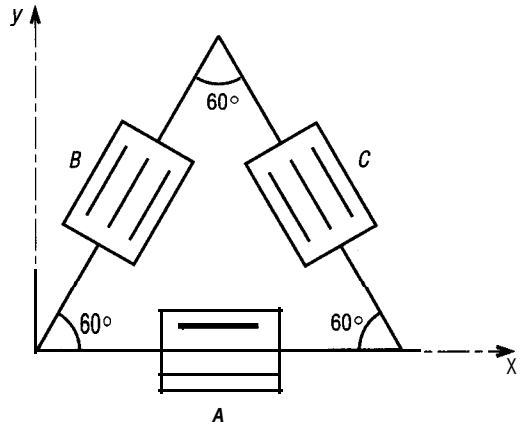


Fig. 13

❑ Une rosette à 45" est collée en 1 sur un bras de renvoi. Sous charge, les mesures expérimentales donnent :
$\varepsilon_A = 400 \times 10^{-6}$
$\varepsilon_B = 260 \times 10^{-6}$
$\varepsilon_C = -225 \times 10^{-6}$
Déterminer les déformations principales et le glissement maximal.

Réponse

$\varepsilon_1 = 445 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_2 = -270 \times 10^{-6}$;
$\gamma_{maxi} = 714 \times 10^{-6}$.

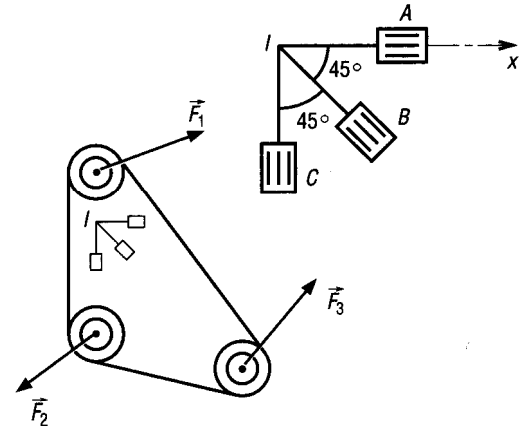


Fig. 14

❑ Au point M d'une clé, on mesure les déformations à l'aide d'une rosette à 60" :

$\varepsilon_A = -78 \times 10^{-6}$

$\varepsilon_B = 40 \times 10^{-6}$

$\varepsilon_C = 50 \times 10^{-6}$

Déterminer les déformations principales et le glissement maximal en ce point.

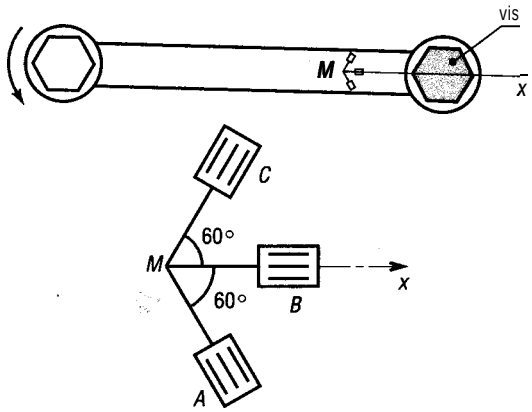


Fig. 15

Réponse

$\varepsilon_1 = 86{,}2 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_2 = -78{,}2 \times 10^{-6}$; $\theta_p = -58°$; $\gamma_{maxi} = 164 \times 10^{-6}$ avec $\varepsilon_{moyen} = 40 \times 10^{-6}$ et $\theta_c = -13°$.

❑ Deux jauges A et B sont collées à la périphérie d'un arbre de transmission (diamètre d = 80 mm) dans des directions à 45".

Si les mesures sont $\varepsilon_A = 250 \times 10^{-6}$ et $\varepsilon_B = -250 \times 10^{-6}$, déterminer le couple M transmis si l'arbre est en acier (E = 200 GPa ; v = 0,3).

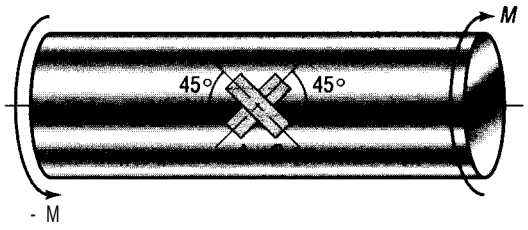


Fig. 16

❑ Reprendre l'exercice 6 avec un arbre de diamètre 50 mm, une seule jauge (A) collée dans une direction à 25" indiquant $\varepsilon_A = 300 \times 10^{-6}$.

❑ Une cuve de compresseur d'épaisseur mince e = 8 mm et de rayon intérieur 400 mm supporte une pression intérieure p = 20 bars.

Déterminer les déformations longitudinales (ε_x) et circonférentielles (ε_y).

La cuve est en acier ($E = 200$ GPa, $\nu = 0{,}3$). En déduire le glissement maximal.

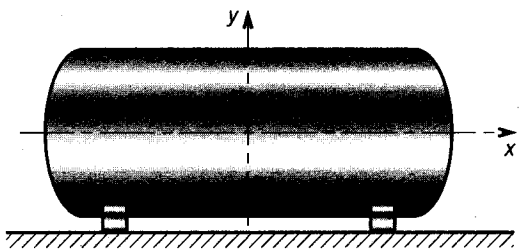


Fig. 17

Réponse

$\varepsilon_x = \frac{pr}{2eE}(1 - 2\nu) = 100 \times 10^{-6}$;

$\varepsilon_y = \frac{pr}{2eE}(2 - \nu) = 425 \times 10^{-6}$;

$\gamma_{maxi} = -\frac{Pr}{2eE}(1 + \nu) = -325 \times 10^{-6}$.

❑ Reprendre l'exercice 8 avec une cuve sphérique. En déduire l'allongement du diamètre Ad.

Réponse

$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon = \frac{Pr}{2eE}(1 - \nu) = 175 \times 10^{-6}$; $\Delta d = 0{,}14$ mm ; $\gamma_{maxi} = 0$.

33 GÉNÉRALITÉS STATIQUE DES FLUIDES

OBJECTIFS

- Définir la mécanique des fluides.
- Introduire les notions de masse volumique, de densité, de viscosités cinématique et dynamique.
- Indiquer les principales familles de fluides.
- Développer les propriétés et les principaux théorèmes de la statique des fluides : théorème de Pascal, relation entre pression et profondeur, poussée d'archimède, forces de pression exercées sur une paroi plane.

La mécanique des fluides est la branche de la mécanique qui étudie le comportement des fluides au repos ou en mouvement.

Ses résultats sont indispensables à la plupart des industries (aéronautique, automobile, hydraulique, chimie.. .). De la même manière que le sang; les veines et le cœur sont à l'origine de la vie, le transport et la circulation des fluides sont à l'origine de nombreux processus et de nombreuses réalisations.

Il existe deux familles principales de fluides : les liquides (y compris les poudres ou produits pulvérulents) et les gaz. Les liquides ont la propriété d'être incompressibles, alors que les gaz sont compressibles.

L'étude des fluides se divise en deux parties : l'étude des fluides compressibles et l'étude des fluides incompressibles, comprenant notamment I'hydraulique.

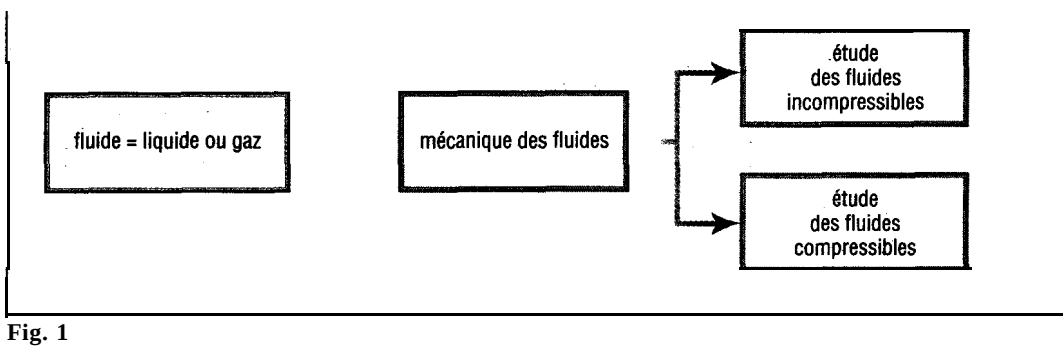


Fig. 1

I - Généralités

1. Masse volumique ρ (lire rhô)

C'est la masse de l'unité de volume. L'unité est le kilogramme par mètre cube $(kg.m^{-3})$.
Exemples : pour l'eau ρ = 1 000 $kg.m^{-3}$; pour l'air ρ = 1,293 $kg.m^{-3}$.

2. Densité d

$$d = \frac{\text{masse volumique d'un corps}}{\text{masse volumique} \begin{cases} \text{de l'eau (liquides ou solides)} \\ \text{de l'air (pour les gaz)} \end{cases}} = \text{un nombre sans dimension}$$

Exemple : huile minérale = 920 $kg.m^{-3}$, densité correspondante d = 0,92.

3. La viscosité

C'est une propriété importante. Elle caractérise les frottements internes ou intermoléculaires à l'intérieur du fluide, autrement dit sa capacité à s'écouler.
La propriété inverse est la fluidité. La température a une grande influence sur la viscosité des fluides. Celle-ci diminue lorsque la température augmente.

a) Viscosité cinématique v (lire nu).
Elle est déterminée, pour les liquides, en mesurant à une température donnée la durée d'écoulement d'un volume connu de liquide à travers un appareil comportant un orifice (tube capillaire) de dimensions normalisées. L'unité est le mètre carré par seconde $(m^2.s^{-1})$.

1 st = 1 stoke = 10^{-4} $m^2.s^{-1}$ = 100 cst

b) Viscosité dynamique μ (lire mu)
Elle caractérise l'aptitude des couches de fluide à glisser les unes sur les autres (comparable au frottement existant entre les surfaces planes de deux solides en contact).

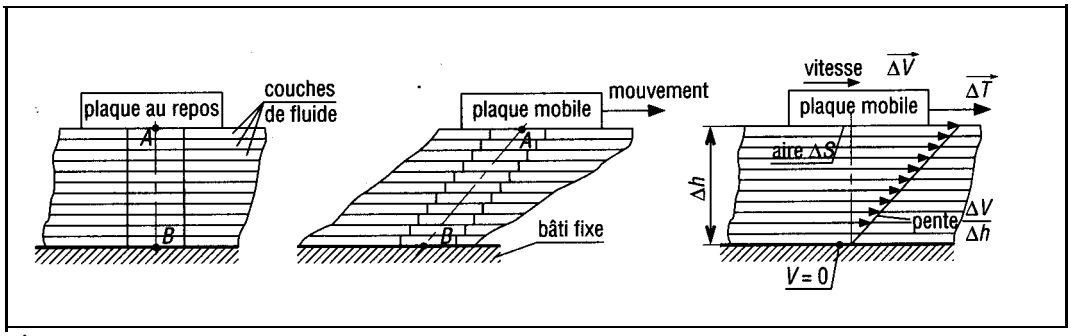


Fig. 2

La couche de fluide inférieure adhère au bâti en B : elle reste fie. La couche supérieure a le même mouvement que la plaque. Pour un fluide newtonien **(fig. 4)**, les couches de fluide successives entre A et B glissent et frottent les unes sur les autres, toutes de la même façon (ceci n'est pas vérifié dans les autres cas).

Si $\overrightarrow{\Delta T}$ est la force nécessaire pour déplacer la couche **A** à la vitesse $\overrightarrow{\Delta V}$ par rapport à la couche B, **Ah** l'épaisseur du film de fluide et AS l'aire de contact entre les couches, alors la viscosité dynamique μ est définie par :

$$\tau = \mu\left(\frac{\Delta V}{\Delta h}\right)$$

$$\tau = \frac{\overrightarrow{\Delta T}}{\Delta S} = \left\{\begin{array}{l}\text{contrainte de cisaille-}\\ \text{ment entre couches}\end{array}\right\}$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta h} = \left\{\begin{array}{l}\text{accroissement de la vitesse}\\ \text{entre les couches successives}\end{array}\right\}$$

L'unité est le pascal seconde (Pa.s) ou la poise ; 1 poise = 0,1 Pa.s

Relation entre viscosité dynamique et viscosité cinématique :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{avec} \left\{\begin{array}{l}\mu \text{ en Pa.s ou } N.s.m^{-2}\\ \nu \text{ en } m^2.s^{-1}\\ \rho \text{ en } kg.m^{-3}\end{array}\right.$$

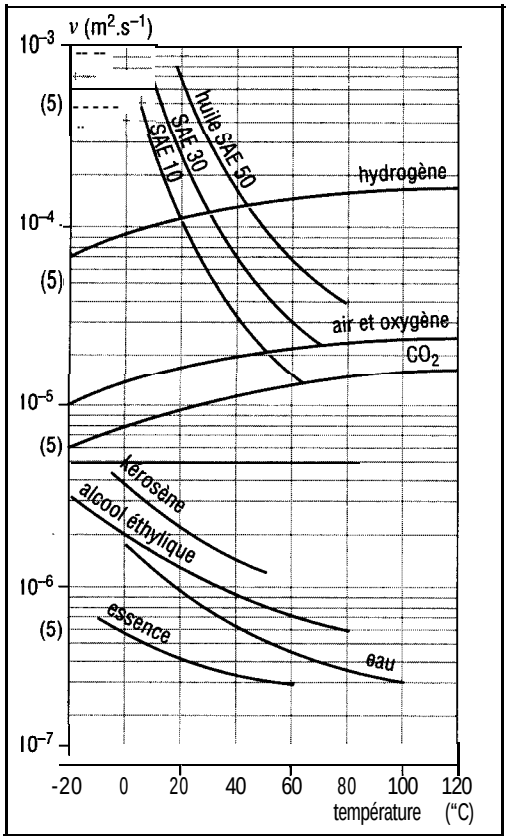


Fig. 3

Viscosités de quelques fluides à 20" C et à la pression atmosphérique.

fluide		μ (Pa.s)	ρ (kg.m^{-3})	ν (m^2.s^{-1})
hydrogène		$8{,}8 \times 10^{-6}$	0,084	$1{,}05 \times 10^{-4}$
oxygène		$2{,}0 \times 10^{-5}$	1,31	$1{,}53 \times 10^{-5}$
air		$1{,}8 \times 10^{-5}$	1,20	$1{,}51 \times 10^{-5}$
alcool éthylique		$1{,}2 \times 10^{-3}$	787	$1{,}52 \times 10^{-6}$
gazole		$1{,}3 \times 10^{-3}$	893	$1{,}45 \times 10^{-6}$
essence		$2{,}9 \times 10^{-4}$	680	$0{,}422 \times 10^{-6}$
kérosène		$1{,}64 \times 10^{-3}$	823	$2{,}0 \times 10^{-6}$
huile SAE 10		0,088	909	$0{,}97 \times 10^{-4}$
huile SAE 30		0,29	909	$3{,}2 \times 10^{-4}$
huile SAE 50		0,70	909	$7{,}7 \times 10^{-4}$
octane		$0{,}51 \times 10^{-3}$	701	$7{,}3 \times 10^{-7}$
propane		$0{,}11 \times 10^{-3}$	495	$0{,}22 \times 10^{-7}$
fréon 12		$2{,}62 \times 10^{-4}$	1 327	$1{,}97 \times 10^{-7}$
eau à	0° C	$1{,}788 \times 10^{-3}$	1 000	$1{,}788 \times 10^{-6}$
	10	$1{,}307 \times 10^{-3}$	1 000	$1{,}307 \times 10^{-6}$
	20	$1{,}003 \times 10^{-3}$	998	$1{,}005 \times 10^{-6}$
	30	illegible	996	$0{,}802 \times 10^{-6}$
	40	illegible	992	$0{,}662 \times 10^{-6}$
	50	$0{,}548 \times 10^{-3}$	988	$0{,}555 \times 10^{-6}$
	60	illegible	983	$0{,}475 \times 10^{-6}$
	70	$0{,}405 \times 10^{-3}$	978	$0{,}414 \times 10^{-6}$
	80	$0{,}355 \times 10^{-3}$	972	$0{,}365 \times 10^{-6}$
	90	$0{,}316 \times 10^{-3}$	965	$0{,}327 \times 10^{-6}$
	100	$0{,}286 \times 10^{-3}$	958	$0{,}295 \times 10^{-6}$

4. Différents types de fluides

II existe trois familles de fluides : les fluides viscoélastiques (farines de blé, poudres diverses.. .), les fluides dont les caractéristiques sont fonction du temps (peintures à séchage rapide, produits alimentaires liquides, solutions de plâtre...) et les fluides dont les caractéristiques sont indépendantes du temps. Cette dernière famille, la plus nombreuse, présente différents comportements :

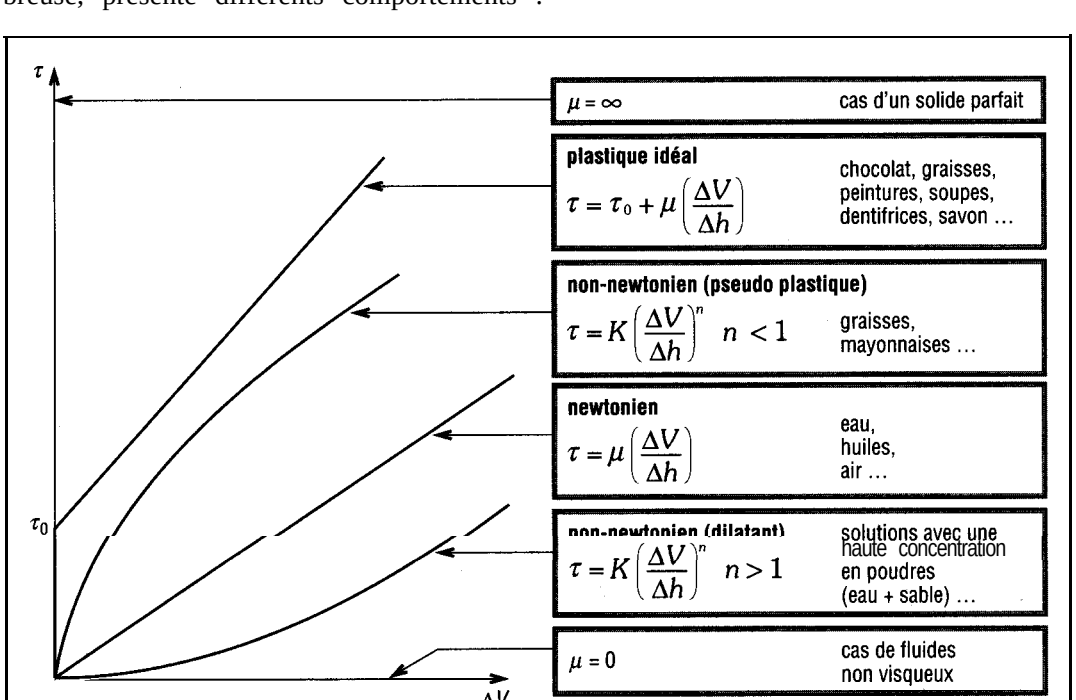


Fig. 4

II- Statique des fluides

La statique des fluides s'occupe de l'étude des fluides au repos.

1. Propriétés de la pression en un point d'un fluide

Propriété 1
Les actions ou les forces de pression s'exercent -toujours perpendiculairement aux surfaces sur lesquelles elles agissent.

Propriété 2 : théorème de Pascal
La pression en n'importe quel point d'un fluide est la même dans toutes les directions : verticale, horizontale ou inclinée (quel que soit l'angle d'inclinaison).

Montrons la propriété 2 en étudiant l'équilibre d'un prisme de fluide de petites dimensions (épaisseur constante $\Delta Y = 1$).

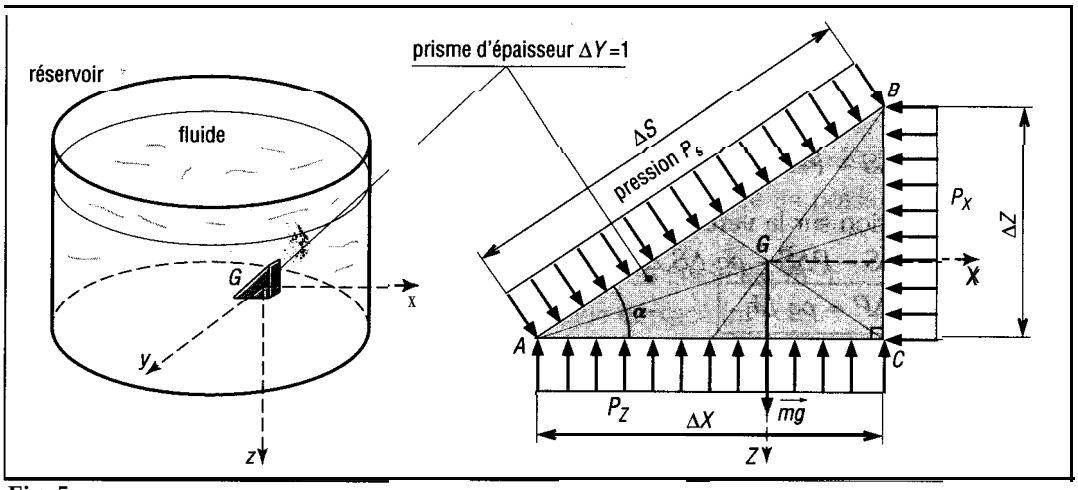


Fig. 5

Poids du prisme : mg = $\rho Vg = \rho \frac{AXAYAZ}{2} g = \rho g \frac{\Delta X \, \Delta Z}{2}$

P_x, P_z et P_s, supposées différentes au départ, schématisent les forces de pression sur les faces BC, AC et AB. Les résultantes correspondantes sont :

$P_x \, \Delta Z \, \Delta Y = P_x \, \Delta Z$; $P_z \, \Delta X \, \Delta Y = P_z \, \Delta X$ et $P_s \, \Delta S \, \Delta Y = P_s \, \Delta S$

D'après le principe fondamental de la statique :

$$\vec{\rho g} \frac{\Delta X \, \Delta Z}{2} + \vec{P_s \, \Delta S} + \vec{P_x \, \Delta Z} + \vec{P_z \, \Delta X} = \vec{0}$$

Projection sur x : $p_s \, \Delta S \sin a - p_x \, AZ = 0$ (1)

Projection sur z : $\rho g \frac{\Delta X \, \Delta Z}{2} + p_s \, \Delta S \cos \alpha - p_z \, \Delta X = 0$ (2)

En remarquant que AX = AS cos a, AZ = AS sin a et que le terme pg $\frac{\Delta X \, \Delta Z}{2}$ est négligeable devant les autres, les équations 1 et 2 donnent :

$P_s = P_x$ et $P_s = P_z$

Une étude analogue, avec le prisme placé dans le plan (y, z), nous donnerait $P_s = P_x = P_y$. En définitive :

$\boxed{P_s = P_x = P_y = P_z}$ quel que soit l'angle a.

Autrement dit, la pression est la même dans toutes les directions.

2. Relation entre la pression, la profondeur et la pesanteur

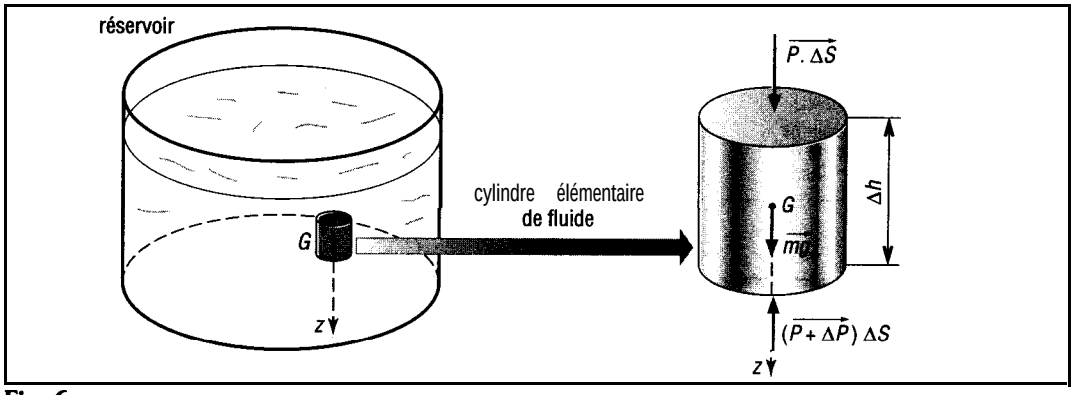


Fig. 6

Afin d'établir la relation cherchée, étudions l'équilibre d'un cylindre élémentaire de petites dimensions, de hauteur Ah, de surface de base AS.
'Le principe fondamental de la statique donne :

$$(\overrightarrow{P + \Delta P})\Delta S + \overrightarrow{P\Delta S} + \overrightarrow{mg} = \overrightarrow{0}$$

En projection sur la verticale z et en remarquant que mg = ρg AS Ah :
$(P + \Delta P)\Delta S - P\Delta S - \rho g\ \Delta S\ \Delta h = 0$
d'où : $\boxed{\Delta P = \rho g\ \Delta h}$

Application : liquide dans un réservoir.
P_A est la pression à la surface du réservoir et P_M la pression à la profondeur h. La pression augmente avec la profondeur et :

$$\overline{\Delta P = P_M - P_A = \rho g h}$$

unités : P_M et P_A en Pa
ρ masse volumique du fluide (kg.m^{-3})
g = 9,81 m.s^{-2}
h profondeur en m

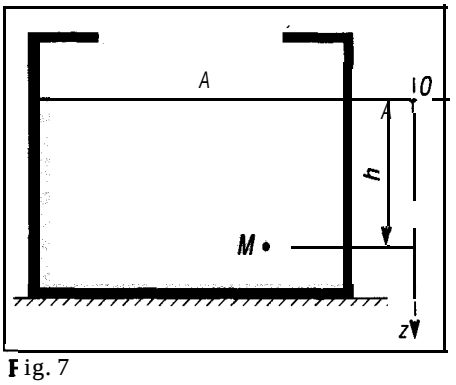


Fig. 7

Exemple : déterminons la pression dans l'océan à une profondeur de 1 000 m, ρ = 1 030 kg.m^{-3}, P_{atm} = pression atmosphérique $\simeq 10^5$ Pa.
$P_M - P_{atm} = 1\,030 \times 9{,}81 \times 1\,000$
$P_M = 10^5 + 101{,}043 \times 10^5 = 102 \times 10^5$ Pa = 102 bars.
Schématiquement, la pression augmente de 1 bar tous les 10 mètres.

3. Poussée d'Archimède

Théorème
La résultante des forces de pression exercées sur la surface d'un objet complètement immergé, encore appelée poussée d'Archimède ($\overrightarrow{F_A}$), est égale et opposée au poids du volume de fluide déplacé par l'immersion

a) Mise en évidence

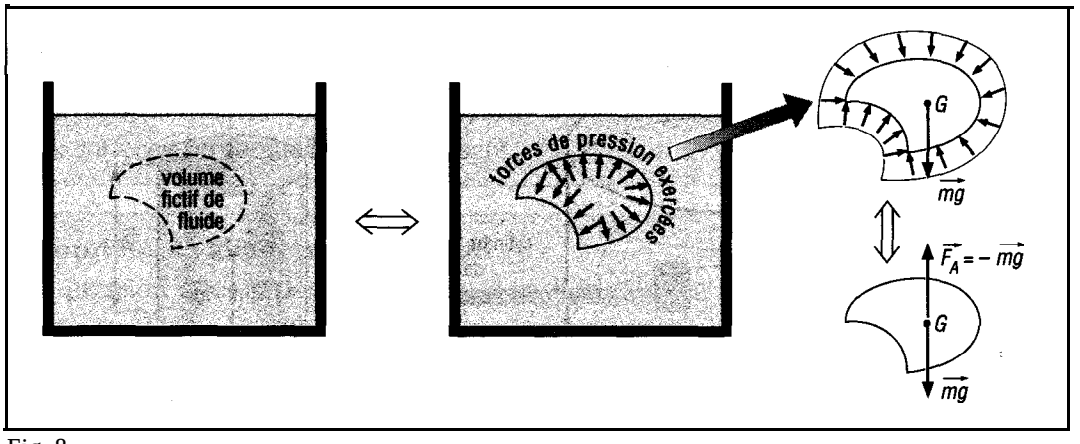


Fig. 8

Le volume fictif de fluide de la figure 8 reste en équilibre sous l'action de son poids $\overrightarrow{mg}$ et de l'ensemble des forces de pression exercées sur sa surface extérieure par le fluide environnant.

L'application du principe fondamental2 la statique montre que la résultante des forces de pression (ou poussée d'archimède F_A) est égale et opposée au poids $\overrightarrow{mg}$.

$$\overrightarrow{F_A} = -\overrightarrow{mg} = -\overrightarrow{\rho V g}$$

- ρ : masse volumique du fluide (kg.m^{-3})
- V : volume de fluide déplacé (m^3)
- g = 9,81 m.s^{-2}
- F_A : poussée d'archimède (N)

Remarque : $\overrightarrow{F_A}$ a pour point d'application le centre de gravité du fluide déplacée, encore appelé centre de poussée ***A*** ; elle est verticale et orientée de bas en haut.

Exemple

Déterminons la tension T d'un fil (AB) tenant une sphère de 5 kg, de volume 1,5 dm^3 (1,5 litres), immergée dans un réservoir d'eau (1 000 kg.m^{-3}).

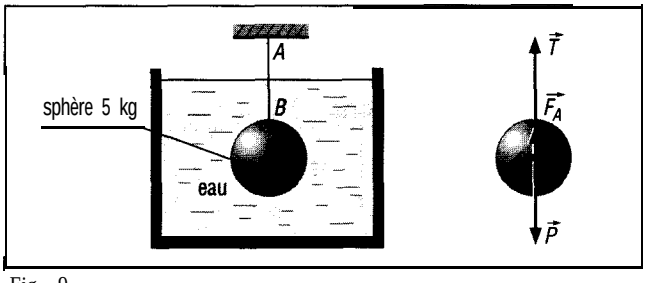


Fig. 9

$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{F_A} = \overrightarrow{0}$

d'où T = P-F, = $mg - \rho Vg$

T = 5 x 9,81 - 1 000 x 0,0015 x 9,81 = 34,3 N.

b) Cas d'un solide partiellement immergé

Dans le cas d'un solide partiellement immergé, ou dans le cas d'un solide complètement immergé mais non homogène, le centre de poussée A est distinct du centre de gravité G du solide, ce qui influe sur la position d'équilibre de celui-ci.

Exemple

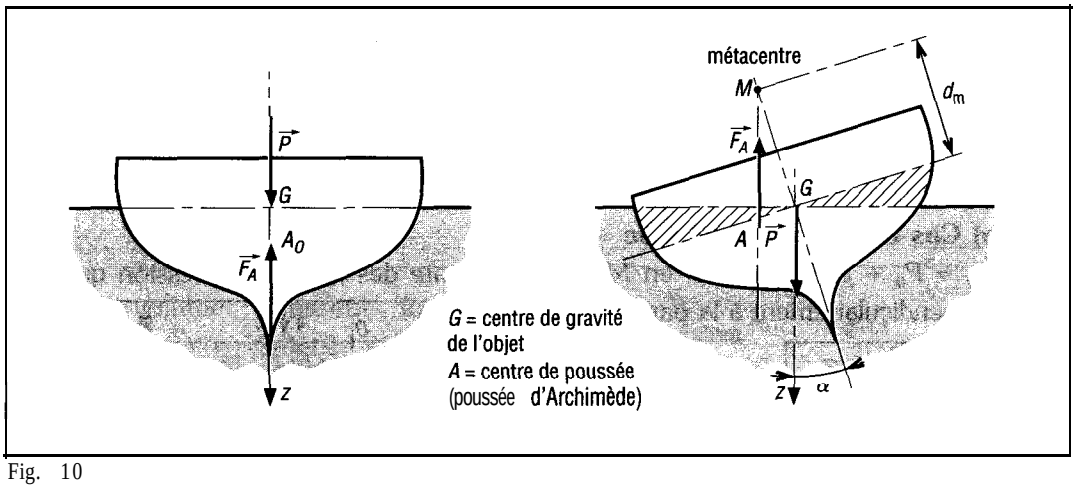


Fig. 10

Le point *M*, situé à l'intersection de la verticale passant par ***A*** et de l'axe de symétrie du solide, est appelé métacentre et d_m est la distance métacentrique.

Si *M* est situé au-dessus de G, il y a toujours stabilité ; le solide tend à revenir dans sa position d'équilibre après un écart. Il y a instabilité dans le cas contraire, lorsque *M* est au dessous de G.

4. Forces et pressions sur une paroi plane immergée

a) Cas d'une paroi verticale

Données :

P_0 : pression à la surface du fluide

$P_M = P_0 + \rho g Z$

Z : profondeur

Z_R : profondeur de la résultante $\vec{R}$

Z_G : profondeur du barycentre ou centre de gravité G de la surface S de contact paroi/fluide

p : masse volumique du fluide

$g = 9{,}81\ \text{m.s}^{-2}$

S : aire de la paroi soumise à la pression du fluide

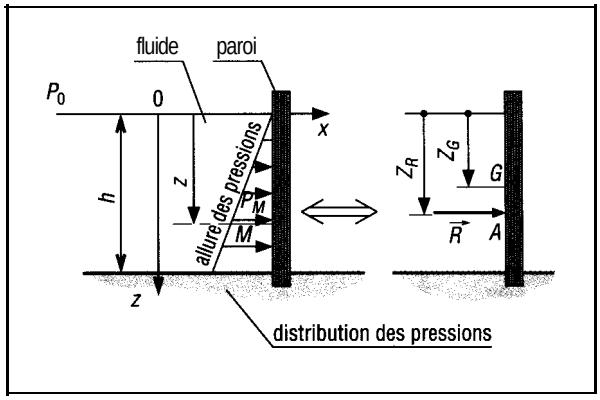


Fig. 11

Si $\vec{R}$ est la résultante des forces de pression exercées sur la paroi et Z_R sa position, on montre les relations :

$$R = \rho g S Z_G \quad \text{et} \quad Z_R = \frac{I_{yG}}{Z_G \cdot S} + Z_G$$

I_{yG} est le moment quadratique de la surface S par rapport à l'axe y, (axe passant G et perpendiculaire à x et z).

Exemple : déterminons R et Z_R pour une paroi rectangulaire, de hauteur h = 2 m, de largeur b = 3 m, soumise à l'action de l'eau (1 000 kg.m^{-3}).

$$R = \rho g Z_G S$$
$$= 1\,000 \times 9{,}81 \times 1 \times (3 \times 2) = 58\ 860\,\text{N}$$

avec $Z_G = \frac{h}{2} = 1\,\text{m}$

$$Iy_G = \frac{b h^3}{12} = \frac{3 \times 2^3}{12} = 2\,\text{m}^4$$

$$Z_R = \frac{2}{1 \times 6} + 1 = 1{,}333\,\text{m} = \frac{2h}{3}$$

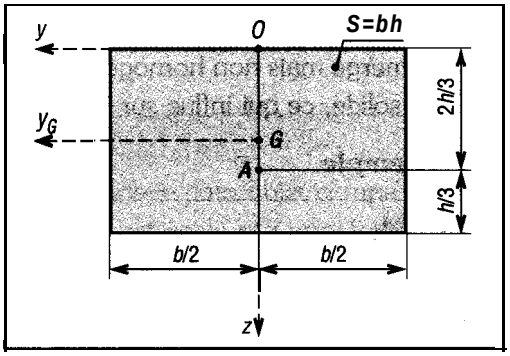


Fig. 12

b) Cas d'une paroi inclinée

$P_M = P_0 + \rho g Z$, pression en M et $\vec{R}$ résultante des forces de pression qui s'exercent perpendiculairement à la paroi.

$$R = \rho g S Z_G$$

La position du centre de poussée A est donnée par :

$$U_R = \frac{Iy_G}{U_G \cdot S} + U_G$$

avec $U_R = \frac{Z_R}{\sin\alpha} = OG$ et $U_G = \frac{Z_G}{\sin\alpha} = OA$

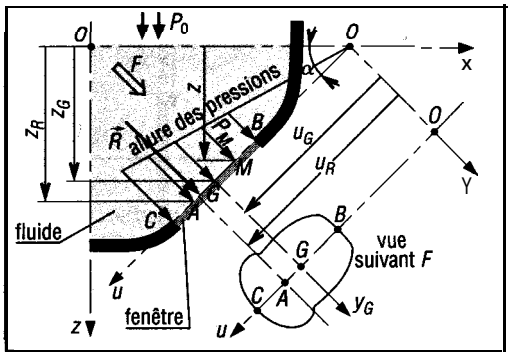


Fig. 13

EXERCICES À RÉSOUDRE

❑ Un réservoir est rempli avec de l'eau (1 000 kg.m^{-1}) sur une hauteur h_{BC} = 2 m et avec de l'huile (870 kg.m^{-3}) sur une hauteur h_{BA} = 1 m.
Déterminer la hauteur d'eau h_D dans le tube piézométrique relié à la masse d'eau si : $P_A = P_D$ = P atmosphérique.

Réponse

h_D = 2,87 m.

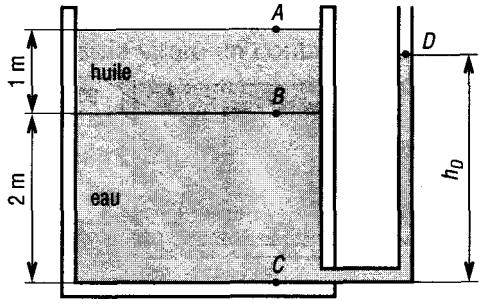


Fig. 14

P R eprendre l'exercice 1 avec un réservoir fermé, une pression d'air dans la cuve $P_D = P_E = P_{atm}$ (pression atmosphérique), de l'essence (680 kg.m^{-3}), de la glycérine (1 260 kg.m^{-3}). Déterminer les élévations z_D et z_E des fluides dans les tubes piézométriques en D et E (zc = 0 ; z_B = 2 ; z_A = 5 m).
Donnée : $P_A = P_{atm}$ + 15 000 Pa.

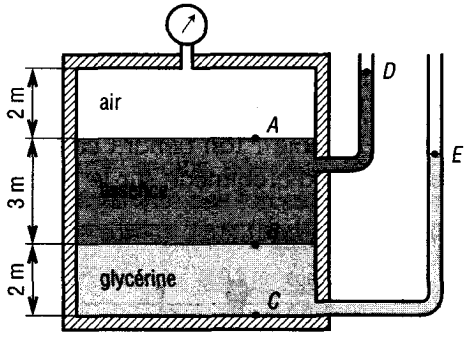


Fig. 15

3 L'indication de remplissage d'un réservoir à essence. est -proportionnelle à la pression mesurée par une jauge placée au fond du réservoir. Si le réservoir est rempli uniquement d'essence, la jauge indique le plein pour h = 0. Si, par accident, on a 18 mm d'eau au fond du réservoir, pour quelle valeur de h la jauge indique-t-elle le plein ?

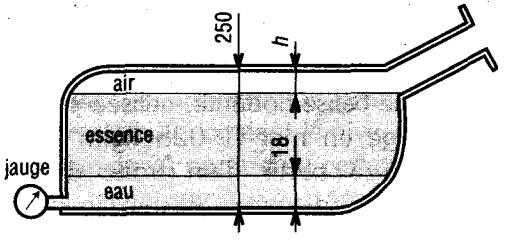


Fig. 16

❑ Le volume apparent (non immergé) d'un iceberg est de 1 000 m^3 (10 x 10 x 10 m). Déterminer le volume immergé et la masse totale de l'iceberg.

Réponse

8 115 m^3, 8 358 tonnes ; 87,6 % immergé.

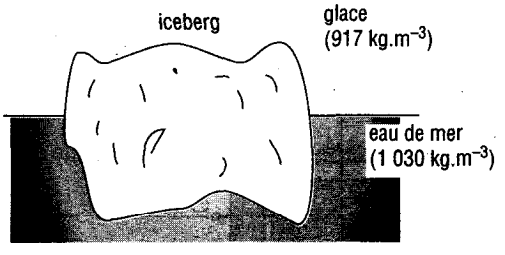


Fig. 17

❑ Un solide cylindrique de densité inconnue flotte entre de l'huile et de l'eau. Les trois quart du solide sont immergés dans l'eau. Déterminer la densité d du solide.

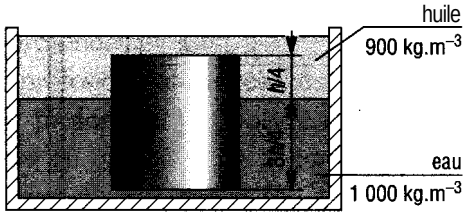


Fig. 18

❑ Une bouée munie d'un éclairage, est placée à l'entrée d'un port. Le poids de l'ensemble (sans lest) est de 300 daN. a) Déterminer la tension de la chaîne (T). b) A partir de quel volume de béton l'ensemble bouée plus lest reste-t-il stable ? (on tiendra compte de la poussée d'archimède sur le béton).

Réponse

T = 706 daN ; 0,516 m³.

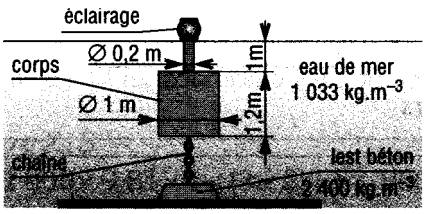


Fig. 19

7 Une balise flottante, utilisée pour le repérage en mer (1 025 kg.m⁻³), est réalisée à partir d'un tronc d'arbre cylindrique (diamètre 80 mm, longueur 4 m) et d'un lest en acier (7 800 kg.m⁻³) fixé à l'une des extrémités. La masse volumique du bois est de 620 kg.m⁻³ Quelle doit être la masse du lest pour que la poutre dépasse d'une hauteur h de 0,6 m (on tiendra compte de la poussée d'Archimède sur le lest).

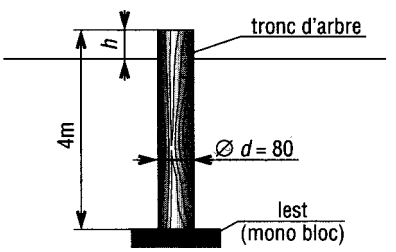


Fig. 20

❑ Dans la position 1, les flotteurs du dock sont remplis d'eau ; le navire à réparer est amarré. Dans la position 2, l'eau est chassée des flotteurs, le navire repose sur le dock. La masse volumique de l'eau de mer est de 1 030 kg.m⁻³ ; la masse du navire est de 25 000 t ; celle du dock (délesté) est de 30 000 t. Calculer l'enfoncement h de l'ensemble.

Réponse

h = 5,12 m.

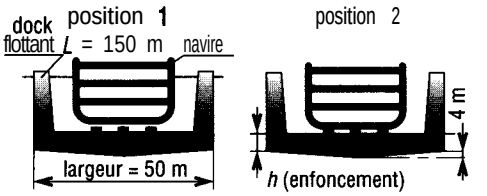


Fig. 21

9 Une plate-forme est utilisée pour la recherche pétrolière. Elie se compose de deux flotteurs parallélépipédiques (100 x 12 x 10) liés à la plate-forme par quatre piliers cylindriques de diamètre 8 m. Les flotteurs sont enfoncés de 5 m sous la surface de l'eau. Déterminer la masse totale de l'ensemble.

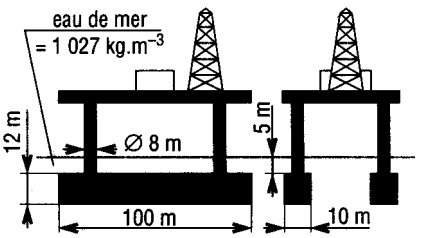


Fig. 22

10 Un purgeur automatique est utilisé pour évacuer l'air qui s'accumule aux points hauts des conduites d'eau sous pression. Le poids de la sphère est de 20 N. La masse volumique de l'eau est de 1 000 kg.m⁻³. A partir de quelle hauteur h y a-t-il évacuation de l'air emprisonné ?

Réponse

h = **168,5 mm.**

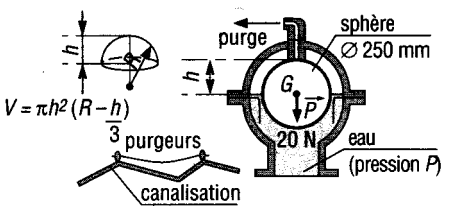


Fig. 23

❑ Un ballon sphérique (diamètre 8 m) est gonflé avec de l'hélium à la pression de 1,3 bar. La masse volumique de l'hélium, à la pression atmosphérique (P_{atm} = 1,013 bar), est de 0,163 kg.m^{-3} et celle de l'air de 1,19 kg.m^{-3}. La masse du ballon est de 50 kg. a) Si le produit pression multiplié par le volume est constant (PV = constante), déterminer la masse d'hélium contenue dans le ballon. b) En déduire la tension T du câble AB fixant le ballon au sol.

Réponse

56 kg ; 2 090 N.

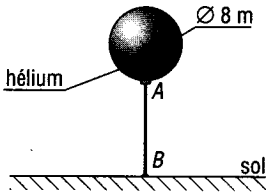


Fig. 24

❑ Un parallélépipède (1 000 x 400 x ZOO) en bois (500 kg.m^{-3}) flotte dans un bassin rempli d'eau (100 kg.m^{-3}), g = 10 m.s^{-2}. a) Déterminer la hauteur d'enfoncement h. b) Déterminer les distances métacentriques si l'objet est incliné de 30, 45 et 60".

Réponse

h = 100 mm ; GM_{∞} = 104 ;
GM_{45} = 138,6 ; GM_{60} = 216,7 mm.

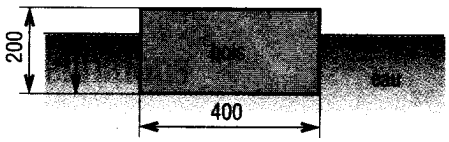


Fig. 25

❑ Un cône ayant la forme d'un triangle équilatéral de côté a et de masse volumique 950 kg.m^{-3} flotte dans de l'eau (1 000 kg.m^{-3}) suivant les positions verticales indiquées en a) et en b) a) Déterminer h_1 et h_2. b) Les positions d'équilibre indiquées sont-elles des positions stables ?

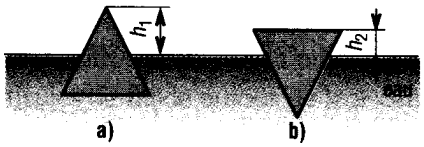


Fig. 26

❑ L'aquarium géant proposé est utilisé dans les parcs d'attraction. La partie vitrée peut être circulaires (d = 2m) ou rectangulaire (2 x 3 m). Déterminer la résultante des forces de pression sur la partie vitrée en contact avec l'eau dans les cas : a) forme rectangulaire 2 m x 3 m ; b) forme circulaire, diamètre 2 m.

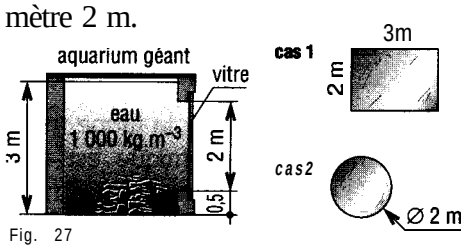


Fig. 27

❑ Une canalisation CD est soudée sur un réservoir AB = 4 m et est de longueur 6 m. Le réservoir contient de l'huile (900 kg.m^{-3}) et de l'eau (1 000 kg .m^{-3}) moitié pour moitié. Déterminer la résultante des forces de pression exercées sur les deux fonds de diamètre AB.

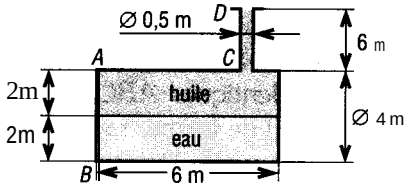


Fig. 28

❑ Le dispositif proposé permet de maintenir constant le niveau d'eau d'un bassin. A partir d'un certain H, la porte s'ouvre automatiquement sous l'action des forces de pression. Après évacuation d'une certaine quantité d'eau, la porte se referme sans intervention. La porte est de forme rectangulaire (0,6 x 1 m). a) a = 27 cm. 🕓 partir de quelle hauteur H la porte s'ouvre-t-elle ? b) On impose H = 100 cm ; quelle doit être la valeur de a correspondante ?

Réponse

H = 1,3 m, *a* = *0,257* m

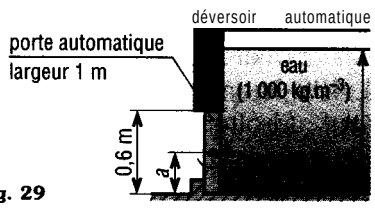


Fig. 29

❑ Les deux coffrages proposes retiennent la même hauteur (h = 2 m) de béton liquide. La masse volumique ρ du béton liquide est de 2 400 kg.m^{-3}. Déterminer, pour les deux cas, la résultante des forces de pression sur le panneau AB (largeur 3 m). Quelle est la valeur des actions exercées par les appuis en A et B ?

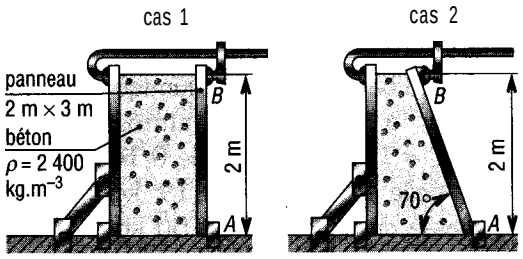


Fig. 30

❑ Afin d'observer la faune marine, un hublot panoramique est monté sur la coque d'un navire à 2 m sous la ligne de flottaison. Le hublot, incliné de 45°, peut être circulaire (1,5 m) ou rectangulaire (2 x 3 m). La masse volumique de l'eau de mer est de 1 300 kg.m^{-3}. Déterminer, dans les deux cas, la résultante des forces de pression exercées sur le hublot.

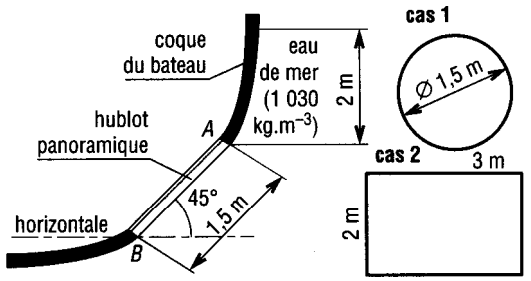


Fig. 31

❑ Un bac est réalisé à partir d'un fond carré (2 x 2 m) et de quatre côtés identiques $ABCD$ (AB = 4 ; CD = 2) de forme trapézoïdale soudés ensemble. Déterminer la résultante des forces de pression exercées sur chaque côté $ABCD$ si le bac est entièrement rempli de glycérine (1 260 kg.m^{-3})

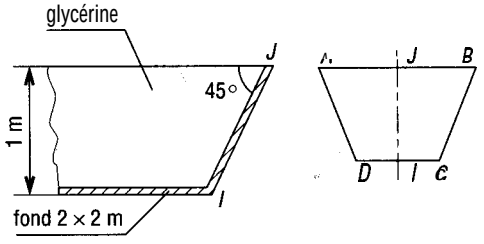


Fig. 32

Réponse

R = 32949 N ; U_r = 0,88 mm ; Z_r = 0,625 mm.

❑ Le silo proposé est utilisé pour le stockage des poudres, graines, granulés... Il se compose d'un réservoir, d'une trémie et d'une trappe d'évacuation. La partie trémie, sorte d'entonnoir renversé dont la forme est celle d'une pyramide creuse tronquée, est réalisée à partir de quatre panneaux $DCEF$ identiques. Les poudres (masse volumique 1 400 kg.m^{-3}) affleurent le niveau haut (droite AB) du réservoir. Déterminer la résultante des forces de pression sur chacune des faces $DCEF$ et sur la frappe EF.

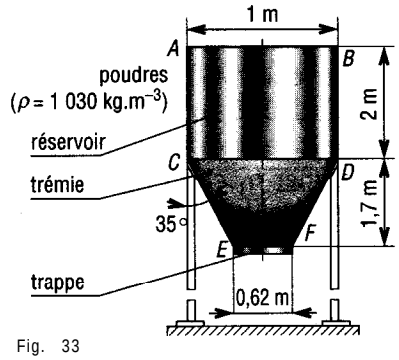


Fig. 33

34 DYNAMIQUE DES FLUIDES

OBJECTIFS

- Définir les notions fondamentales sur les écoulements, l'équation de continuité et le nombre de Reynolds.
- Donner des éléments pour la détermination des pertes de charge régulières et singulières.
- Décrire et développer la loi sur l'énergie (ou équation de Bernoulli) ainsi que le théorème de la quantité de mouvement (ou théorème d'Euler).

1 - Notions fondamentales sur les écoulements

1. Définitions

L'écoulement d'un fluide peut être permanent ou non permanent, uniforme ou non uniforme, laminaire ou turbulent.

Écoulement permanent : un écoulement est permanent si la vitesse des particules de fluide qui se succèdent en un même point, et quel que soit ce point, reste la même (constante) au cours du temps.

Écoulement uniforme : un écoulement est uniforme si la vitesse des particules de fluide est la même en tout point de l'écoulement (même direction, même intensité et même sens en chaque point).

Fluide parfait ou idéal : un fluide parfait est un fluide dont la viscosité est supposée nulle ($\mu = 0$ ou $v = 0$). Il n'y a pas de contraintes de cisaillement dues au frottement interne entre molécules et au frottement contre les parois. Il n'y a pas de rotation des particules de fluide autour de leur centre de masse (elles sont dites irrotationnelles). Il ne supporte que des forces de pression et les écoulements peuvent être représentés par des lignes de courant.

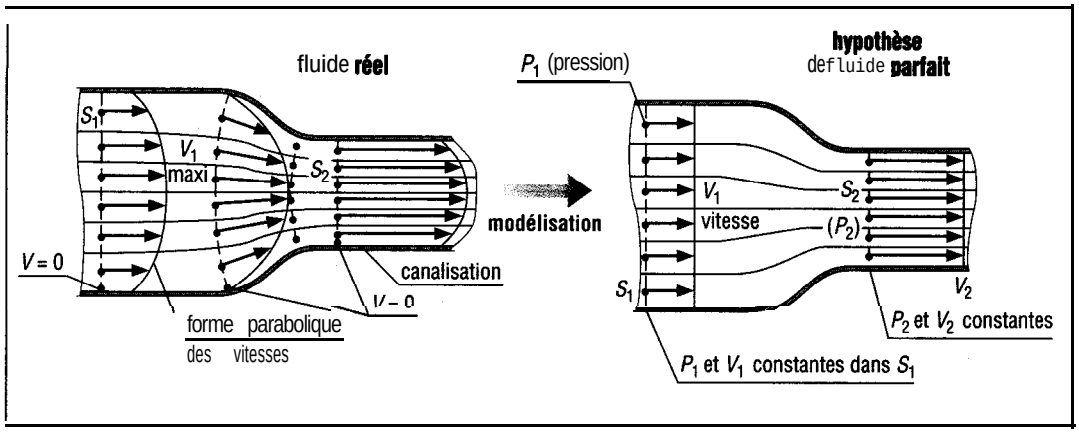


Fig. 1

Lignes de courant : les lignes de courant sont des lignes imaginaires de l'écoulement indiquant la direction du mouvement du fluide. Elles sont tangentes en chaque point aux vecteurs-vitesses des particules du fluide.

Tube de courant : un tube de courant est un ensemble formé à partir d'un faisceau de lignes de courant (sorte de "canalisation"). Il n'y a pas d'écoulement de fluide latéralement ou transversalement au tube. L'écoulement s'effectue par les sections d'entrée (S,) et de sortie (S,).

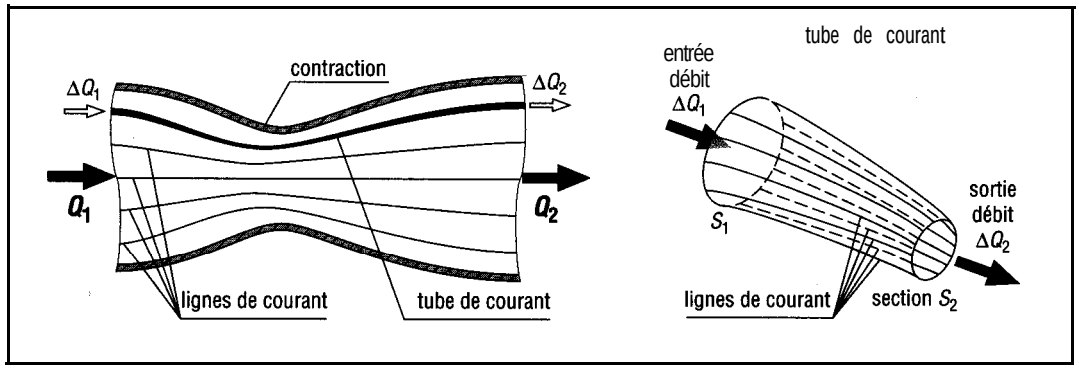


Fig. 2

Lignes d'émission : à un instant donné, c'est la courbe géométrique décrite par les particules de fluide qui passent en un point choisi de l'écoulement.

Propriété : en écoulement permanent, lignes de courant, trajectoires et lignes d'émission sont identiques ou confondues.

2. Équation de continuité

En écoulement permanent, la masse de fluide traversant l'ensemble des sections droites ou transversales d'un tube de courant par unité de temps reste ta même. Autrement dit, le débit est constant :

AQ entrée du tube **= AQ sortie** du tube de courant

Cas d'une canalisation : le débit à l'entrée Q_1 est égal au débit à la sortie Q_2.

Débit en volume ou débit volumique :

$$Q_V = Q_{V1} = S_1 . V_1 = Q_{V2} = S_2 . V_2$$

Q_V en $m^3.s^{-1}$; S_1 et S_2 en m^2 ; V_1 et V_2 en $m.s^{-1}$.

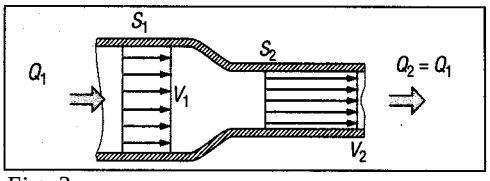


Fig. 3

Débit en masse ou débit massique :

$$Q_m = Q_{m1} = \rho_1 S_1 V_1 = Q_{m2} = \rho_2 S_2 V_2$$

Q_m en $kg.s^{-1}$; ρ_1 et ρ_2 en $kg.m^{-3}$; S_1 et S_2 en m^{-2} ; V_1 et V_2 en $m.s^{-1}$.

Remarque : ρ est la masse volumique du fluide ; S_1 et S_2 les sections d'entrée et de sortie ; V_1 et V_2 les vitesses moyennes d'écoulement à l'entrée et à la sortie.

Exemple : un réservoir plein est alimenté par les canalisations (1) et (2) ;
la vidange est assurée par la conduite (3). Il y a continuité du débit entre les (3) canalisations .

Canalisation	Diamètre (mm)	ρ ($kg.m^{-3}$)	V ($m.s^{-1}$)
entrée 1	100	700	5
entrée 2	80	700	V_2 ?
sortie 3	120	700	8

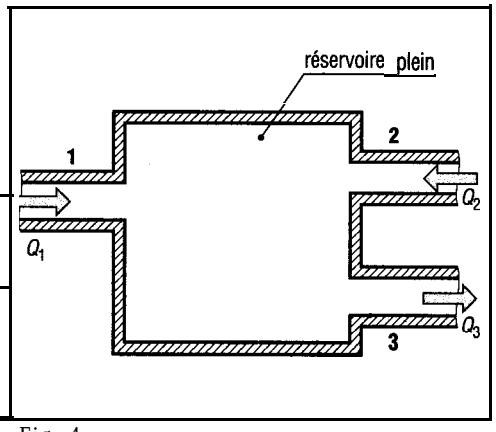


Fig. 4

Déterminons la vitesse d'entrée V_2 et les débits.

$$\mathbf{Qv} = Q_{V1} + Q_{V2} = Q_{V3} = S_3 V_3 = \frac{\pi \times 0{,}12^2}{4} \times 8 = 0{,}09048 \ m^3.s^{-1}$$

$$Q_m = \rho Q_V = \rho Q_{V3} = 700 \times 0{,}09048 = 63{,}3 \ kg.s^{-1}$$

$$Q_V = Q_{V1} + Q_{V2} = S_1 V_1 + S_2 V_2 = \frac{\pi \times 0{,}1^2}{4} \times 5 + \frac{\pi \times 0{,}08^2}{4} \times V_2 = 0{,}09048$$

d'où : $V_2 = \frac{0{,}09048 - 0{,}03927}{0{,}00502} = 10{,}2 \ m.s^{-1}$

$Q_{V2} = 0{,}00502 \times 10{,}2 = 0{,}0512 \ m^3.s^{-1}$; $Q_{m2} = 700 \times 0{,}051 = 35{,}8 \ kg.s^{-1}$

3. Écoulement laminaire, écoulement turbulent, nombre de Reynolds R_e

a) Écoulement laminaire

Il se produit dans le cas de fluides suffisamment visqueux, avec une vitesse moyenne faible et dans une canalisation de faibles dimensions. Les trajectoires des particules de fluide restent parallèles à la paroi. La vitesse des particules qui se succèdent en un point de l'écoulement est immuable au cours du temps.

Exemple : écoulement des huiles des circuits hydrauliques industriels (vérins, etc.).

b) Écoulement turbulent

Le plus fréquent sur le plan industriel : la vitesse des particules de fluide qui se succèdent en un point de l'écoulement, plus élevée que précédemment, varie au cours du temps. Cependant, la vitesse moyenne de ces particules est indépendante du temps.

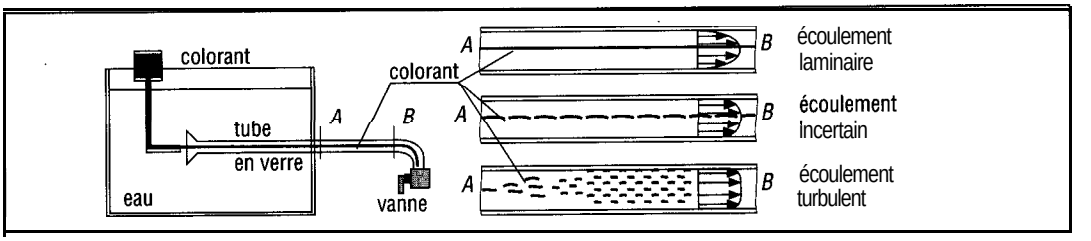
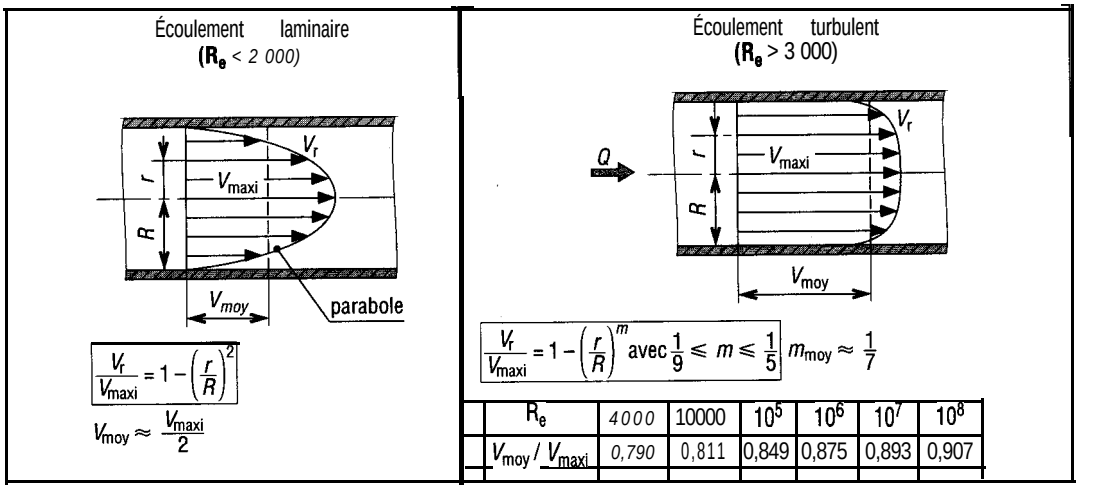


Fig. 5



R_e	4000	10000	10^5	10^6	10^7	10^8
V_{moy} / V_{maxi}	0,790	0,811	0,849	0,875	0,893	0,907

'ig. 6

c) Nombre de Reynolds R_e

Le nombre de Reynolds R_e est un nombre sans dimension (pas d'unité) qui permet de faire la différence entre un écoulement laminaire et un écoulement turbulent.

$$R_e = \frac{V \cdot d}{\nu}$$

$R_e < 2000$ ⇒ écoulement laminaire
$2\,000 < R_e < 3000$ ⇒ écoulement incertain
$R_e > 3000$ ⇒ écoulement turbulent

V = vitesse moyenne du fluide en $m.s^{-1}$
d = diamètre de la canalisation en m
ν = viscosité cinématique du fluide en $m^2.s^{-1}$
R_e = nombre de Reynolds, sans dimension

Remarques : pour les calculs, on peut prendre R_e = 2 300 comme valeur limite (R_e < 2. 300 : écoulement laminaire ; si R_e > 2 300 : écoulement turbulent).

Dans le cas des canalisations non circulaires, prendre :

$$d = \frac{4A}{C}$$

avec A : aire de la section d'écoulement
C : circonférence de la section

Exemple : déterminons le nombre de Reynolds d'un écoulement d'essence (viscosité dynamique μ = 2,9 x 10^{-4} Pa.s, masse volumique 680 $kg.m^{-3}$) circulant à la vitesse de 10 $cm.s^{-1}$ dans une conduite de 5 mm de diamètre.

$$R_e = \frac{680 \times 0{,}1 \times 0{,}005}{\nu} = \frac{}{2{,}9 \times 10^{-4}}$$ 1 172 (l'écoulement est laminaire).

II • Pertes de charge

1. Pertes de charges régulières

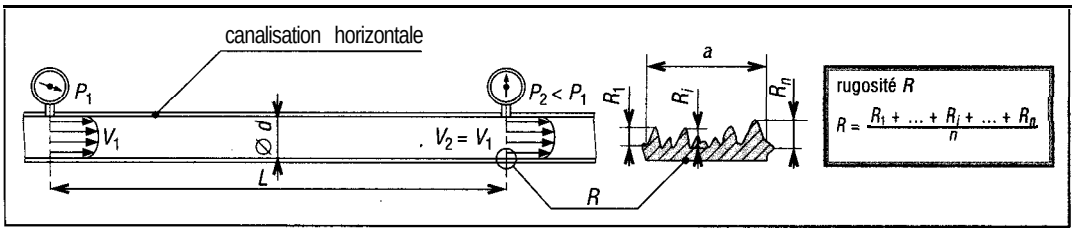


Fig. 7

Les pertes de charge régulières résultent du frottement exercé entre le fluide et la surface intérieure de la canalisation. Elles sont proportionnelles à la longueur L de la conduite et au carré de la vitesse moyenne V du fluide, inversement proportionnelle au diamètre d et fonction de la rugosité moyenne R de la canalisation.

a) Formule de Darcy-Weisbach

(écoulement laminaire ou turbulent dans une conduite de diamètre *d)*

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho \frac{f L V^2}{2d} \text{ (en Pa)} \qquad W_{f\,1/2} = \frac{\Delta p}{\rho} = \frac{f L V^2}{2d} \text{ (en J.kg}^{-1}\text{)}$$

Unités : p_1 et p_2 en Pa ; L et d en m ; V en $m.s^{-1}$; ρ en $kg.m^{-3}$; f sans unité est obtenu par l'abaque jointe (Moody-Mourine).

b) Frottement f

f caractérise le frottement entre la conduite et le fluide.

f dépend essentiellement du nombre de Reynolds R_e et de la rugosité relative R/d.

En régime laminaire : $f_{laminaire} = \frac{64}{R_e}$

En régime turbulent : f est déterminé à partir de l'abaque de Moody-Mourine.

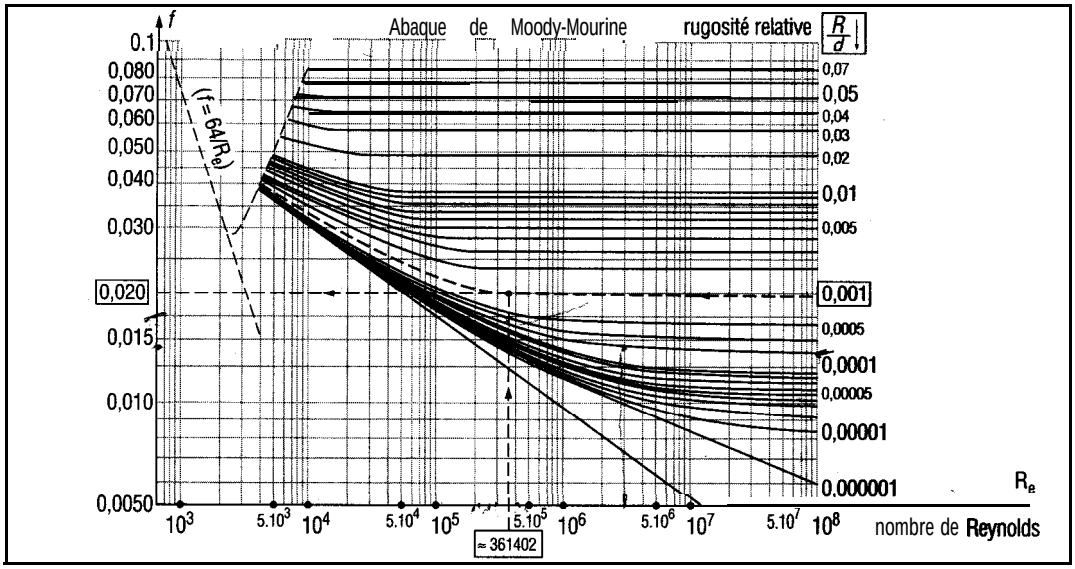


Fig. **8**

Valeurs indicatives usuelles de la rugosité R					
Matériau		R (en mm)	Matériau		R (en mm)
béton		0,3 à 3,0	tube acier avec soudure	roulé	0,04 à 0,10
fonte		0,2 à 0,4		goudronné	0,01 à 0,05
fonte goudronnée		0,12		galvanisé	0,008
bois étuvé		0,2 à 0,9	tube PVC		0,01
tube acier sans soudure	étiré	0,02 à 0,06	-tube étiré (cuivre, laiton, etc.)		0,0015
	galvanisé	0,07 à 0,10	verre		0 (≈ lisse)

c) Exemple

Déterminons les pertes de charge dans une canalisation horizontale, en tube d'acier : $d = 100\,mm$; rugosité $R = 0,1$ mm ; $L = 50$ m ; fluide véhiculé de l'eau à 50 °C ; $p = 988$ kg.m^{-3} ; v = 0,5534x 10^{-6} m^2. s^{-1} ; vitesse moyenne d'écoulement V = 2 m. s^{-1} ; $p_1 = 2$ bars.

Nombre de Reynolds : $R_e = \dfrac{2 \times 0,1}{0,5534 \times 10^{-6}} = 361402$ (écoulement turbulent).

Rugosité relative : $\dfrac{R}{d} = \dfrac{0,1}{100} = 0,001.$; (R_e et $\dfrac{R}{d}$ donne $f = 0,02$ (abaque Moody)

Chute de pression : Ap = 988 x $\dfrac{0,02 \times 50 \times 2^2}{2 \times 0,1} = 19760$Pa $\simeq 0,2$ bar d'où $p_2 = 1,8$ bar.

Énergie perdue : $W_{f\,1/2} = \dfrac{19760}{988} = 20$ J.kg^{-1} (environ 10 % de pertes).

Débit massique : $Q_m = 988 \times \dfrac{\pi \times 0,1^2}{4} \times 2 = 15,51$ kg. s^{-1}.

Puissanceperdue : $P = Q_m \times W_f =$ 310W.

2. Pertes de charges singulières

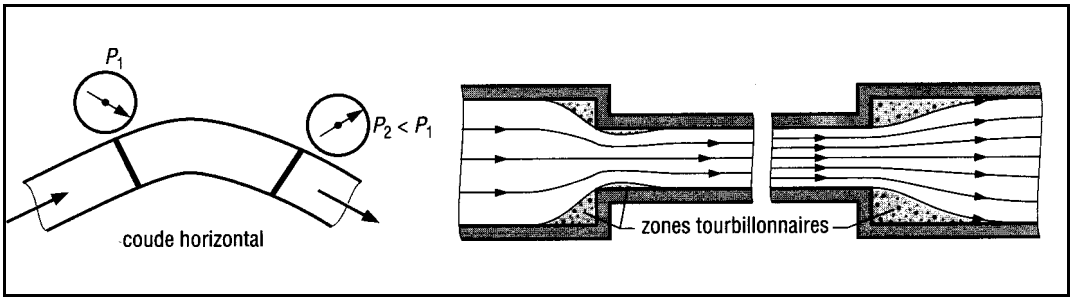


Fig. 9

Les pertes de charges singulières résultent de la présence de coudes, raccords, branchements, robinets, etc. Tous ces éléments (singularités), installés le long des canalisations, constituent des obstacles qui freinent le passage du fluide et amènent des pertes de charge. Les pertes singulières sont caractérisées à partir d'un coefficient de perte k et déterminées par la relation :

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho \frac{k V^2}{2} \text{ (en Pa)} \quad \text{ou} \quad W_{S\,1/2} = \frac{\Delta p}{\rho} = \frac{k V^2}{2} \text{ (en J.kg}^{-1}\text{)}$$

Unités : p_1 et p_2 en Pa ; V en m.s^{-1} ; p en kg.m^{-3} ; k coefficient de perte de charge (voir graphe et tableaux suivants).

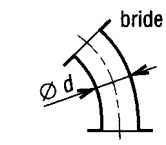
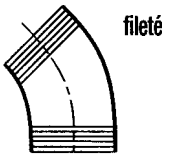
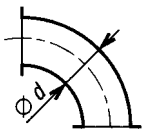
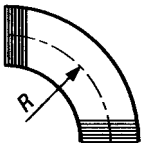
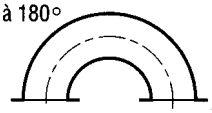
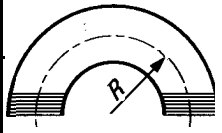
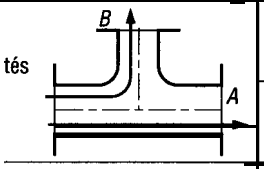
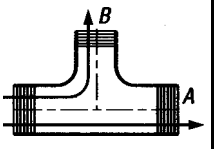
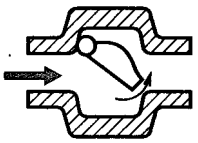
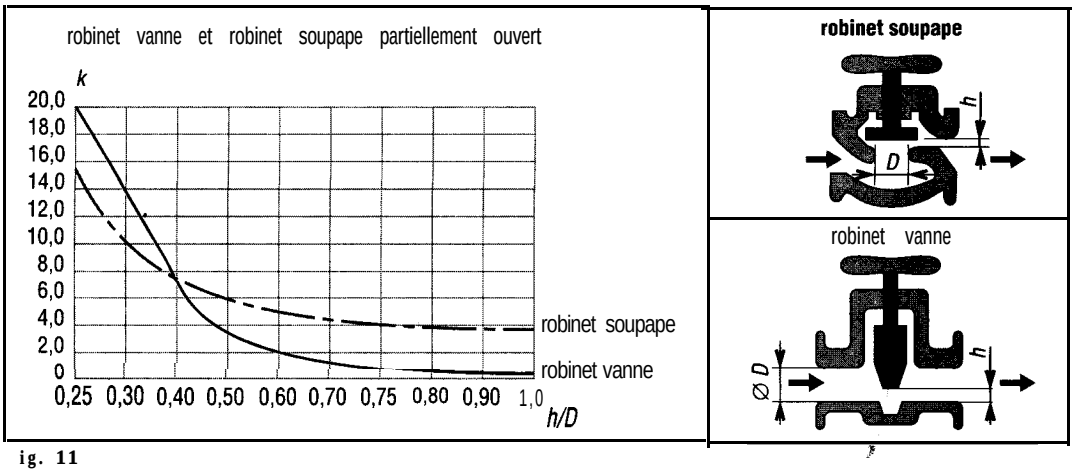
Éléments	d mm	avec brides					fileté				
		25	50	100	200	500	12	25	50	100	
coudes à 45° 	k	0,21	0,20	0,19	0,16	0,14	0,39	0,32	0,30	0,29	
coudes à 90° 	k	0,50	0,40	0,30	0,25	0,20	2,0	1,5	0,95	0,65	
	k (R grand)	0,40	0,30	0,20	0,15	0,10	1,0	0,70	0,40	0,24	
coudes à 180° 	k	0,41	0,35	0,30	0,25	0,20	2	1,5	0,95	0,65	
	k (R grand)	0,40	0,30	0,20	0,15	0,10					
tés 	k vas A	1,24	0,19	0,14	0,10	0,07	0,90	0,90	0,90	0,90	
	k vas B	1,0	0,80	0,64	0,58	0,41	2,4	1,8	1,4	1,1	
robinet soupape complètement ouvert	k	13	8,5	6,0	5,8	5,5	14	8,2	7,0	5,7	
robinet vanne (complètement ouvert)	k	0,8	0,35	0,16	0,07	0,03	0,3	0,25	0,16	0,11	
clapet anti-retour (complètement ouvert)	k	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	5,0	3,0	2,2	2,0	

Fig. 10



ig. 11

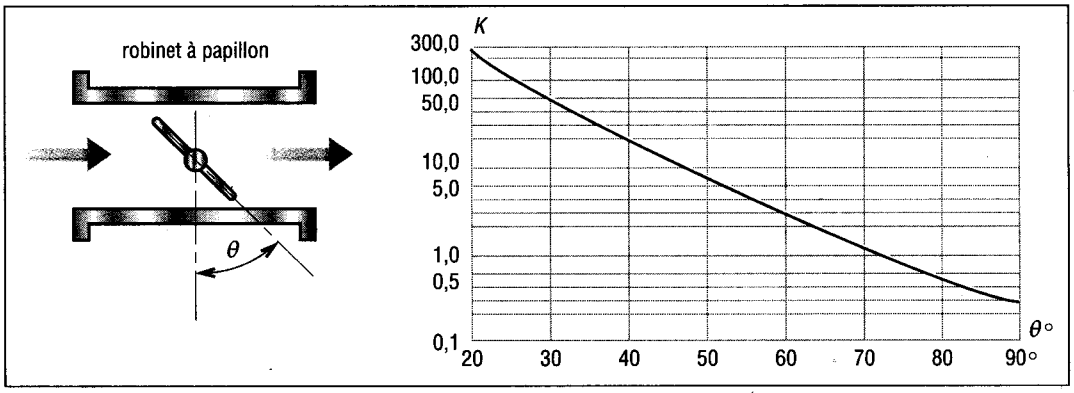


Fig. 12

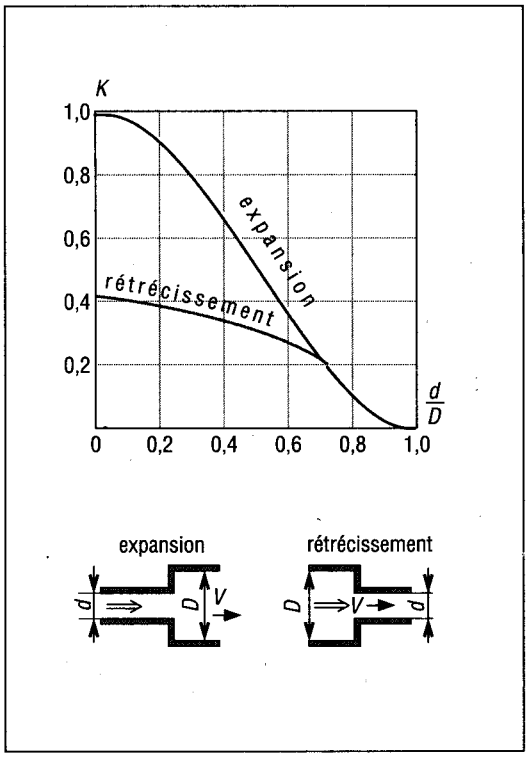


Fig. 13

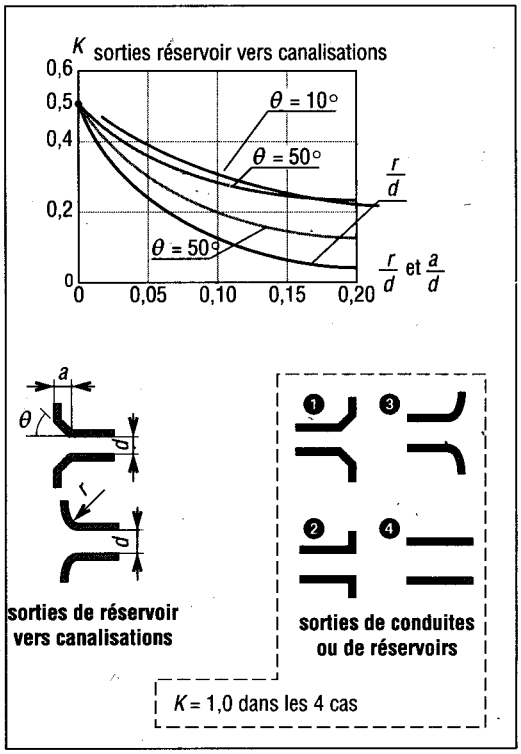


Fig. 14

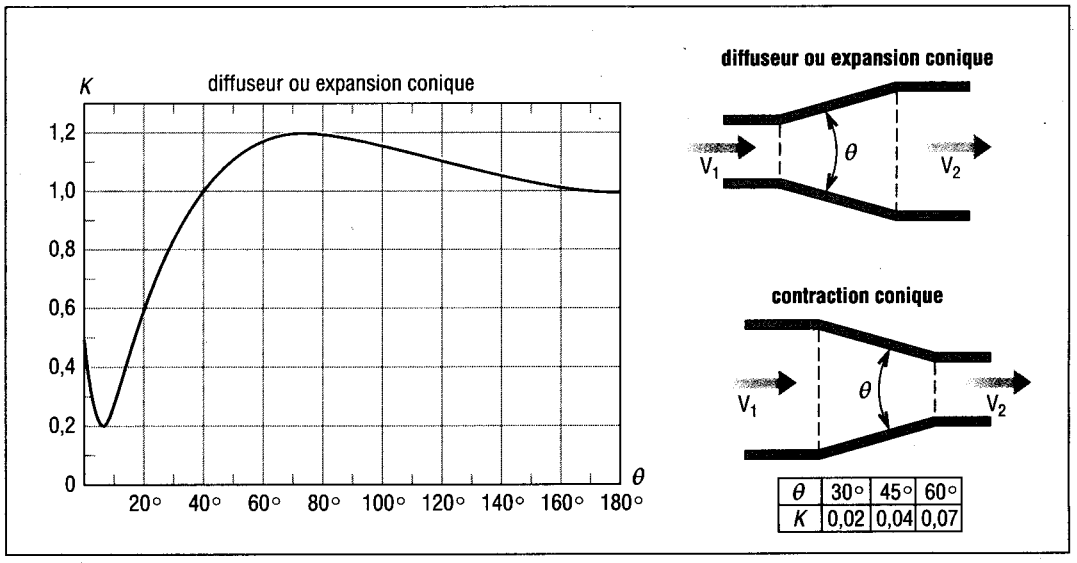


Fig. 15

Exemple : reprenons la conduite de l'exemple du paragraphe 1 (d = 100 ; R = 0,1 mm ; eau à 50 °C, ρ = 988 kg.m^{-3}, v = 0,5534 m^2.s^{-1}, V = 2 m.s^{-1}) avec des coudes bridés et un robinet à soupape partiellement ouvert (h/d = 0,5). Déterminons les pertes totales entre A et B, sachant que la conduite est horizontale.

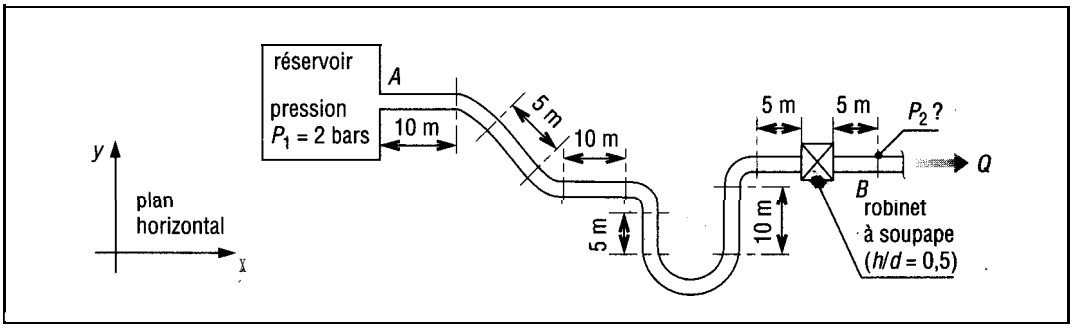


Fig. 16

a) Pertes régulières

Au total, 50 m de canalisations, les pertes engendrées sont celles obtenues dans l'exemple du paragraphe 1.

f = 0,02 ; Δp_R = 19.760 Pa.

b) Pertes singulières

$k_{total} = k_{(sortie\ réservoir)} + 2 \times k_{(coude\ à\ 45")} + 2 \times k_{(coude\ à\ 90")} + k_{(coude\ à\ 180°)} + k_{robinet}$

k_{total} = 0,5 + 2 x 0,19 + 2 x 0,30 + 0,30 + 6,0 = 7,78

$$\Delta p_S = \rho \frac{k V^2}{2} = 988 \times \frac{7{,}78 \times 2^2}{2} = 15\,373 \text{ Pa}$$

c) Pertes totales

$\Delta p = p_A - p_B = \Delta p_R + \Delta p_S$ = 19 760 + 15 373 = 35 133 Pa

$p_B = p_A - \Delta p$ = 200 000 − 35 133 = 164 866 = 1,65 bar

III - Loi de l'énergie - Équation de **Bernoulli**

Elle résulte du théorème de l'énergie cinétique (voir chapitre "énergétique" - paragraphe VII 1) appliqué à l'écoulement d'un fluide.

Pour un tube de courant, le travail des forces de pression et des forces de pesanteur est égal à la variation de l'énergie cinétique

Énergie à la section d'entrée + Énergie ajoutée (pompe, etc.) − Énergie dépensée (turbine, etc.) − Énergie perdue (pertes de charges régulières et singulières) = Énergie à la section de sortie

1. Cas 1: pertes de charges **négligées,** pas d'échange d'énergie

Le tube de courant est énergétiquement isolé et il y a conservation de l'énergie entre sa section d'entrée S_1 et sa section de sortie S,.

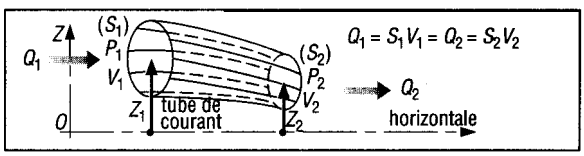


Fig. 17

Énergie à la section d'entrée S_1 = Énergie à la section de sortie S_2

Équation de Bernoulli pour 1 kg de fluide

$$\frac{P_1}{\rho} + gZ_1 + \frac{V_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + gZ_2 + \frac{V_2^2}{2} \text{ (en J.kg}^{-1}\text{)}$$

$\frac{1}{2} m V_1^2 = \frac{V_1^2}{2}$ et $\frac{1}{2} m V_2^2 = \frac{V_2^2}{2}$ caractérise l'énergie cinétique d'une masse m de fluide égale à 1 kg *(m = 1).*

$mgZ_1 = gZ_1$ et $mgZ_2 = gZ_2$ caractérisent les énergies potentielles.

$\frac{P_1}{\rho}$ et $\frac{P_2}{\rho}$ caractérisent l'énergie engendrée par la pression.

Remarque : la somme des trois grandeurs précédentes caractérise le potentiel énergétique du fluide à l'entrée ou à la sortie. L'équation peut encore s'écrire :

Variation d'énergie due au changement de pression	+	Variation d'énergie potentielle de pesanteur	+	Variation d'énergie cinétique	= 0

Pour 1 kg de fluide : $\frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = 0 \text{ (en J.kg}^{-1}\text{)}$

Variante en hauteur du fluide : $\frac{P_2 - P_1}{\rho g} + (Z_2 - Z_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = 0 \text{ (en m)}$

2. Cas 2 : avec échanges d'énergie et pertes de charge négligées

Une machine placée dans le tube de courant et échangeant de l'énergie avec le fluide modifie les caractéristiques de l'écoulement.

Si $W_{1/2}$ est l'énergie échangée entre la machine et le fluide, l'équation de Bernoulli s'écrit :

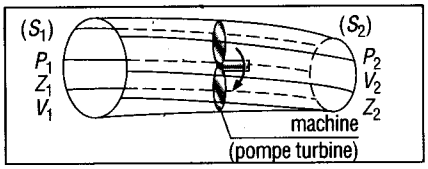


Fig. 18

Pour 1 kg de fluide

$$\frac{P_1}{\rho} + gZ_1 + \frac{V_1^2}{2} + W_{1/2} = \frac{P_2}{\rho} + gZ_2 + \frac{V_2^2}{2} \text{ (en J.kg}^{-1}\text{)}$$

Lorsque la machine est motrice (pompe, etc.), elle fournit de l'énergie au fluide $(W_{1/2} > 0)$ qui s'ajoute à celle de la section d'entrée S,.

Si la machine est réceptrice (turbine, moteur hydraulique, etc.), elle prend de l'énergie au fluide $(W_{1/2} < 0)$ qui se retranche de celle en S,.

3. Cas 3 : cas général avec échanges d'énergie et pertes de charge

Le frottement du fluide sur les parois des canalisations (pertes de charge régulières), les obstacles au passage fluide comme les coudes, tés, rétrécissement, etc. (pertes de

charge singulières) se traduisent par des pertes d'énergie du fluide. Ces pertes se retranchent de l'énergie dont dispose le fluide à l'entrée S_1 et Bernoulli s'écrit :

Pour 1 kg de fluide

$$\frac{P_1}{\rho} + g Z_1 + \frac{V_1^2}{2} + W_{1/2} - \left(\sum \frac{f L V^2}{2 d} + \sum \frac{k V^2}{2} \right) = \frac{P_2}{\rho} + g Z_2 + \frac{V_2^2}{2} \text{ (en J.kg}^{-1}\text{)}$$

$\sum \frac{f L V^2}{2 d}$ = somme des pertes de charge régulières entre S_1 et S_2 (voir paragraphe III)

$\sum \frac{k V^2}{2}$ = somme des pertes de charge singulières entre S_1 et S_2 (voir paragraphe II2).

4. Équation de **Bernoulli** corrigée (canalisations)

La vitesse du fluide qui entre ou sort d'une canalisation varie le long du rayon de la section transversale (figure 6 du paragraphe 13) et est maximale au milieu. La variation est d'autant plus grande que l'écoulement devient laminaire. Le coefficient correctif ***a*** prend en compte ce phénomène et permet de corriger l'énergie cinétique.

$$\frac{P_1}{\rho} + g Z_1 + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2} + W_{1/2} - \text{pertes} = \frac{P_2}{\rho} + g Z_2 + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2} \text{ (en J.kg}^{-1}\text{)}$$

Écoulement laminaire $R_e < 2\ 300$

$\alpha = 2$

Écoulement turbulent $(R_e > 2\ 300)$

m	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9
a	1,106	1,077	1,058	1,046	1,037

En écoulement turbulent : $\alpha = \frac{(1+m)^3 (2+m)}{4 (1+3m)(2+3m)}$ (Voir m fig. 6)

5. Exemples .

a) Exemple 1

Un réservoir permet d'alimenter en eau une installation industrielle. L'eau est transportée par une canalisation de diamètre d = 100 mm.

Déterminer la vitesse V_2 de sortie de l'eau si les pertes de charges sont négligées.

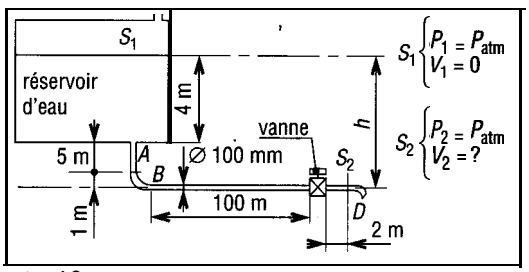


Fig. 19

Résolution

Appliquons le théorème de Bernoulli à l'ensemble du fluide considéré comme tube de courant. S_1 est la surface du réservoir ($P_1 = P_{atm}$; $V_1 = 0$; z_1 = h) et S_2 est la section de sortie de la canalisation ($P_2 = P_{atm}$; V_2 inconnue ; $z_2 = 0$).

$$\frac{P_1}{\rho} + g Z_1 + \frac{V_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + g Z_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

$$\frac{P_{atm}}{\rho} + g h + 0 = \frac{P_{atm}}{\rho} + (g \times 0) + \frac{V_2^2}{2} \text{ donne } \boxed{V_2 = \sqrt{2 g h}}$$

Application numérique : $V_2 = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 10} = 14 \text{ m.s}^{-1}$.

En pratique, les pertes de charge dans la canalisation diminuent la vitesse V_2.

b) Exemple 2

Le fioul contenu dans Ie réservoir source (1) est transféré vers un réservoir (2) par l'intermédiaire d'une pompe et d'une canalisation. Le débit est de 200 $L.s^{-1}$, les pertes de charge sont estimées à 30 $J.kg^{-1}$ entre A et B et à 100 $J.kg^{-1}$ entre C et D. La densité du fioul est de 0,85. Déterminer la puissance de la pompe si son rendement est de 0,8.

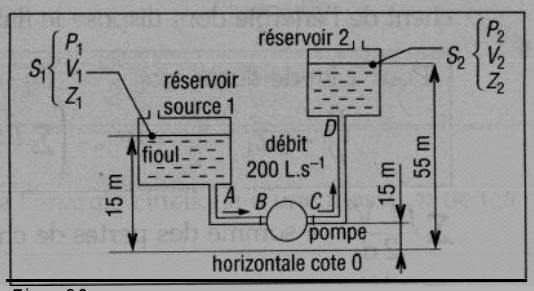


Fig. 20

Résolution

Appliquons Bernoulli entre les surfaces S_1 et S_2 des deux réservoirs. $P_1 = P_2 = P_{atm}$ = pression atmosphérique ; $V_1 = V_2 = 0$ (les niveaux des réservoirs varient très lentement).

$$\frac{P_1}{\rho} + g Z_1 + \frac{V_1^2}{2} + W_{1/2} - \text{pertes} = \frac{P_2}{\rho} + g Z_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

$$\frac{P_{atm}}{\rho} + 15g + 0 + W_{1/2} - (30 + 100) = \frac{P_{atm}}{\rho} + 55g + 0$$

$W_{1/2}$ = (30 + 100) + 9,81 (55 − 15) = 522,4 $J.kg^{-1}$

La pompe doit délivrer 522,4 joules pour transférer chaque kg de fluide.
Débit massique : $Q_m = \rho Q_V$ = 850 x 0,2 = 170 $kg.s^{-1}$
Puissance délivrée par la pompe : $W_{1/2}$ x Q_m = 522,4 × 170 = 88 808 W.

Puissance de la pompe : $\frac{88\,808}{\text{rendement}} = \frac{88\,808}{0,8} =$ 111 010 W ≃ 111 kW.

c) Exemple 3

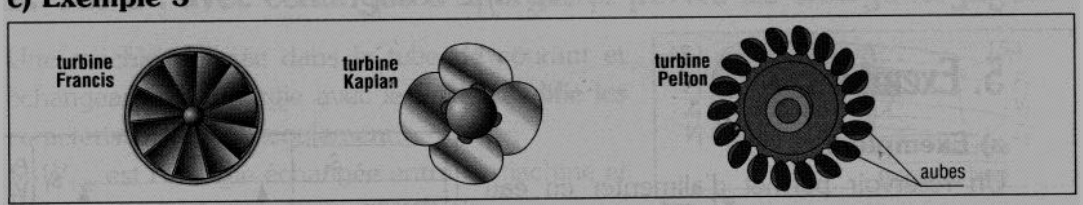


Fig. 21

Un barrage est équipé d'une turbine Pelton dont les aubes sont entraînées par un jet d'eau sous pression. Le diamètre de la conduite de sortie est de 2,5 m et le débit de 25 $m^3.s^{-1}$.
Déterminer "la puissance disponible sur l'arbre de la turbine si son rendement est de 0,7 et si les pertes de charge sont évaluées à 5 m d'eau.

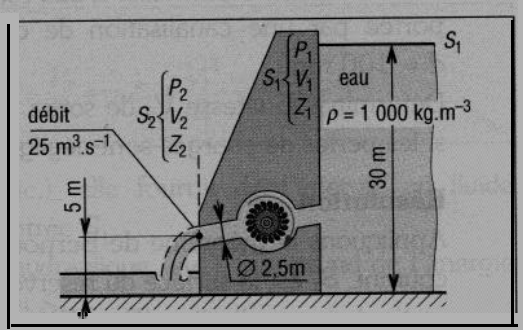


Fig. 22

Résolution

Appliquons Bernoulli entre la surface du lac artificiel (S,) et la section transversale (S_2) située juste à la sortie de la canalisation d'évacuation.
$P_1 = P_2$ = pression atmosphérique ; $V_1 = 0$ (le niveau du lac baisse très lentement) ; z_1 = 30 m ; z_2 = 5 m ; ρ = 1000 $kg.m^{-3}$.

$$V_2 = \frac{Q_V}{S_2} = \frac{25}{\pi \times 1{,}25^2} = 5{,}093 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{W_{1/2}}{g} - \text{pertes} = \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\frac{P_{atm}}{\rho g} + 30 + 0 - \frac{W_{1/2}}{g} - 5 = \frac{P_{atm}}{\rho g} + 5 + \frac{5{,}093^2}{2g}$$

$$W_{1/2} = 9{,}81(30 - 10) - \frac{5{,}093^2}{2} = 183{,}23 \text{ J.kg}^{-1}$$

Débit massique : $Q_m = \rho Q_V = 1\,000 \times 25 = 25\,000$ kg.s^{-1}.
Puissance sur l'arbre : $W_{1/2}$ x Q_m x rendement = 183,23 x 25 000 x 0,7 ≃ 3,2 MW.

IV - Théorème de la quantité de mouvement (théorème d'Euler)

Il résulte de l'application du théorème de la quantité de mouvement (chapitre "quantité de mouvement" - paragraphe 12) à l'écoulement d'un fluide.

Complémentaire de la loi sur l'énergie (Bernoulli), le théorème permet de déterminer les efforts exercés par les fluides en mouvement sur les objets qui les environnent.

Dans le cas d'un fluide, tout se passe comme si la masse Δm de fluide entrant par S_1 était instantanément transportée et passait par S_2 pendant l'intervalle de temps At. Il en résulte que la variation de la quantité de mouvement entre S_1 et S_2 est égale à $Q_m (\vec{V_2} - \vec{V_1})$ avec Q_m le débit massique.

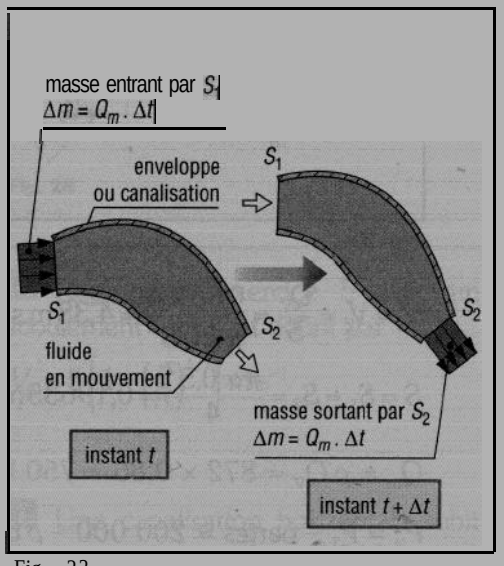


Fig. 23

Énoncé : la résultante $(\vec{\Sigma F})$ des actions mécaniques extérieures exercées sur le fluide isolé (fluide contenu dans l'enveloppe limité par S_1 et S_2) est égale à la variation de la quantité de mouvement du fluide qui entre en S_1 et sort par S,.

$$\vec{\Sigma F} = \vec{mg} + \vec{P_1 S_1} + \vec{P_2 S_2} + \vec{R} = Q_m (\vec{V_2} - \vec{V_1})$$

$\vec{mg}$: poids du fluide isolé
$\vec{P_1 S_1}$: résultante des forces de pression sur la section S_1
$\vec{P_2 S_2}$: résultante des forces de pression sur la section S_2
$\vec{R}$: résultante des actions exercées par l'enveloppe ou la canalisation sur le fluide

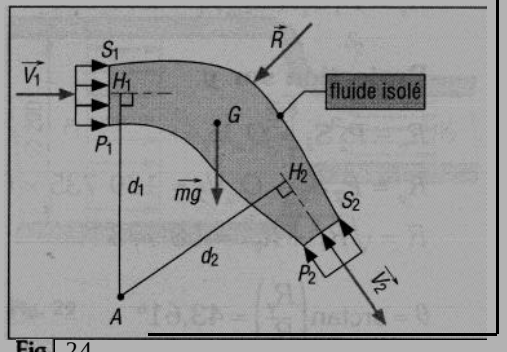


Fig. 24

Remarque : la relation est une relation vectorielle donnant des équations de projection sur des axes judicieusement choisis.

Écrivons l'équation du moment cinétique en A relative au théorème précédent :

$$M_A(\overrightarrow{mg}) + M_A(\overrightarrow{P_1S_1}) + M_A(\overrightarrow{P_2S_2}) + M_A(\overrightarrow{R}) = - M_A(\overrightarrow{Q_mV_2}) + M_A(\overrightarrow{Q_mV_1})$$

$$M_A(\overrightarrow{mg}) - P_1S_1d_1 + P_2S_2d_2 + M_A(\overrightarrow{R}) = + Q_mV_2d_2 - Q_mV_1d_1$$

Exemple : déterminons la résultante des actions exercées par un écoulement de pétrole sur un coude horizontal à 90". P_1 = 2 bars, les pertes de charges sont égales à 1,2 m de pétrole (872 $kg.m^{-3}$). Le débit est de 0,86 $m^3.s^{-1}$, le diamètre du coude de 0,5 m et le poids du fluide sera négligé.

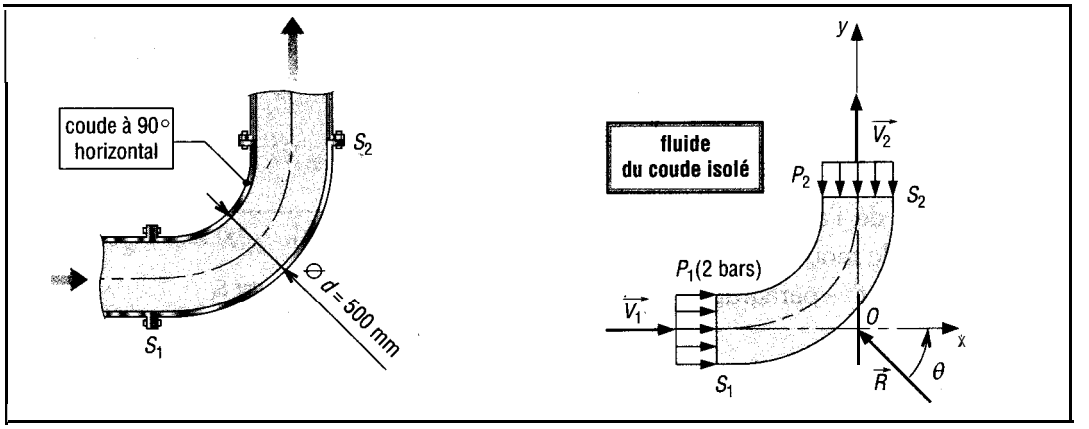


Fig. 25

$$V_1 = V_2 = \frac{Q_V}{S} = \frac{0,86 \times 4}{\pi \times 0,5^2} = 4,38\ m.s^{-1}$$

$$S = S_1 = S_2 = \frac{\pi \times 0,5^2}{4} = 0,19635\ m^2$$

$$Q_m = \rho Q_V = 872 \times 0,86 = 750\ kg.s^{-1}$$

$P_2 = P_1$ - pertes = 200 000 - $\rho g h$ = 200 000 - 872 x 9,81 x 1,2 = 189 735 Pa

Théorème d'Euler appliqué au fluide du coude isolé (R est la résultante des actions exercées par le coude sur le fluide) :

$$\overrightarrow{R} + \overrightarrow{P_1S_1} + \overrightarrow{P_2S_2} = Q_m(\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1})$$

Projection sur x

$$-R_x + P_1S_1 = -Q_mV_1$$

$$R_x = P_1S_1 + Q_mV_1 = 200\ 000 \times 0,19635 + 750 \times 4,38 = 42\ 555\ N$$

Projection sur y

$$R_y - P_2S_2 = Q_mV_2$$

$$R_y = P_2S_2 + Q_mV_2 = 189\ 735 \times 0,19635 + 750 \times 4,38 = 40\ 539\ N$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 58\ 773\ N$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = 43,61°$$

EXERCICES À RÉSOUDRE

❑ Déterminer la vitesse moyenne de l'eau circulant dans une canalisation de 260 mm de diamètre avec un débit de 6 000 m^3 par jour.

Réponse

1,3 $m.s^{-1}$.

2 Déterminer la taille d'un tuyau devant transporter 150 m^3 par minute à la vitesse moyenne de 5 $m.s^{-1}$.

❑ Si le débit dans la tuyauterie est de 252 litres par seconde, déterminer les vitesses moyennes d'écoulement en A et B.

Réponse

V_A = 2 $m.s^{-1}$; V_B = 8 $m.s^{-1}$.

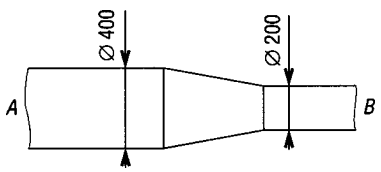


Fig. 26

❑ Deux canalisations A (0 140 mm) et B (0 80 mm) (alimentent un réservoir parallélépipédique (2 x 3 x 5 m). La vitesse du fluide en A est de 0,62 $m.s^{-1}$, celle en B de 0,5 $m.s^{-1}$.
a) Déterminer la vitesse de montée V_h de l'eau dans le réservoir. b) Quel est le temps de remplissage depuis h = 0 ?

Réponse

V_h = 0,002 $m.s^{-1}$; t = 2 488 secondes.

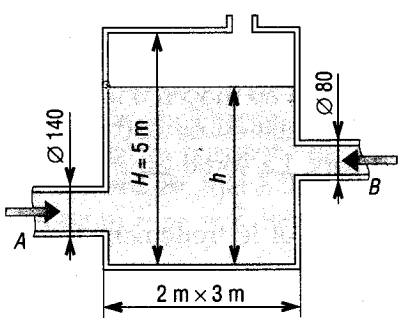


Fig. 27

❑ La vitesse en un point A d'un écoulement laminaire est donnée par la relation :

$$V_A = 5\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) m.s^{-1}.$$

Déterminer la vitesse moyenne de l'écoulement et les débits volumiques et massiques si ρ = 850 $kg.m^{-3}$.

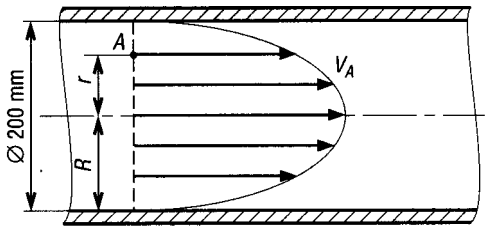


Fig. 28

❑ Reprendre l'exercice 5 avec un écoulement turbulent défini par :

$$V_A = 5\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{1/7}\right) m.s^{-1}.$$

❑ Une canalisation horizontale subit un rétrécissement. L'eau (1 000 $kg.m^{-3}$) arrive en S_1 à la vitesse V_1 = 1 $m.s^{-1}$ et à la pression de 1 bar.
Si en S_2 le diamètre est divisé par deux, déterminer P_2 et V_2.

Réponse

V_2 = 4 $m.s^{-1}$; P_2 = 0,925 bar.

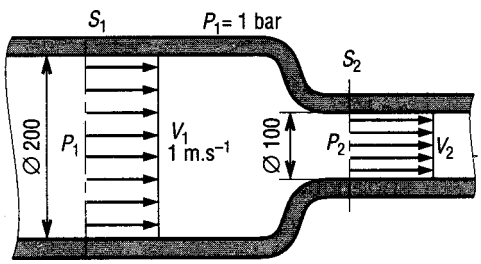


Fig. 29

❑ La vidange d'un réservoir d'essence est réalisée par siphonnage à l'aide d'un tuyau souple. Compte tenu des dimensions de la figure, calculer la vitesse et le débit d'essence au bas du tuyau. Les pertes de charge sont négligées.

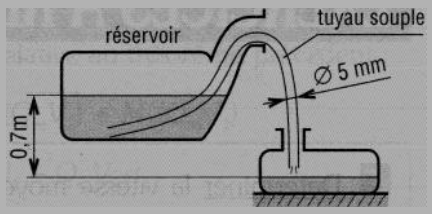


Fig. 30

Réponse

$v = 3{,}7\ m.s^{-1}$; $Q_v = 72{,}7\ cm^3.s^{-1}$

9 Un tube de pitot permet de mesurer la vitesse en un point d'un écoulement (liquide ou gaz) dont Ie débit est peu fluctuant. L'alignement doit être correct pour obtenir des résultats précis.

P_1 et V_1 sont les caractéristiques à l'entrée S_1 du tube. P_0 et V_0 sont Ies caractéristiques de l'écoulement à mesurer (V_0 = vitesse dans l'axe du tube).

Établir la relation entre V_0 et la différence de pression $(P_1 - P_0)$.

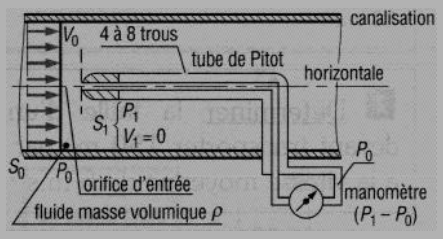


Fig. 31

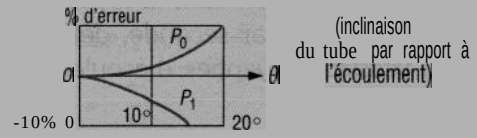


Fig. 32

❑ Le jet d'eau d'une fontaine publique est obtenu grâce à une pompe immergée. Le débit d'eau est de 20 $L.s^{-1}$ et la hauteur du jet de 10 m.

a) Déterminer la vitesse du jet à sa sortie en C.

b) Quelle doit être la puissance de la pompe si son rendement est de 0,85 ?

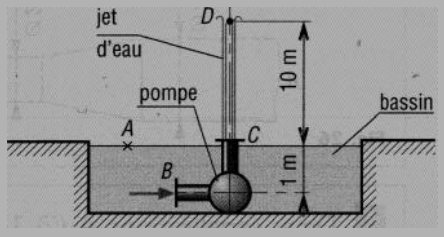


Fig. 33

Réponse

$V_d = 14\ m.s^{-1}$; 2 308 W.

11 Une torpille se déplace à 25 $m.s^{-1}$, 8 m sous la surface de l'océan (1 025 $kg.m^{-3}$). En A, l'eau et la torpille sont à Ia même vitesse. En C, point latéral, la pression est de 0,7 bar.

Déterminer la pression d'arrêt P_1 et la vitesse relative en C entre l'eau et la torpille.

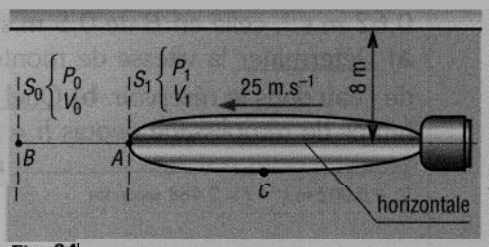


Fig. 34

12 De l'essence à 20 °C (680 $kg.m^{-3}$) est pompée au moyen d'une canalisation de 150 mm de diamètre et de 8 km de longueur. Le débit est de 180 $m^3.h^{-1}$. La pompe agit à I'entrée et fournit une pression de 30 bars. La sortie est à la pression atmosphérique (P_{atm} = 1,013 bar) 180 m plus haut.

Déterminer les pertes régulières dans la conduite et le frottement f entre fluide et canalisation.

Réponse

$p_{rl} = 255$ m ; $f = 0{,}012$.

13 Une petite installation de pompage est utilisée pour alimenter le réservoir d'une habitation. L'installation se compose d'une pompe (rendement 0,9), de 60 m de tuyaux en PVC de 40 mm de diamètre, de deux coudes à 45" et de deux coudes à 90".
Si le débit est de 3 $L.s^{-1}$, déterminer la puissance de la pompe.
a) En négligeant les pertes de charge.
b) En tenant compte des pertes.

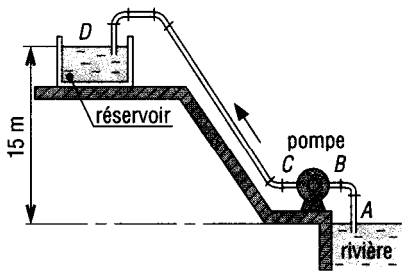


Fig. 35

❑ La canalisation proposée transporte du pétrole. Elle se compose d'une conduite de diamètre d_1 = 30 cm, R_1 = 0,005 cm pour la rugosité, longueur 150 m et d'une conduite de diamètre d_2 = 15 cm, rugosité R_2 = 0,004 cm, longueur 90 m. Le débit est de 0,06 $m^3.s^{-1}$. Calculer la différence de pression $P_1 - P_2$ en tenant compte des pertes de charge. p = *870* $kg.m^{-3}$;
μ = 1,375.10^{-3} $NS.m^{-2}$

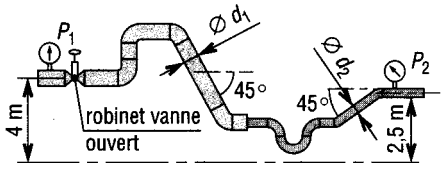


Fig 36

Réponse

$\Delta p_{\text{régulières}}$ = 53 920 Pa ; $\Delta p_{\text{singulières}}$ = 12 710 Pa ; $P_1 - P_2$ = *58 500* Pa.

❑ L'installation proposée fait partie d'un parc d'attractions. La pompe aspire l'eau depuis une piscine et la refoule en D, haut d'un toboggan, à la vitesse de 3,5 $m.s^{-1}$. Les pertes de charge sont évaluées à 30 $J.kg^{-1}$ entre A et B, à 25 $J.kg^{-1}$ entre C et D. Calculer la puissance de la pompe nécessaire à l'installation si son rendement est égal à 0,9.

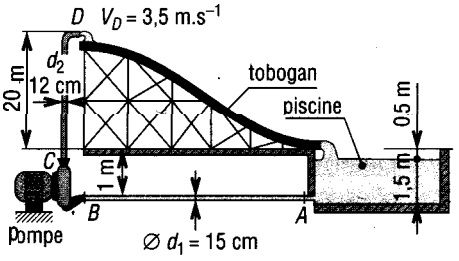


Fig. 37

❑ Le schéma proposé représente l'implantation hydraulique d'un vérin simple effet vertical (force développée = 3 000 daN, vitesse de sortie de la tige = 1 $cm.s^{-1}$).
a) Déterminer la vitesse V_E du fluide en E, dans la canalisation à l'entrée du vérin, et la pression p_E correspondante.
b) Les pertes de charge étant négligées, quelle doit être la puissance de la pompe si son rendement est égal à 0,9 ?
c) Cas où $p_D - p_E$ = 2 bars = (pertes di tributeur).

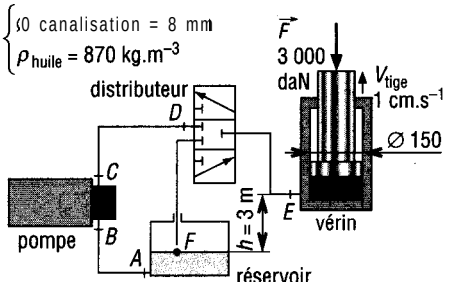


Fig. 38

Réponse

p_E = 17 bars ; V_E = 3,5 $m.s^{-1}$; 340 W ; 380 W.

❑ Deux canalisations de diamètres différents (500 mm et 250 mm) sont reliées par un convergent. Le fluide véhiculé est du pétrole (890 $kg.m^{-3}$), débit 1 $m^3.s^{-1}$.
Déterminer l'action exercée par le fluide sur le cône si la pression d'entrée (en S,) est de 3 bars et si les pertes de charge sont négligées. (x, y) est un plan horizontal.

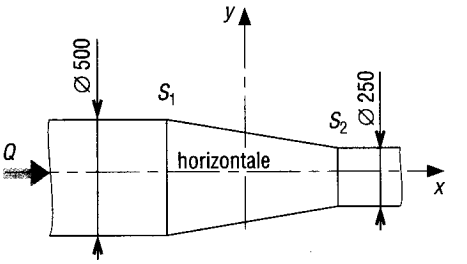


Fig. 39

Réponse

$R_x = -39\,000$ N ; $R_y = 0$; $R_z = mg$.

❑ Reprendre l'exercice 17 avec de l'eau (1 000 $kg.m^{-3}$) ; un coude convergent horizontal à 180" ; p_1 = 5 bars et p_2 = 3 bars ; des diamètres de 600 mm et 300 mm.
Déterminer l'action du fluide sur le coude.

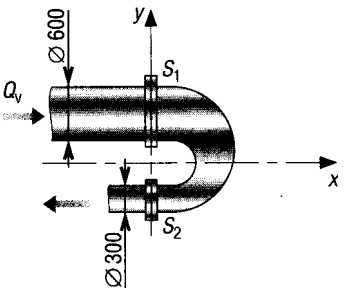


Fig. 40

19 Un raccord bridé horizontal composé de deux coudes à 45" relie deux canalisations de diamètre d = 400 mm distantes de h = 1 m.
Le débit d'eau est Q_V = 1 $m^3.s^{-1}$;
p_1 = 5 bars, p_2 = 4,8 bars,
ρ = 1000 $kg.m^{-1}$.
Déterminer la résultante des actions exercées par le fluide sur les raccords bridés (S, et S,) ainsi que le couple C supporté.

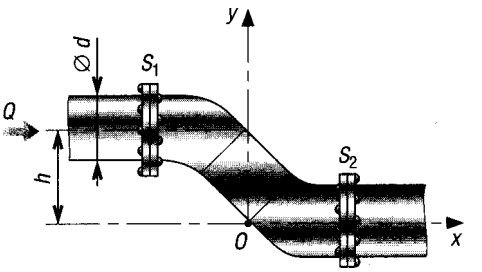


Fig. 41

20 Un tourniquet d'arrosage pour pelouse à deux bras AB et AC tourne à la vitesse constante ω dans un plan horizontal (x, y), autour de l'axe (A, z). Le mouvement d'entraînement est fourni par un débit d'eau Q arrivant en S_1 et sortant en S_2 (B) et S', (C) à la vitesse absolue V_2 (aire de sortie S = S_2 = S',).

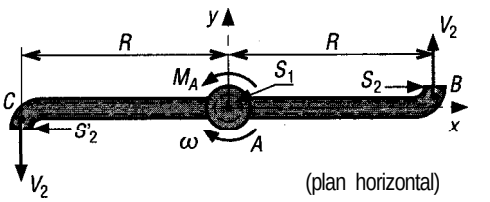


Fig. 42

a) Déterminer la vitesse absolue V_2 en fonction de Q et ω.
b) Établir la relation liant le couple résistant M_A avec ω et les conditions d'écoulement.

Réponse

$V_2 = \frac{Q}{2S} - \omega R$;
$M_A = \rho Q R\left(\frac{Q}{2S} - \omega R\right)$.

ANNEXE 1

CENTRE DE GRAVITÉ CENTRE DE MASSE BARYCENTRE

OBJECTIFS

- Définir les notions de centre de gravité, centre de masse et de barycentre.
- Traiter le cas des solides composés.
- Donner un formulaire général.

I - Centredegravité oucentredemasse

1. Définitions

Centre de masse : il est lié à la notion de masse m et représente le point central "Je l'ensemble de toutes les masses constituant un objet ou un système matériel et est confondu avec le centre de gravité G.

Centre de gravité : il est le point d'application du poids ou du vecteur-poids $\vec{P}$ d'un objet. Cette propriété est vérifiée quelle que soit la position du système dans l'espace.

Exemple

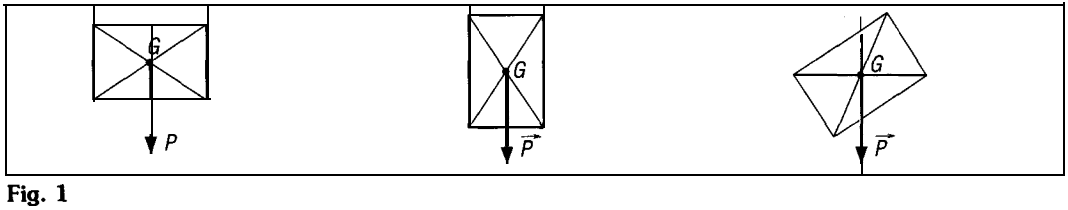


Fig. 1

Remarque : centre de gravité et centre de masse font intervenir la masse volumique ρ du matériau.

$m = \rho \cdot V$	$P = mg$	m : masse du solide en kg ρ : masse volumique en $kg.m^{-3}$ V : volume du solide en m^3 P : poids du solide en N

2. Détermination de la posiion du centre de gravité G

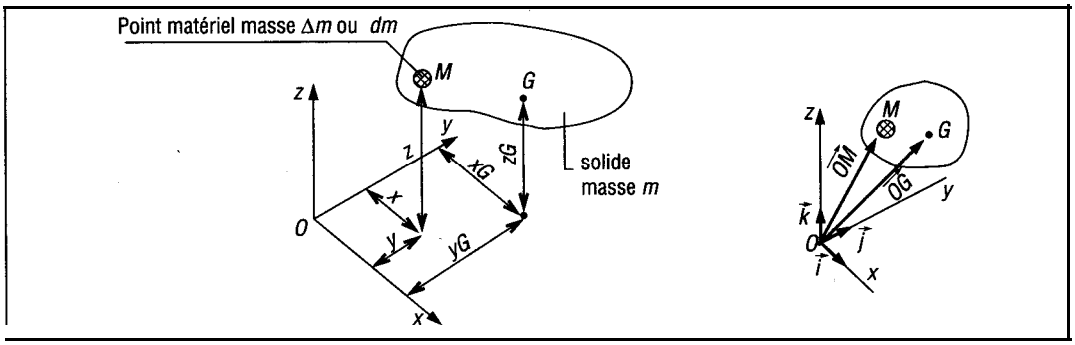


Fig. 2

M est un point matériel de masse Am ou dm appartenant au solide (ou système matériel) de masse m . L'ensemble du solide est constitué de n points matériels $M_1, M_2, \ldots,$ M_n de masse Am,, Am,, . . . , Am,, tels que :

$$\text{Am, + Am, + . . . } + \Delta m_n = \Sigma\, \Delta m = \int dm = m$$

La position $\overrightarrow{OG}$ du centre de gravité est définie par la relation :

$$m\ \overrightarrow{OG} = \text{Am, } \overrightarrow{OM_1} + \text{Am, } \overrightarrow{OM_2} + \ldots + \text{Am, } \overrightarrow{OM_n} = \Sigma\, \overrightarrow{OM}\, \Delta m = \int \overrightarrow{OM}\, dm$$

En remarquant que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ et $\overrightarrow{OG} = x_G\,\vec{i} + y,\ \vec{j} + z_G\,\vec{k}$, en projetant la relation précédente sur les axes x, y, z, on obtient :

$$x_G = \frac{\Delta m_1 x_1 + \Delta m_2 x_2 + \ldots + \Delta m_n x_n}{\Delta m_1 + \Delta m_2 + \ldots + \Delta m_n} = \frac{\Sigma\, x \Delta m}{m} = \frac{\int x\,dm}{m}$$

$$y_G = \frac{\Delta m_1 y_1 + \Delta m_2 y_2 + \ldots + \Delta m_n y_n}{\Delta m_1 + \Delta m_2 + \ldots + \Delta m_n} = \frac{\Sigma\, y \Delta m}{m} = \frac{\int y\,dm}{m}$$

$$z_G = \frac{\Delta m_1 z_1 + \Delta m_2 z_2 + \ldots + \Delta m_n z_n}{\Delta m_1 + \Delta m_2 + \ldots + \Delta m_n} = \frac{\Sigma\, z \Delta m}{m} = \frac{\int z\,dm}{m}$$

3. Propriétés

Si un solide possède un plan, un axe ou un centre de symétrie, son centre de gravité est situé respectivement dans le plan de symétrie, sur l'axe de symétrie ou au centre de symétrie.

II - Barycentre

Le barycentre représente le centre géométrique d'un objet (volume, surface, ligne) et ne fait pas intervenir la notion de masse volumique ; il ne tient compte que de la géométrie. Si la masse volumique d'un objet est la même en tout point, autrement dit si l'objet est homogène, le barycentre est confondu avec le centre de gravité. Si le matériau n'est pas homogène, barycentre et centre de gravité sont deux points différents.

III - Centre de gravité (ou barycentre) des solides composés

Les solides peuvent être décomposés en éléments de forme géométrique simple dont les centres de gravité sont connus.
Dans le cas de la figure 3 :

$m = m_1 + m_2 + m_3$

$m \cdot x_G = m_1 x_{G1} + m_2 x_{G2} + m_3 x_{G3}$

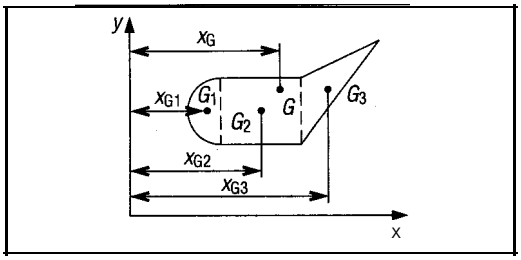


Fig. 3

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{OG_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\Sigma m_i \overrightarrow{OG_i}}{m}$$

Les équations de projection sont analogues à celles du paragraphe I-2.

$$x_G = \frac{\Sigma m_i x_{Gi}}{m} \qquad y_G = \frac{\Sigma m_i y_{Gi}}{m} \qquad z_G = \frac{\Sigma m_i z_{Gi}}{m}$$

avec $\overrightarrow{OG_i} = x_{Gi} \cdot \vec{i} + y_{Gi} \cdot \vec{j} + z_{Gi} \cdot \vec{k}$.

Remarque : le centre de gravité d'un solide composé de deux autres solides de centres de gravité G_1 et G_2 est situé sur la droite G_1G_2.

Exemple

Déterminons le centre de gravité d'un solide composé d'un cylindre en aluminium (0 40 ; épaisseur 12 mm ; 2 700 kg.m^{-3}) collé à une tige en cuivre (0 10 ; longueur 100 mm ; 9 000 kg.m^{-3}).

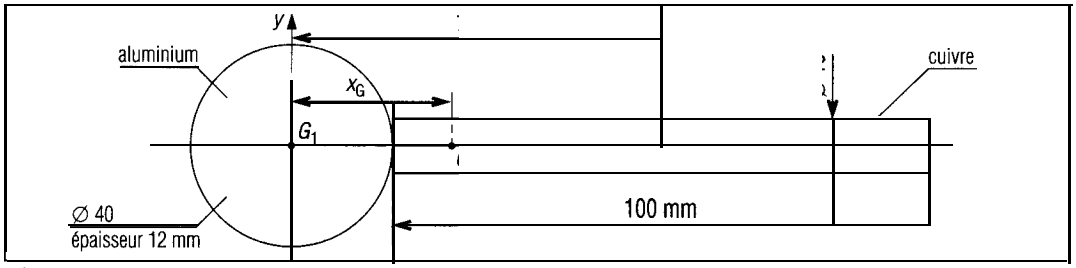


Fig. 4

$m_1 = \rho_1 V_1 = 2{,}7 \times (1{,}2 \times \pi \times 2^2) = 40{,}72$ g (avec $\rho_1 = 2{,}7$ g.cm^{-3})

$m_2 = \rho_2 V_2 = 9 \times (10 \times \pi \times 0{,}5^2) = 70{,}69$ g (avec $\rho_2 = 9$ g.cm^{-3})

$$x_G = \frac{m_1 x_{G1} + m_2 x_{G2}}{m_1 + m_2} = \frac{40{,}72 \times 0 + 70{,}69 \times 70}{40{,}72 + 70{,}69} = 44{,}41 \text{ mm}$$

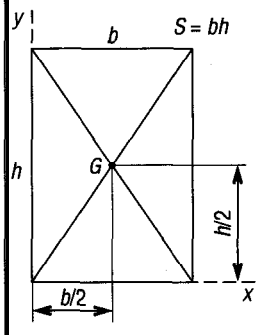
x est axe de symétrie, G est situé sur cet axe et y, = 0.

Remarque : dans le cas où les deux cylindres sont du même matériau, $\rho_1 = \rho_2$ et

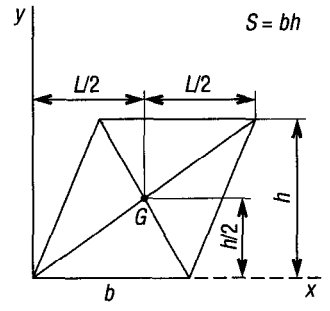
$$x'_G = \frac{v_1 x_{G1} + v_2 x_{G2}}{v_1 + v_2} = \frac{\left(1{,}2 \times \pi \times 2^2\right) \times 0 + \left(10 \times \pi \times 0{,}5^2\right) \times 70}{15{,}08 + 7{,}85} \simeq 24 \text{ mm}$$

FORMULAIRE Centre de gravité, centre de masse, barycentre

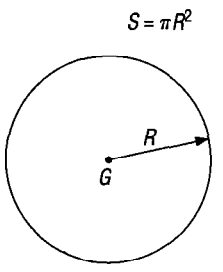
rectangle



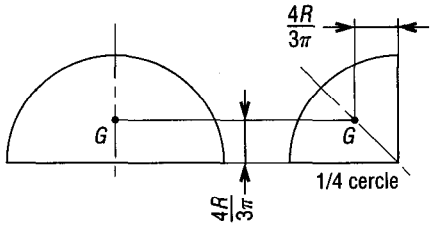
parallélogramme



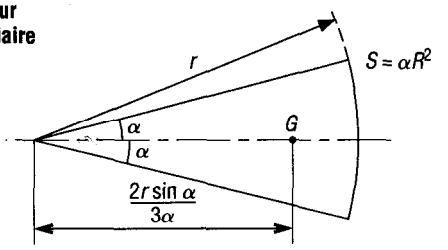
cercle



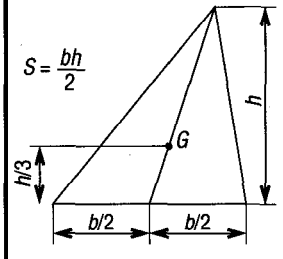
1/2 cercle



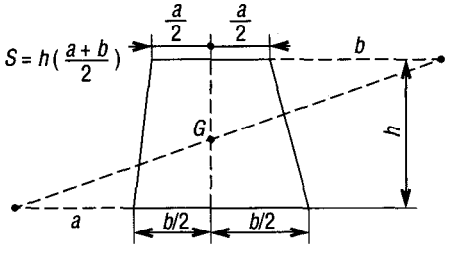
secteur circulaire



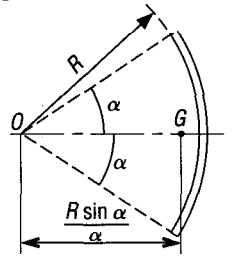
triangle



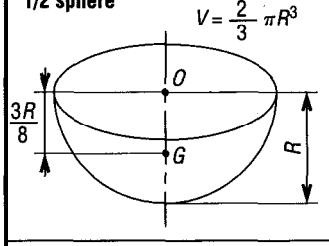
trapèze



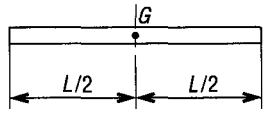
tige circulaire



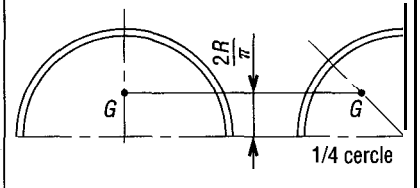
1/2 sphère



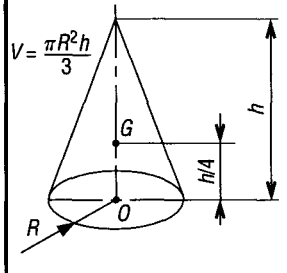
tige droite



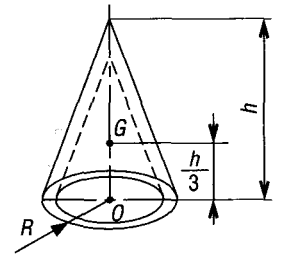
tige 1/2 cercle



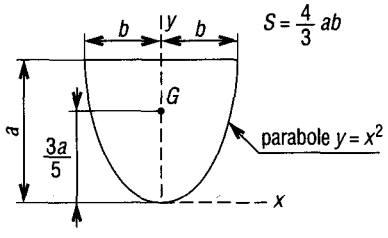
cône



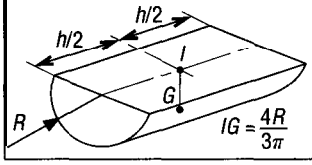
cône creux



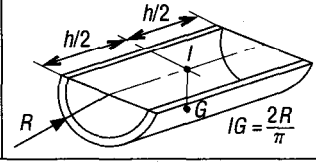
surface parabolique



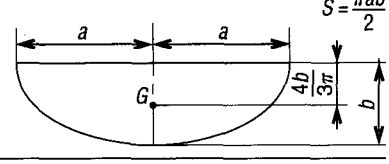
1/2 cylindre



1/2 cylindre creux



1/2 ellipse



ANNEXE 2

MOMENTS QUADRATIQUES

OBJECTIFS

- Définir les notions de moments quadratiques par rapport à un axe et par rapport à un point et de rayon de gyration.
- Indiquer le cas des surfaces composées et les formules liées aux changements d'axes.
- Donner un formulaire général et les tableaux de dimensions des poutres usuelles (1, U).

I - Moment quadratique d'une surface par rapport à un axe

1. Définitions

Les moments quadratiques de l'élément de surface AS par rapport aux axes x et y sont :

$$\Delta I_x = y^2 \cdot \Delta S$$
$$\Delta I_y = x^2 \cdot \Delta S$$

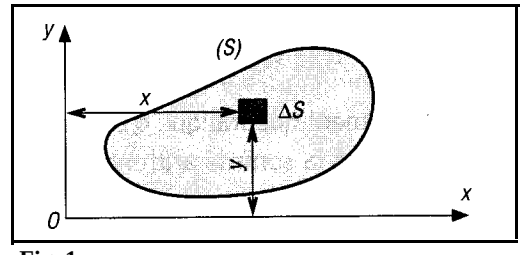


Fig. 1

Les moments quadratiques ou d'inertie de la surface S complète sont :

$$I_x = \sum_{(S)} y^2 \Delta S = \int y^2 \, dS$$
$$I_y = \sum x^2 \Delta S = \int x^2 \, dS$$

unités : mm^4, cm^4, ...

2. Rayon de gyration

Il est défini comme la racine carrée du moment d'inertie divisée par l'aire S de la surface.

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}} \quad \text{ou} \quad I_x = S\, r_x^2$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}} \quad \text{ou} \quad I_y = S\, r_y^2$$

II - Moment quadratique d'une surface par rapport à un point

Le moment quadratique de l'élément de surface AS par rapport au point A, encore appelé moment polaire (pôle A) est :

$$\Delta I_A = r^2 \cdot \Delta S$$

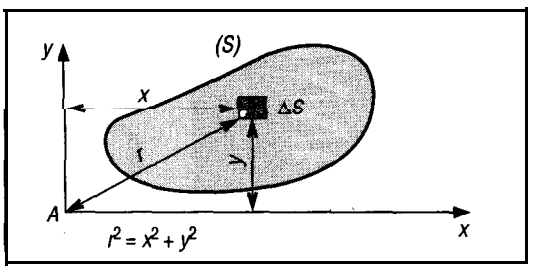


Fig. 2

Le moment quadratique de la surface complète est égal à :

$$I_A = \sum_{(S)} r^2 . \mathrm{AS} = \int r^2 . \mathrm{d}S$$

unités : mm^4, cm^4, . . .

Remarque : d'après le théorème de Pythagore, $r^2 = x^2 + y^2$ (AS est très petit) ; il en résulte que :

$$I_A = I_x + I_y$$

Le moment d'inertie par rapport au pôle A est égal à la somme des moments d'inertie par rapport aux axes x et y.

III - Moment quadratique des surfaces composées

Le moment quadratique d'une surface S, composée de plusieurs surfaces $S_1, S_2, \ldots, S_n$, est égal à la somme arithmétique des moments quadratiques des **n** surfaces.

$$I_x(S) = I_x(S_1) + I_x(S_2) + \ldots + I_x(S_n)$$
$$I_y(S) = I_y(S_1) + I_y(S_2) + \ldots + I_y(S_n)$$
$$I_A(S) = I_A(S_1) + I_A(S_2) + \ldots + I_A(S_n)$$

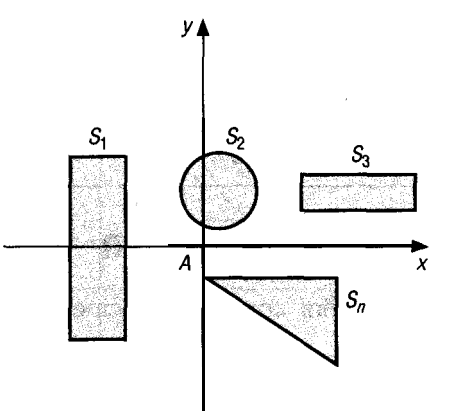


Fig. 3

IV • Formule de changement d'axe, formule de Huygens

x_G et y_G passent par le centre de gravité G ou barycentre de la surface. x est parallèle à x_G et y à y_G ; dx et dy sont les distances entre les axes et S l'aire de la surface.

Remarque : $d^2 = d_x^2 + d_y$

$$I_x = Ix_G + S\,d_x^2$$
$$I_y = Iy_G + S\,d_y^2$$
$$I_A = I_G + S\,d^2$$
$$I_{xy} = Ix_G\,y_G + S\,d_x\,d_y$$

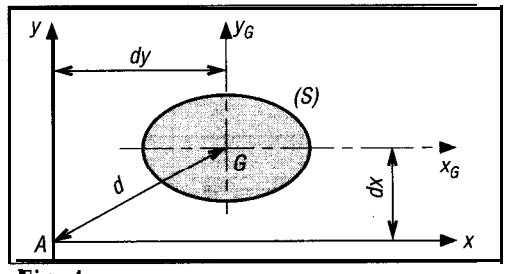


Fig. 4

V • Produits d'inertie

1. Définitions

Le produit d'inertie de l'élément de surface AS par rapport aux axes x et y est défini par :

$$\Delta Ixy = xy\Delta S$$

Pour la surface S complète :

$$Ixy = \sum_{(S)} xy\Delta S = \int xy\,dS$$

unités : mm^4, cm^4, m^4

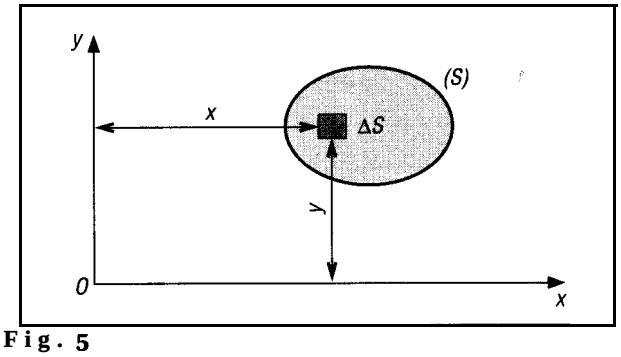


Fig. 5

Remarque : un produit d'inertie peut être positif ou négatif. Il est nul lorsque l'un des axes est axe de symétrie.

2. Formules de rotation d'axe

Axes principaux d'inertie : ce sont les axes passant par le barycentre de la surface et pour lesquels les moments quadratiques sont maximum et minimum ($I_{x\ maxi}$ avec $I_{y\ mini}$ ou inversement). Si θ est l'angle repérant la position des axes principaux ; cas général :

$$Ix' = \frac{Ix + Iy}{2} + \left(\frac{Ix - Iy}{2}\cos 2\theta\right) + Ixy\sin 2\theta$$
$$Iy' = \frac{Ix + Iy}{2} - \left(\frac{Ix - Iy}{2}\cos 2\theta\right) - Ixy\sin 2\theta$$
$$Ix'y' = \left(\frac{Ix - Iy}{2}\sin 2\theta\right) + Ixy\cos 2\theta$$

La technique du cercle de Mohr est utilisable.

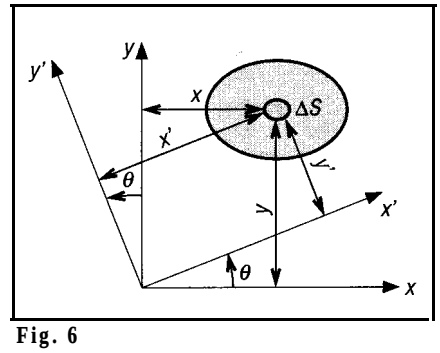
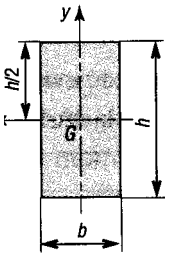
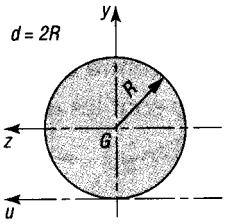


Fig. 6

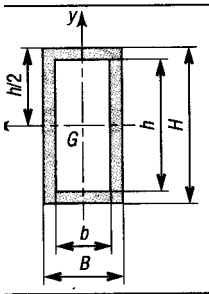
FORMULAIRE Moments quadratiques



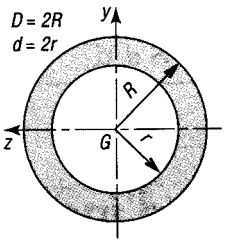
$$S = b\,h$$
$$I_z = \frac{b\,h^3}{12}$$
$$I_y = \frac{h\,b^3}{12}$$
$$I_G = \frac{b\,h}{12}\left(h^2 + b^2\right) = I_y + I_z$$



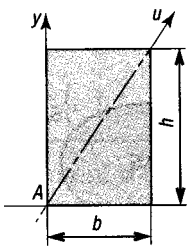
$$S = \pi R^2$$
$$I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$
$$I_u = \frac{5\,\pi R^4}{4} = \frac{5\,\pi d^4}{64}$$
$$I_G = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} = I_y + I_z$$



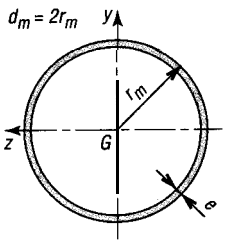
$$S = BH - bh$$
$$I_y = \frac{HB^3 - hb^3}{12}$$
$$I_z = \frac{BH^3 - bh^3}{12} = I_y + I_z$$



$$S = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$
$$I_y = I_z = \frac{\pi}{4}\left(R^4 - r^4\right)$$
$$= \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right)$$
$$I_G = \frac{\pi}{2}\left(R^4 - r^4\right)$$
$$= \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right) = I_y + I_z$$



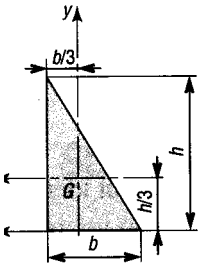
$$I_y = \frac{hb^3}{3}$$
$$I_z = \frac{bh^3}{3}$$
$$I_u = \frac{b^3 h^3}{6\left(b^2 + h^2\right)}$$
$$I_A = \frac{b\,h}{3}\left(h^2 + b^2\right) = I_y + I_z$$



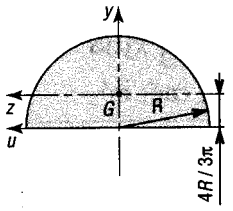
cas où e **est** faible

formules approchées

$$S = 2\,\pi\,r_m\,e = \pi\,e\,d_m$$
$$I_y = I_z = \pi\,e\,r_m^3 = \frac{\pi}{8}\,e\,d_m^3$$
$$I_G = 2\,\pi\,e\,r_m^3 = \frac{\pi}{4}\,e\,d_m^3$$

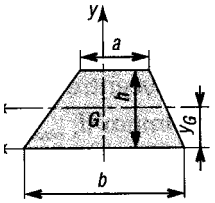


$$S = \frac{bh}{2}$$
$$I_y = \frac{h\,b^3}{36}$$
$$I_z = \frac{b\,h^3}{36}$$
$$I_u = \frac{b\,h^3}{12}$$
$$I_G = \frac{b\,h}{36}\left(h^2 + b^2\right) = I_y + I_z$$

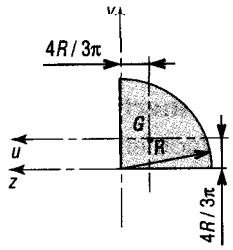


1/2 cercle

$$S = \frac{\pi R^2}{2}$$
$$I_y = \frac{\pi R^4}{8}$$
$$I_z \simeq 0{,}1098\ \ R^4$$
$$I_u = \frac{\pi R^4}{8}$$

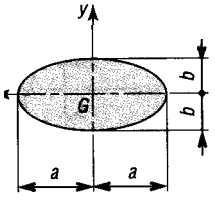


$$o - \frac{h}{2}\,(a \cdot b)$$
$$y_G = \frac{h\left(2a + b\right)}{3\left(a + b\right)}$$
$$I_z = \frac{h^3\left(a^2 + 4ab + b^2\right)}{36\left(a + b\right)}$$
$$I_u = \frac{h^3\left(3a + b\right)}{12}$$



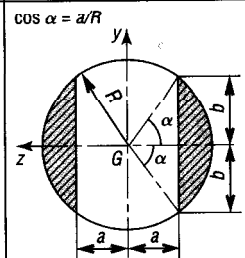
1/4 de cercle

$$S = \frac{\pi R^2}{4}$$
$$I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{16}$$
$$I_u = 0{,}05488\ \ R^4$$



ellipse

$$S = \pi\,a\,b$$
$$I_z = \frac{\pi\,a\,b^3}{4}$$
$$I_y = \frac{\pi\,b\,a^3}{4}$$
$$I_G = \frac{\pi\,a\,b}{4}\left(a^2 + b^2\right) = I_z + I_y$$



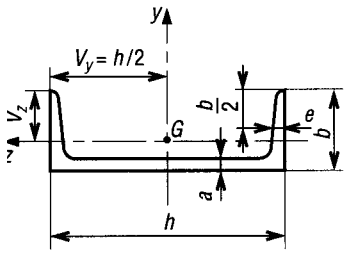
cercle + trou de perçage

$b = \sqrt{R^2 - a^2}$; α en radian

$$S = 2R^2\left(\alpha - \frac{a\,b}{R^2}\right)$$
$$I_z = \frac{R^4}{6}\left(3\alpha - \frac{3\,ab}{R^2} - \frac{2\,ab^3}{R^4}\right.$$
$$I_y = \frac{R^4}{2}\left(\alpha - \frac{ab}{R^2} + \frac{2\,ab^3}{R^4}\right)$$

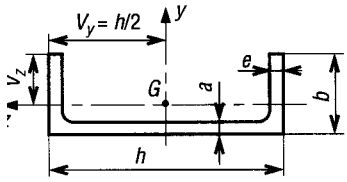
Moments quadratiques des profilés usuels

U P N



profil	h (mm)	b (mm)	a (mm)	e (mm)	S (cm²)	kg.m⁻¹	I_y (cm⁴)	I_y/V_y (cm³)	I_z (cm⁴)	I_z/V_z (cm³)	V_z (mm)
40	40	20	5,0	5,5	3,66	2,87	7,6	3,81	1,12	0,84	13,33
60	60	30	6,0	6,0	6,46	5,07	31,6	10,6	4,51	2,16	20,87
80	80	45	6,0	8,0	11,0	8,64	106	26,5	19,4	6,36	30,5
100	100	50	6,0	8,5	13,5	10,6	206	41,2	29,3	8,49	34,51
120	120	55	7,0	9,0	17,0	13,4	364	60,7	43,2	11,1	38,91
140	140	60	7,0	10,0	20,4	16,0	605	86,4	62,7	14,8	42,36
160	160	65	7,5	10,5	24,0	18,8	925	116,0	85,3	18,3	46,61
180	180	70	8,0	11,0	28,0	22,0	1 350	150,0	114,0	22,4	50,89
200	200	75	8,5	11,5	32,2	25,3	1 910	191,0	148,0	27,0	54,81
220	220	80	9,0	12,5	37,4	29,4	2 690	245,0	197,0	33,6	58,63
240	240	85	9,5	13,0	42,3	33,2	3 600	300,0	248,0	39,6	62,62
260	260	90	10,0	14,0	48,3	37,9	4 820	371,0	317,0	47,7	66,45
280	280	95	10,0	15,0	53,3	41,8	6 276	450,0	390,0	57,2	68,18
300	300	100	10,0	16,0	58,8	46,2	8 030	535,0	495,0	67,8	73,01

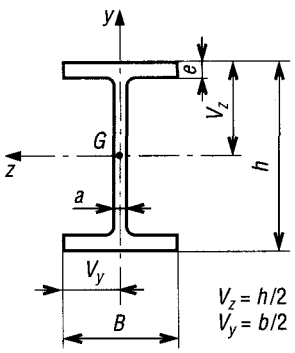
U A P



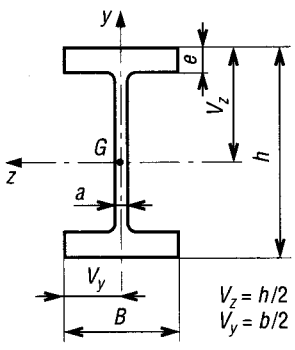
80	80	45	5,0	8,0	10,7	8,38	107	26,8	21,3	7,38	28,86
100	100	50	5,5	8,5	13,4	10,5	209	41,9	32,8	9,95	32,96
130	130	55	6,0	9,5	17,5	13,7	459	70,7	51,3	13,8	37,17
150	150	65	7.0	10,25	22,9	17,98	797	106,0	93,3	21,0	44,42
175	175	70	7,5	10,75	27,0	21,2	1 272	145,0	126,4	25,9	48,80
200	200	75	8,0	11,5	32,0	25,1	1 946	195,0	169,7	32,1	52,86
220	220	80	8,0	12,5	36,3	28,5	2 710	247,0	222,3	39,8	55,85
250	250	85	9,0	13,5	43,8	34,4	4 136	331,0	296,7	49,1	60,42
270	270	95	9,0	14,5	50,1	39,4	5 675	420,0	436,3	65,4	66,71
300	300	100	9,5	16,0	58,6	46,0	8 170	545,0	562,1	79,8	70,43

							I_z (cm⁴)	I_z/V_z (cm³)	I_y (cm⁴)	I_y/V_y (cm³)
80	80	46	3,8	5,2	7,64	6,0	80,1	20,0	8,49	3,69
100	100	55	4,1	5,7	10,3	8,1	171	34,2	15,9	5,79
120	120	64	4,4	6,3	13,2	10,4	318	53,0	27,7	8,65
140	140	73	4.7	6,9	16,4	12,9	541	77,3	44,9	12,3
160	160	82	5.0	7.4	20,1	15,8	869	109	68,3	16,7
180	180	91	5.3	8.0	23,9	18,8	1 317	146	101,0	22,2
200	200	100	5,6	8,5	28,5	22,4	1 943	194	142,0	28,5
220	220	110	5,9	9,2	33,4	26,2	2 772	252	205,0	37,5
240	240	120	6,2	9.8	39,1	30,7	3 892	324	284,0	47,3
270	270	135	6,6	10,2	45,9	36,1	5 790	429	420,0	62,2
300	300	150	7,1	10,7	53,8	42,2	8 356	557	604,0	80,5
330	330	160	7,5	11,5	62,6	19,1	1 1770	713	788,0	98,5
360	360	170	8,0	12,7	72,7	57,1	16 270	904	1 043,0	123,0
400	400	180	8,6	13,5	84,5	66,3	23 130	1160	1 318,0	146,0
450	450	190	9,4	14,6	98,8	77,6	33 740	1500	1 676,0	176,0
500	500	200	10,2	16,0	116,0	90,7	48 200	1930	2 142,0	214,0
550	550	210	11,1	17,2	134,0	106,0	67 120	2440	2 667,0	254,0
600	600	220	12,0	19,0	156,0	122,0	92 080	3070	3 387,0	308,0

I P E

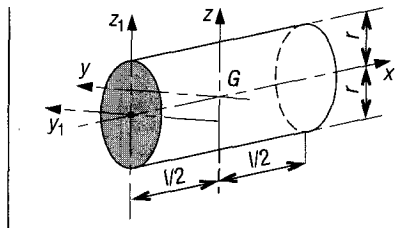
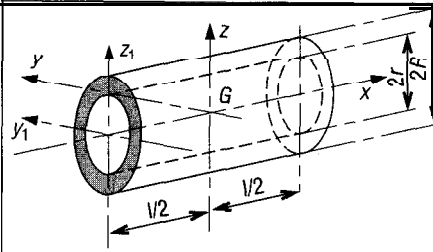
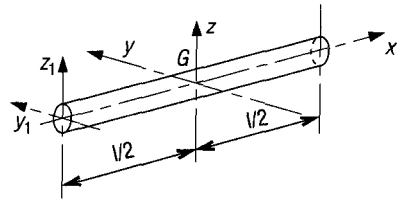
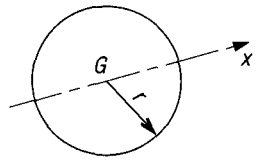
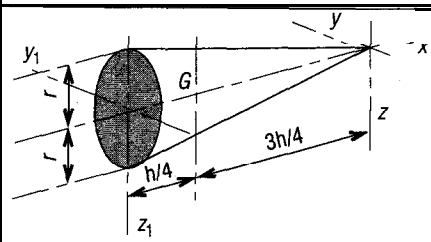
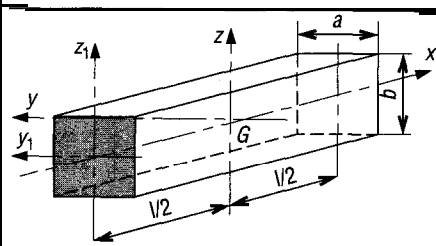
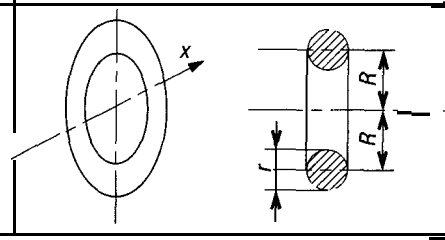


I P E R



140	142	72	5,3	7,8	18.3	14.4	611	86	48.7	13.5	
160	162	81	5,6	8,5	22,6	17,7	988	122	75,6	18,7	
180	183	89	6,4	9,5	28,0	22,0	1 554	170	112	25,2	
200	204	98	6,6	10,5	33,9	26,6	2 363	232	166	33,8	
220	225	108	6,7	11,8	40,2	231,6	3 474	309	249	46,0	
240	245	118	7,5	12,3	47,5	37,3	4 823	394	339	57,4	
270	276	133	7,7	13,1	55,9	43,9	7 312	530	516	77,6	
300	306	147	8,5	13,7	65,9	51,7	10 499	686	728	99,1	
330	336	158	9,2	14,5	76,8	60,3	14 688	874	958	121,0	
360	366	168	9,9	16,0	89,6	70,3	20 288	1 109	1270	151,0	
400	407	178	10,6	17,0	104,0	81,5	28 862	1 418	1606	180,0	
450	458	188	11,3	18,6	121,0	95,2	42 395	1 851	2069	220,0	
500	508	198	12,6	20,0	142,0	111,0	59 932	2 360	2600	263,0	
550	560	210	14,0	22,2	170,0	137,7	86 579	3 092	3447	328,0	
600	608	218	14,0	23,0	185,0	144,4	110 307	3 628	3992	366,0	

FORMULAIRE Moments d'inertie, matrice d'inertie

Cylindre plein		$J_x = \frac{mr^2}{2}$; $J_z = J_y = \frac{mr^2}{4} + \frac{ml^2}{12}$; $J_{z1} = J_{y1} = \frac{mr^2}{4} + \frac{ml^2}{3}$; m = masse du cylinc ; volume $V = \pi . r^2 . l$
Cylindre creux		$J_x = \frac{m\left(R^2 + r^2\right)}{2} \approx m . r_m^2$ $\left(r_m = \frac{R + r}{2}\right)$; $J_z = J_y = \frac{m\left(R^2 + r^2\right)}{4} + \frac{m . l^2}{12}$; $J_{z1} = J_{y1} = \frac{m\left(R^2 + r^2\right)}{4} + \frac{m . l^2}{3}$
Tige mince		$J_z = J_y = \frac{ml^2}{12}$; $J_{z1} = J_{y1} = \frac{m . l^2}{3}$; $J_x = 0$
Sphère		$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} mr^2$; $V = \frac{4 \pi r^3}{3}$
Cône plein		$J_x = \frac{3 mr^2}{10}$; $J_y = J_z = \frac{3 mr^2}{20} + \frac{3mh^2}{5}$; $J_{y1} = J_{z1} = \frac{3 mr^2}{20} + \frac{mh^2}{10}$; $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Parallélépipède rectangle		$J_x = \frac{m}{12}\left(a^2 + b^2\right)$; $J_y = \frac{m}{12}\left(b^2 + l^2\right)$; $J_z = \frac{m}{12}\left(a^2 + l^2\right)$; $J_{y1} = \frac{mb^2}{12} + \frac{ml^2}{3}$; $V = a . b . l$
Tore		$J_x = \frac{m}{4}\left(4R^2 + 3r^2\right)$; $V = 2\pi^2 R r^2$

ANNEXE 3

MOMENTS D'INERTIE - MATRICE D'INERTIE

OBJECTIFS

- Définir les notions de moment d'inertie, de rayon de gyration.
- Donner les formules de changement d'axe.
- Donner un formulaire général.
- Donner les propriétés et les formes particulières des matrices d'inertie.

1 - Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

1. Moment d'inertie d'un point matériel ou d'une masse élémentaire

Le moment d'inertie ΔJ_u, par rapport à l'axe u, du point matériel M de masse Am ou dm, situé à la distance constante r de l'axe u, est égal à :

$$\Delta J_u = r^2 \, \Delta m = r^2 \, dm \quad \text{unités : kg.m}^2$$

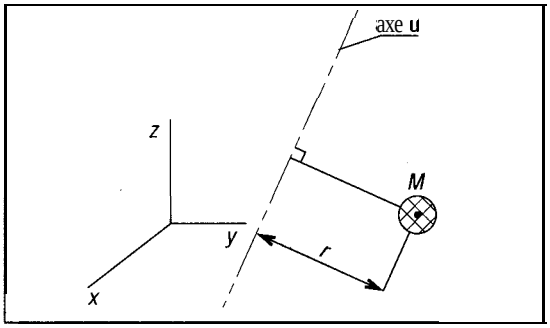


Fig. 1

2. Moment d'inertie d'un solide de masse m par rapport à un axe

Le moment d'inertie J_u, par rapport à l'axe u, d'un solide de masse m, est égal à la somme des moments d'inertie (par rapport au même axe) de l'ensemble des points matériels $M_1, M_2, \ldots, M_n$ constituant le solide.

$$J_u = r_1^2 \, \Delta m_1 + r_2^2 \, \Delta m_2 + \ldots + r_n^2 \, \Delta m_n$$

$$J_u = \sum_{(s)} r^2 \, \Delta m = \int r^2 \, dm$$

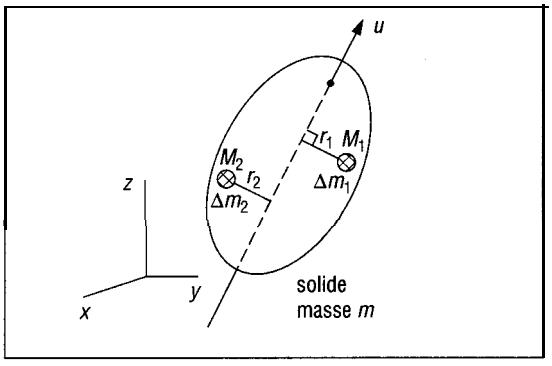


Fig. 2

3. Rayon de gyration r_k

Si J_u est le moment d'inertie, par rapport à l'axe u, d'un solide de masse m, le rayon de gyration r_k est défini par :

$$r_k = \sqrt{\frac{J}{m}} \quad \text{ou} \quad J = m\, r_k^2$$

Remarque : tout se passe comme si la masse m du solide était concentrée en un point situé à la distance r_k de l'axe u.

4. Changement d'axe

Les axes u et u_G sont parallèles et distants de d. La relation indiquée généralise la formule de Huygens.

$$J_u = J_{uG} + md^2$$

Si on fait intervenir les rayons de gyration respectifs :

$$r_k^2 = r_{kG}^2 + d^2$$

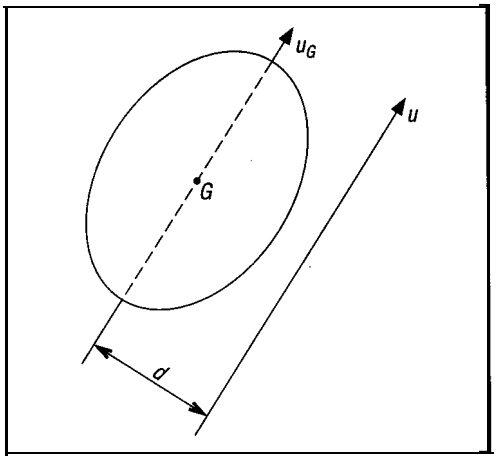


Fig. 3

5. Moment d'inertie des solides composés

Le moment d'inertie d'un solide composé est égal à la somme arithmétique des moments d'inertie de chacun des solides constitutifs par rapport au même axe (même démarche que pour les moments quadratiques).

II - Produits d'inertie Jxy, Jxz, Jyz

Lorsque les solides sont en rotation dans l'espace à trois dimensions, les produits d'inertie apparaissent lors des calculs dynamiques. Ils servent également à la définition de la matrice d'inertie d'un solide (voir chapitre « cinétique dans l'espace »).

$$J_{xy} = J_{yx} = \int xy\, dm$$
$$J_{xz} = J_{zx} = \int xz\, dm$$
$$J_{yz} = J_{zy} = \int yz\, dm$$

Huygens :

$$J_{xy} = J_{x_G y_G} + m\, dx\, dy$$
$$J_{yz} = J_{y_G z_G} + m\, dy\, dz$$
$$J_{xz} = J_{x_G z_G} + m\, dx\, dz$$

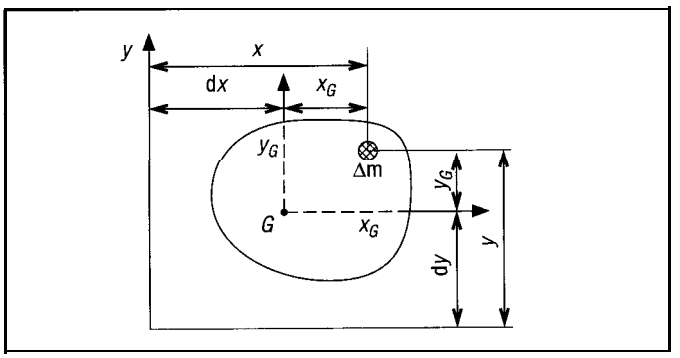


Fig. 4

III - Matrice ou tenseur d'inertie

1. Définition

La notion de matrice ou tenseur d'inertie a été introduite dans le chapitre « cinétique dans l'espace ». Elle est définie par :

$$[J_A]_{xyz} = \begin{vmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{vmatrix}$$

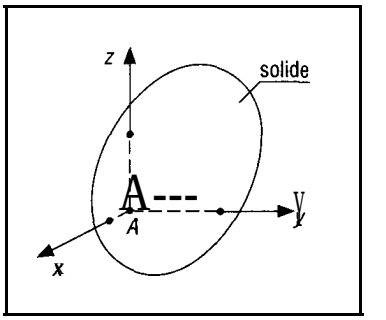


Fig. 5

2. Formules utiles

Moment d'inertie par rapport au point A :

$$J_A = 1/2\ (J_{xx} + J_{yy} + J_{zz})$$

Moment d'inertie du solide par rapport à un axe u quelconque passant par A :

$$J_{A,u} = \vec{u}\,[J_A][\vec{u}]$$

3. Cas particuliers liés aux symétries du solide

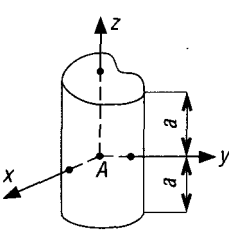
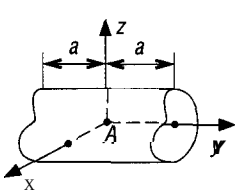
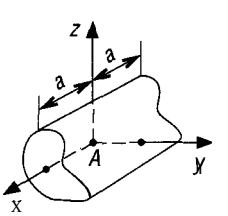
Particularité du solide	Exemple	Propriétés	Forme de la matrice d'inertie en A : $[J_A]$,
Plan de symétrie (A, x, y)		$J_{xz} = 0$ $J_{yz} = 0$	$\begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & 0 \\ -J_{xy} & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}$
Plan de symétrie (A, x, z)		$J_{xy} = 0$ $J_{yz} = 0$	$\begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ -J_{xz} & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}$
Plan de symétrie (A, y, z)		$J_{xy} = 0$ $J_{xz} = 0$	$\begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & -J_{yz} \\ 0 & -J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix}$

Fig. 6

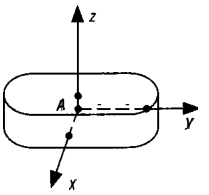
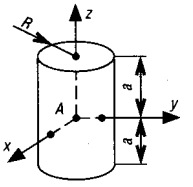
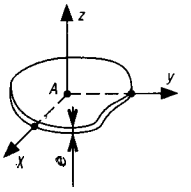
articularité du solide	Exemple	Propriétés	Forme de la matrice d'inertie en A : $[J_A]_{xyz}$
Axe le symétrie (A, z)		$J_{xy} = 0$ $J_{yz} = 0$ $J_{xz} = 0$	$\begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}$
Axe de révolution (A, z)		$J_{xy} = 0$ $J_{yz} = 0$ $J_{xz} = 0$ $J_{xx} = J_{yy} = J$	$\begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}$
Solide plat (" sans paisseur ") plan (x, y)		$J_{zz} = J_{xx} + J_{yy}$ ρ = masse volumique $J_{xz} = J_{yz} = 0$ $J_{xx} = \rho_e I_x$ $J_{yy} = \rho_e I_y$ I = moment quadratique	$\begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & 0 \\ -J_{xy} & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}$

Fig. 6 (suite)

4, Théorème de **Huygens** généralisé

Les repères (G, x_G, y,, z_G) et A(x, y, z) sont liés au solide.

Les axes de repères sont parallèles entre eux :

$$\overrightarrow{AG} = X_G \vec{i} + Y_G \vec{j} + Z_G \vec{k}$$

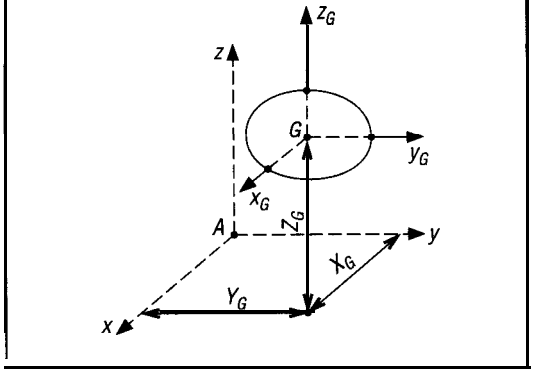


Fig. 7

La matrice d'inertie en ***A*** est obtenue par :

$$[J_A] = [J_G] + \begin{bmatrix} m\left(Y_G^2 + Z_G^2\right) & -m X_G Y_G & -m X_G Z_G \\ -m X_G Y_G & m\left(X_G^2 + Z_G^2\right) & -m Y_G Z_G \\ -m X_G Z_G & -m Y_G Z_G & m\left(Y_G^2 + X_G^2\right) \end{bmatrix}$$

Remarque

Les moments d'inertie suivant la diagonale sont minimaux au centre de gravité G.

Système international d'unités (unités SI)

Unités de base du système international

Nom	Unité	Symbole
Longueur	mètre	m
Angle plan	radian	rad
Angle solide	stéradian	sr
Masse	kilogramme	kg
Temps	seconde	s
Intensité de courant électrique	ampère	A
Température thermodynamique	degré Kelvin *	K
Quantité de matière	mole	mol
Intensité lumineuse	candela	cd

* 1 degré celsius (°C) = 1 Kelvin (K)

La température Celsius (t_c) est liée à la température thermodynamique Kelvin (T) par la relation :
$T = t_c + 273{,}15$ (exemple : 0 °C = 273,15 K)

Conversion entre échelle Celsius (t_c) et échelle anglo-saxonne Farenheit (t_f) : $t_c = (t_f - 32)/1{,}8$

Préfixes pour multiples et sous multiples

Nom	Symbole	Facteur
exa	E	1 000 000 000 000 000 000 = 10^{18}
péta	P	1 000 000 000 000 000 = 10^{15}
téra	T	1 000 000 000 000 = 10^{12}
giga	G	1 000 000 000 = 10^{9}
méga	M	1 000 000 = 10^{6}
kilo	k	1 000 = 10^{3}
hecto	h	100 = 10^{2}
déca	da	10 = 10^{1}
		1 = 10^{0}
déci	d	0,1 = 10^{-1}
centi	c	0,01 = 10^{-2}
milli	m	0,001 = 10^{-3}
micro	µ	0,000 001 = 10^{-6}
nano	n	0,000 000 001 = 10^{-9}
pico	p	0,000 000 000 001 = 10^{-12}
femto	f	0,000 000 000 000 001 = 10^{-15}
atto	a	0.000 000 000 000 000 001 = 10^{-18}

Unités dérivées pour les grandeurs les plus usuelles

Grandeur	Symb.	Unités : Nom et symbole	Unités : Valeur en unités de base	Multiples et sous-multiples ayant un nom particulier : Nom	Symb.	Valeur SI	Unités usuelles hors système et unites anglo-saxonnes : Nom	Symb.	Valeur SI
Longueur	L, l...	mètre	m	angstrom micromètre ou micron	A µm	10^{-10} m 10^{-6} m	pouce (inch) pied (foot) yard	in ft yd	25,4 mm 304,8 mm 0,9144 m
Aire ou superficie	S, A...	mètre carré	m^2	hectare are	ha a	10 000 m^2 100 m^2	pouce carré (square inch)	in^2	6,4516 cm^2
Volume	V	mètre cube	m^3	litre stère	L st	10^{-3} m 1 m^3	gallon (UK) tonneau (navire)		4,546 L 1,13267 m^3
Angle plan	α, β...	radian	rad	tour	tr	2π rad	degré d'angle minute d'angle seconde d'angle	° ' "	$\pi/180$ rad 1/60 ° 1/60
Masse	m	kilogramme	kg	tonne quintal	t q	1 000 kg 100 kg	carat métrique pound (livre) ounce (once)	 lb oz	0,2 g 0,4536 kg 28,349 g
Force	F	newton (N)	$kg.m.s^{-2}$	décanewton	daN	10 N	Pound-force kilogramme-force	lbf kgf	0,4448 daN 0,981 daN
Moment d'une force et couple	M	newton mètre	N.m				Pound-force foot	lbf.ft	1,356 Nm
Pression et contraintes	p	pascal (Pa)	$N.m^{-2}$	bar atmosphère	bar atm	10^5 Pa 1013 mbar	Pound-force par inch carré	psi	6894,754 Pa
Energie-travail et quantité de chaleur	E, W	joule (J)	N.m	wattheure électron volt	Wh eV	3600 J $1{,}59.10^{-19}$ J	calorie thermie frigorie	cal th fg	4,1855 J 10^6 cal -1 kcal
Puissance	P	watt (W)	$J.s^{-1}$	kilowatt	kW	1000 w	cheval (vapeur) horsepower	cv hp	736 W 746 W
Vitesse	v	mètre par seconde	$m.s^{-1}$	kilomètre par heure	$km.h^{-1}$	1/3,6 $m.s^{-1}$	mile nautique nœud		1,852 km 1,852 km/h
Vitesse angulaire	ω	radian par seconde	$rad.s^{-1}$	tour par seconde	$tr.s^{-1}$	2 x $rad.s^{-1}$	tour par minute (N)	tr/min	30 / π
Viscosité cinématique	ν	mètre carré par seconde	$m^2.s^{-1}$	stoke	St	10^{-4} $m^2.s^{-1}$			
Viscosité dynamique	μ	pascal seconde	$Pa.s^{-1}$	poise	P	0,1 Pa.s			

Index

Accélération
absolue 129, 202
angulaire 152
complémentaire 181
de Coriolis 181, 203
de la pesanteur (*g*) 44
détermination graphique 167, 183
normale 153
relative 129
tangentielle 153
vecteurs 127, 128
actions mécaniques
à distance 44
de contact 47
liaisons usuelles 47, 115
adhérence 77
aires 466
allongement
définitions 280
pour cent 283
relatif 281
angle
de frottement 78
de glissement 298
de rotation 151
d'Euler 195
unitaire de torsion 309
arc-boutement 8 1
Archimède 467
axe neutre 337, 368

Barycentre 464
base et roulante 165

Câbles (frottement) 86
Centre
de gravité 463
de masse 463
de percussion 208
instantané de rotation 164
cercle de Mohr
contraintes 403
déformations 424
charge
concentrée 45, 326
critique d'Euler 387
répartie 45, 329
chocs (notions) 239
cisaillement 207
coefficient de
concentration de contraintes 284, 312, 339
dilatation thermique 286
frottement 78, 79
Poisson 281, 283
résistance au roulement 87
restitution 239
sécurité 273
striction 283
coins et cônes 83
colinéaires (forces) 42
composantes d'une force 16
composition
des accélérations 180, 194
des mouvements 177
des vitesses 178, 194
concentrations de contraintes 284, 312, 339
conditions aux limites 350
cône de frottement 78
conservation
de l'énergie 226
de la quantité de mouvement 238
contraction latérale 281
contrainte
admissible 273, 280
biaxiale 401,410
cisaillement 27 1, 296
cisaillement maximal 402
critique d'Euler 390
définition 27 1
dans une section inclinée 283
d'origine thermique 286
normale 271, 279, 338, 378
plane 397
pratique 273, 280
principale 400
tangentielle 27 1, 296, 309,341
triaxiale 406
coordonnées
cartésiennes 8
d'une force 17
d'un point 11
d'un vecteur 8
coplanaires (forces) 37
Coulomb (lois de) 80
couple
définition 23
torseur 110
vecteur 24
gyroscopique 263
courroies (liens, câbles) 86
critères de limite élastique
Coulomb 416
Mohr 416
Tresca 414
Von Mises 414
Culman (méthode de) 50

D'Alembert 204
déformation
élastique 282
plastique 282
plane 421
principale 423
déformée
définition 349
formulaire 356
méthodes de calculs 350
degré de liberté 113, 192
densité 433
dérivée d'un vecteur
de base 189
dans différents repères 191
diagrammes
effort tranchant 327
moment fléchissant 327
disques de friction 85
double produit vectoriel 14
ductilité 284
dynamique 201, 251

Écoulement des fluides
laminaire 447
permanent 445
turbulent 447
uniforme 445
effort intérieur ou de cohésion
définition, conventions 267
composantes 269
diagrammes 328, 378
torseurs des 269
effort tranchant 269, 296, 325
élasticité 397
énergie, travail 2 17
énergie potentielle 220
énergie cinétique
définitions 221, 256
théorèmes 225, 257
enveloppes minces 409
équations
de Bernoulli 453
de mouvement 257
d'équilibre 42
d'Euler 258, 259, 260
de transformations 399, 423
équilibrage statique 262
équilibrage dynamique 262
équiprojectivité 111, 160
essai de traction 282
Euler 195, 387, 392,457
extérieures (forces) 38, 41, 42

Facteur de frottement 78
flambage plastique 391
flexion
calcul des constructions 339
charges concentrées 326
charges réparties 329
contraintes normales 338
contraintes tangentielles 341

diagrammes 327
déformée 349
déviée 369
efforts intérieurs 325
formulaire 356
hyperstatique 36 1
pure et simple 325
schématisations 323
flexion plus traction 377
flexion plus torsion 379
fluides
dynamique 445
pression dans les 46, 55, 436
statique 433
viscosités 434
force
notion de 15
composantes 16
concourantes 43, 48
coordonnées 17
coplanaires 37
de frottement 79
d'inertie 204
extérieure 38, 41
intérieure 42
moments d'une 20, 23
polygone 49, 51
puissance 223
résultantes 29
travail 2 18
triangle 43, 48
vecteur 15
formulaire
centre de gravité 466
flexion déformée 356
matrice d'inertie 475
moments quadratiques 470
moments d'inertie 476
profilés 47 1
torsion 315
formule de la sécante 395
formule de Mohr Cacquot 380
frottement 77

Glissement 150
gyration 466, 474
gyroscopes 263

Huygens 469, 473, 474, 475
hypothèses
de la RDM 266
de Navier Bernoulli 266
Barré de Saint Venant 272

Impulsion 234
impulsion angulaire 236
inertie
force 204
moment 472
instabilité élastique 388
isolement d'un solide 41

Jauges de contraintes 427
Joule 218, 477

Liaison parfaite 114
Liens flexibles et câbles 86
lignes de courant 446
limite élastique 280, 283
loi
conservation de l'énergie 226
de Hooke 282
de Hooke généralisée 407, 428
du frottement 80

Marge de sécurité 273
matrice d'inertie 255, 476
métacentre 439
méthode
de Crémona 71
de Culman 50
de Duteil 392
de la membrane 3 17
de résolution graphique 47
d'Euler Rankine 392
des nœuds 70
des sections 73
dite de la parabole 393
par intégration 349, 364
par superposition 362
module d'élasticité
longitudinal 282, 283
transversal 299
Mohr 103, 121, 380
moment
cinétique 235, 253
de torsion 269, 325
d'inertie 472
d'une force 20, 23
fléchissant 269, 325
idéal de flexion 380
quadratique 467
résultant 26
vecteur 21
mouvement
absolu 129
gyroscopique 263
pendulaire 209
plan 130, 159
rectiligne accéléré 145
rectiligne uniforme 145
relatif 129
rotation accéléré 152
rotation uniforme 152

Newton 38, 202,477
nœuds et barres 67
nombre de Reynolds 448

Palier lisse (frottement) 84
palier à butée 85
parallélogramme (règle) 6
Pascal (loi) 466
pascal (unité) 46, 477
paramétrages 135, 196
plan neutre 337, 371
pendules 209
perte de charge
régulière 449
singulière 450
pivotement (vitesse de) 180
points coïncidents 132
polygones (forces) 49, 51
poussée d'Archimède 438
poutre (notion de) 265
poutre non symétrique 369
pression
de contact 46
dans un fluide 436
sur une paroi 440
unités 477
principe
de d'Alembert 204
des actions mutuelles 39
de superposition 354
de transmissibilité des forces 38
principe fondamental de la
statique 38, 94, 112
dynamique 202, 205, 207, 210, 256
produit
d'inertie 469, 473
scalaire 11
vectoriel 12
puissance
notion de 217, 223
d'une force 223
d'un couple 224
d'un torseur 224

Quantité de mouvement
définition 233, 252
théorème de 234

Rayon de gyration 468, 473
référentiel 127
règle des trois doigts 22
repère de référence 127
rendement (notion de) 224
repérage des mouvements 135, 195
repère
absolu ou galiléen 129, 202
de référence 106
relatif 129
résistance
à la rupture 283
au roulement 87
pratique 273, 280
résultante
définition 29

de forces concourantes 30
de forces parallèles 32
cas général (plan) 32
roulement (vitesse de) 180

Scalaire 5
scalaire (produit) 11
solide de référence 103
sollicitations simples 269
sollicitations composées 269, 377
statique
cas de deux forces 42
cas de trois forces concourantes 43, 48
cas de quatre forces et plus 49
dans l'espace 93, 105
des fluides 433
dynamique et funiculaire 51
ensembles de solides 42
équations d'équilibre 42
isolement d'un solide 41
méthode de résolution 39, 113
méthodes graphiques 47
par les torseurs 105
principe fondamental 38, 95,112
systèmes
à masse conservative 251
dynamiquement équivalents 211
force-couple 33
hyperstatiques 53, 287, 361
statiquement équivalents 105
triangulés 67
vis-écrou (frottement) 85
Temps relatif et absolu 203
tenseur d'inertie 255, 476
théorème
d'Archimède 467
de conservation de l'énergie 226
de l'énergie cinétique 225, 257
de Pascal 436
des travaux virtuels 227
d'Euler (fluides) 457
de Varignon 21
du moment cinétique 235, 254
quantité de mouvement 234, 254
théorie des mécanismes 196
torseur d'action
couple 110
définition 107
des liaisons usuelles 115
écritures possibles 108
glisseur 110
opérations sur les 109
propriétés 111
torseur cinématique
définition 191
des liaisons usuelles 192
torseur cinétique 254
torsion
angle unitaire 308
calculs des constructions 311
contraintes 309
définition 307
efforts intérieurs 309
formules 310, 311
poutres non circulaires 315
torsion plus cisaillement 381
traction plus cisaillement 295
trajectoires 132
translations rectilignes 130, 141
travail
notion de 217
d'une force 218
d'un couple 2 19
virtuel 227
treillis 67
tubes de courant 446

Unités (systèmes) 477

Vecteur
accélération 134, 153, 166
accélération angulaire 154, 166
coordonnée d'un 8
couple 24
définition 6
déplacement 133
force 15
moment 21
opérations sur les 6
position 93, 133
rotation 154, 166
vitesse 134, 153, 165
virtuel (travail) 227
viscosité
cinématique 434
dynamique 434
vis écrou (frottement) 85
vitesse angulaire 15 1
vitesse de glissement 180

watt 223,477

Édition : Isabelle Hannebicque

Coordination artistique : Sophie Lepouzé

Maquette, mise en page : Polyphile

Dessins techniques : *f*ractale

Couverture : Jérôme Lo Monaco

Je tiens *à remercier mes collègues, les professeurs Louis Martine et* **Thérèse** *Legrand, pour leur précieux concours dans la mise au point de ce livre. Je remercie également mon épouse Ingrid sans laquelle ce livre n'aurait pas été possible.*
J.-L. Fanchon

N° d'Éditeur : 10052065 - III - 14e - OSBB - 80" - Fractale - Novembre 1998
Imprimé en Italie par G. Canale & C. S.p.A. Borgaro T.se Turin

JEAN-LOUIS FANCHON

GUIDE DE MÉCANIQUE

Sciences et technologies industrielles

Ce livre est destiné à tous les étudiants qui poursuivent des études en Sciences et technologies industrielles (STI) : BTS, IUT, DEUG, classes préparatoires, formation continue, y compris les débutants. Il sert aussi de référence à tous ceux qui sont en activité professionnelle.

La mécanique et ses principes fondamentaux sont développés en tant que science industrielle. L'ouvrage, conçu comme un guide de référence, rassemble l'essentiel des connaissances nécessaires aux applications usuelles de la mécanique.

Le cours proposé se divise en six parties : statique, cinématique, dynamique ou cinétique, résistance des matériaux, élasticité et mécanique des fluides.

A l'intérieur des parties, chaque chapitre propose des éléments de cours, des exercices résolus et des exercices à résoudre, dont près de la moitié avec réponses, qui sont destinés au travail personnel.

Les nombreux exercices proposés offrent une grande variété de choix aux utilisateurs : exécution manuelle ou informatique, solution graphique ou calculée, modélisations diverses, vecteurs, torseurs ...

Les méthodes proposées et les simplifications parfois adoptées, ne sauraient remplacer, en usage professionnel, les documents officiels et les procédures normalisées.

NATHAN

9 782091 765709

Maquette & illustration
Jérôme LO MONACO