Les torseurs

1 Définition

On considère un champ de vecteurs, noté $\overrightarrow{\mathcal{M}}$, qui à tout point M associe le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}}_M$. Les propositions suivantes sont alors **équivalentes** :

- Le champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est ***équiprojectif***.
- Il existe un **unique** vecteur $\vec{R}$ tel que :

$$\boxed{\forall\, M, N : \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}}_M = \overrightarrow{\mathcal{M}}_N + \vec{R} \wedge \overrightarrow{NM}} \tag{1}$$

- Le champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est un ***torseur*** ;
  - de ***résultante*** : $\vec{R}$,
  - de ***moment*** au point M : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_M$.

  $\vec{R}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_M$ sont appelés les ***éléments de réduction*** du torseur au point M.

Remarques :

- le champ des vecteurs vitesse dans un solide ***est*** un torseur (appelé ***torseur cinématique***) :

$$\exists! \quad \vec{\Omega}_{1/0} \quad tq. \quad \forall\, M, N : \qquad \vec{V}(M \in 1/0) = \vec{V}(N \in 1/0) + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{NM}$$

- le champ des vecteurs accélération dans un solide ***n'est pas*** un torseur :

$$\forall\, M, N : \qquad \vec{\Gamma}(M \in 1/0) = \vec{\Gamma}(N \in 1/0) + \frac{d\ \vec{\Omega}_{1/0}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{NM} \ldots + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge (\vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{NM})$$

2 Notation

On note un torseur définit en N par le couple de vecteurs $\vec{R}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_N$:

$$\left\{\mathcal{T}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \vec{R} \\ \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_N \end{array}\right\}_{\mathbf{N}} = \left\{\begin{array}{cc} R_x & \mathcal{M}_x \\ R_y & \mathcal{M}_y \\ Rz & \mathcal{M}_z \end{array}\right\}_{\mathbf{N}}^{\mathcal{B}}$$

coordonnées de $\vec{R}$ dans $\mathcal{B}$ — coordonnées de $\overrightarrow{\mathcal{M}}_N$ dans $\mathcal{B}$

Propriété : le moment d'un torseur peut être déterminé en tout point. On a donc :

$$\forall\, M, N : \qquad \left\{\mathcal{T}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \vec{R} \\ \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_M \end{array}\right\}_{\mathbf{M}} = \left\{\begin{array}{c} \vec{R} \\ \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_N \end{array}\right\}_{\mathbf{N}} \qquad (\text{avec : } \overrightarrow{\mathcal{M}}_M = \overrightarrow{\mathcal{M}}_N + \vec{R} \wedge \overrightarrow{NM})$$

3 Opérations sur les torseurs

Automoment d'un torseur : on appelle automoment d'un torseur le produit scalaire de ses éléments de réduction.

L'automoment d'un torseur est un invariant scalaire.

$$\left\{\mathcal{T}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R} \\ \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_M} \end{array}\right\}_{\mathbf{M}} \qquad \boxed{\forall\, M, N : \qquad \overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{\mathcal{M}_M} = \overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{\mathcal{M}_N}}$$

Soit deux torseurs :

$$\left\{\mathcal{T}_1\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R_1} \\ \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{1M}} \end{array}\right\}_{\mathbf{M}} \quad \text{et} \quad \left\{\mathcal{T}_2\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R_2} \\ \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{2N}} \end{array}\right\}_{\mathbf{N}}$$

Égalité de deux torseurs :

$$\left\{\mathcal{T}_1\right\} = \left\{\mathcal{T}_2\right\} \quad \text{ssi} \quad \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_2} \\ \\ \text{en un point } \boldsymbol{P} \text{ quelconque on a : } \quad \overrightarrow{\mathcal{M}_{1\boldsymbol{P}}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{2\boldsymbol{P}}} \end{array}\right.$$

Somme de deux torseurs :

$$\left\{\mathcal{T}_1\right\} + \left\{\mathcal{T}_2\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R_1} \\ \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{1M}} \end{array}\right\}_{\mathbf{M}} + \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R_2} \\ \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{2N}} \end{array}\right\}_{\mathbf{N}} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} \\ \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{1\boldsymbol{P}}} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{2\boldsymbol{P}}} \end{array}\right\}_{\boldsymbol{P}}$$

Comoment de deux torseurs :

<u>Le comoment de deux torseurs est un invariant scalaire</u>.

$$\left\{\mathcal{T}_1\right\} \times \left\{\mathcal{T}_2\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R_1} \\ \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{1M}} \end{array}\right\}_{\mathbf{M}} \times \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R_2} \\ \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{2N}} \end{array}\right\}_{\mathbf{N}} = \overrightarrow{R_1}\cdot\overrightarrow{\mathcal{M}_{2\boldsymbol{P}}} + \overrightarrow{R_2}\cdot\overrightarrow{\mathcal{M}_{1\boldsymbol{P}}} \qquad \forall\, \boldsymbol{P}$$

chacune des opérations précédentes **nécessite** de déterminer les moments résultants des deux torseurs en un **même** point. Celui-ci peut, bien-sûr, être choisi librement.

4 Torseurs particuliers

Torseur nul : un torseur est dit ***nul*** s'il existe un point où ses éléments de réduction sont nuls. Ils le sont alors en tout point.

$$\forall\, P \;:\quad \left\{0\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{\mathbf{P}}$$

Glisseur : un torseur est un ***glisseur* s'il existe un point où** son moment est nul.

$$\exists\, P \quad tq. \;:\quad \left\{\mathcal{G}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R} \\ \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{\mathbf{P}}$$

Torseur couple : on appelle ***torseur couple*** un torseur dont la résultante est nulle. Le moment d'un tel torseur est indépendant du point où il est déterminé.

$$\forall\, P \;:\quad \left\{\mathcal{C}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_M} \end{array}\right\}_{\mathrm{M,\ P}}$$

Remarque : l'automoment de ces différents torseurs est nul.

5 Axe central d'un torseur

Définition : on appelle ***axe central d'un torseur***, s'il existe, le lieu des points I où le moment est colinéaire à la résultante du torseur. Si l'on considère un torseur :

$$\left\{\mathcal{T}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R} \\ \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_M \end{array} \right\}_{\mathbf{M}} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{R} \neq \overrightarrow{0}$$

l'axe central de $\left\{\mathcal{T}\right\}$ est donc l'ensemble des points I tels que :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_I = \lambda\, \overrightarrow{R}}$$

Propriétés :

- L'axe central d'un torseur est une droite dont le vecteur directeur est la résultante du torseur. L'ensemble des points I de l'axe central Δ de $\left\{\mathcal{T}\right\}$ peut être obtenu par :

$$\forall\, M : \qquad \overrightarrow{MI} = \frac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}_M}{\| \overrightarrow{R} \|^2} + \mu\, \overrightarrow{R} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

- Le moment du torseur est le même en tout point de son axe central. i.e. : $\exists\, \lambda\,!\; tq.\; \forall I \in \Delta,\; \overrightarrow{\mathcal{M}}_I = \lambda\, \overrightarrow{R}$.
  On appelle λ le ***pas du torseur***. Et l'on à :

$$\forall\, M : \qquad \lambda = \frac{\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_M}{\| \overrightarrow{R} \|^2}$$

- Le moment du torseur **est minimal** sur l'axe central (voir figure 1).

Remarques :

- Le moment sur l'axe central d'un glisseur est nul.
- L'axe central n'est pas défini ni pour un torseur nul, ni pour un torseur couple.

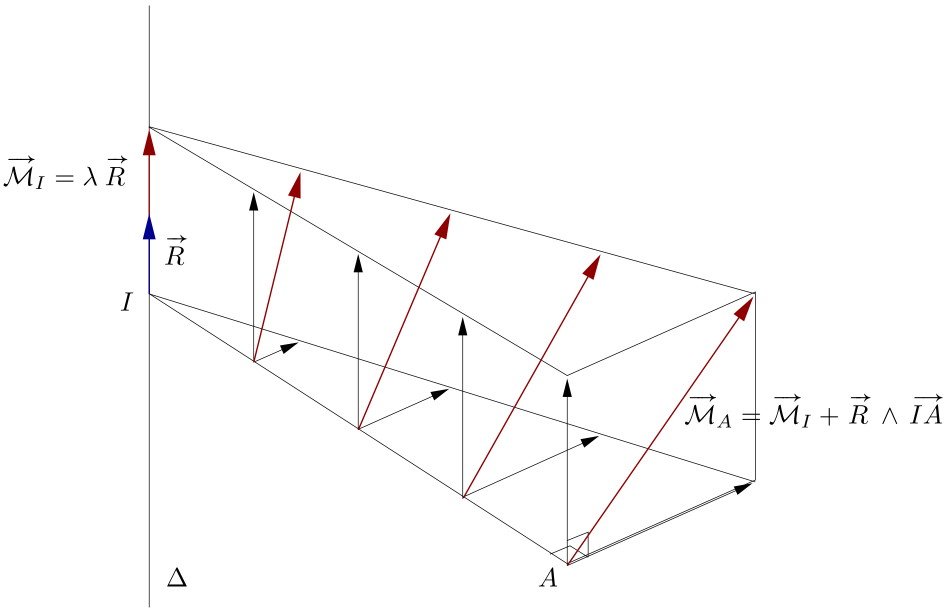
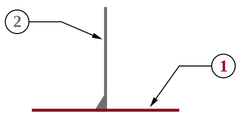
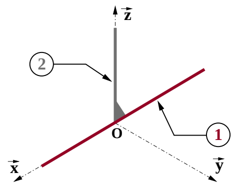
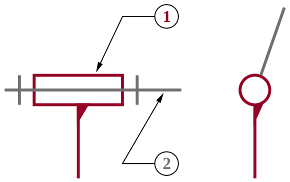
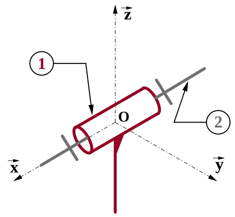
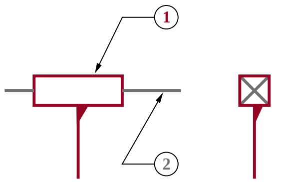
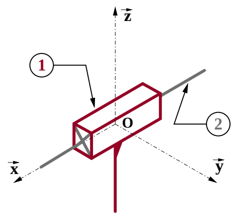
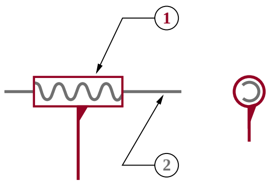
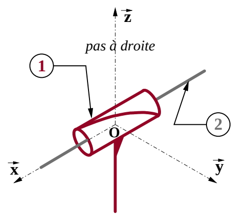


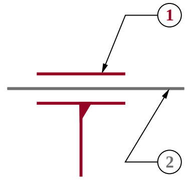
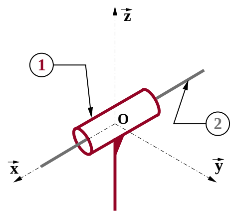
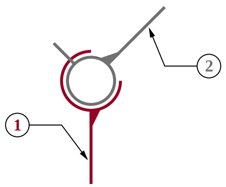
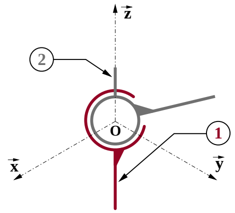
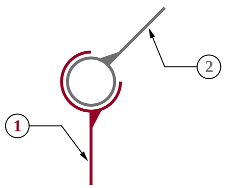
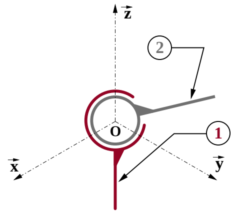
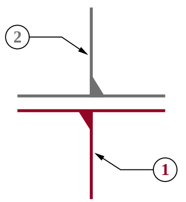
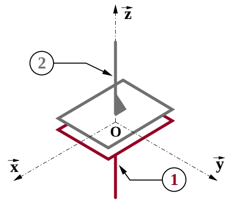
FIGURE 1 – Torseur ; champ de vecteurs

Désignation de la liaison	Schéma (normalisation **AFNOR**)		Caractéristiques géométriques	$\left\{\mathcal{V}_{\,2/1}\right\}$	$\left\{2\to 1\right\}$ liaison ***sans frottement***
	2D	3D			
Encastrement			aucune	$\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{\mathbf{C,I}}^{\mathcal{B}}$ $\forall\, I$	$\left\{\begin{matrix}X & L\\ Y & M\\ Z & N\end{matrix}\right\}_{\mathbf{C}}^{\mathcal{B}}$ $\forall\, C$ $I\ =\ C$
Pivot			axe $(O,\ \vec{x})$	$\left\{\begin{matrix}\omega_x & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{\mathbf{C,I}}^{\mathcal{B}}$ $\forall\, I\ \in\ (C,\vec{x})$	$\left\{\begin{matrix}X & 0\\ Y & M\\ Z & N\end{matrix}\right\}_{\mathbf{C}}^{\mathcal{B}}$ $\forall\, C\ \in\ (O,\vec{x})$ $I\ =\ C$
Glissière			direction $\vec{x}$	$\left\{\begin{matrix}0 & v_x\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{\mathbf{C,I}}^{\mathcal{B}}$ $\forall\, I$	$\left\{\begin{matrix}0 & L\\ Y & M\\ Z & N\end{matrix}\right\}_{\mathbf{C}}^{\mathcal{B}}$ $\forall\, C$ $I\ =\ C$
Hélicoïdale			axe $(O,\ \vec{x})$	$\left\{\begin{matrix}\omega_x & \dfrac{p}{2\,\pi}\,\omega_x\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{\mathbf{C,I}}^{\mathcal{B}}$ $\forall\, I\ \in\ (C,\vec{x})$	$\left\{\begin{matrix}X & -\dfrac{p}{2\,\pi}\,X\\ Y & M\\ Z & N\end{matrix}\right\}_{\mathbf{C}}^{\mathcal{B}}$ $\forall\, C\ \in\ (O,\vec{x})$ $I\ =\ C$

O : « centre » de la liaison $\qquad$ C : points où le torseur s'écrit sous forme canonique $\qquad$ I : points où le moment est identique à celui au point C

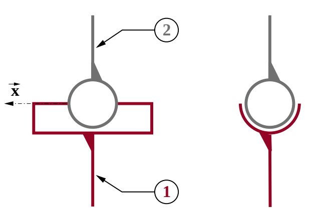
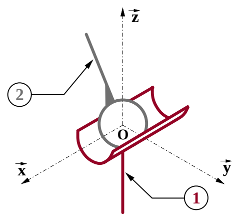
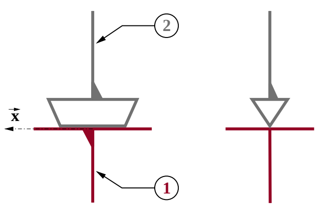
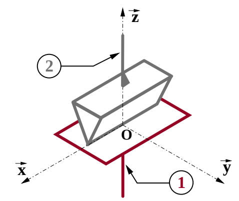
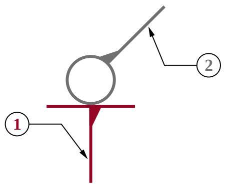
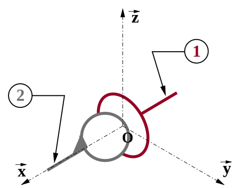
TABLE 1 – Liaisons normalisées

François Rouge

Désignation de la liaison	Schéma (normalisation **AFNOR**) 2D	3D	Caractéristiques géométriques	$\left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\}$	$\left\{2 \rightarrow 1\right\}$ liaison ***sans frottement***
Pivot glissant			axe $(O, \vec{x})$	$\left\{\begin{matrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{\mathbf{C},\mathbf{I}}^{\mathcal{B}}$ $\forall I \in (C, \vec{x})$	$\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{matrix}\right\}_{\mathbf{C}}^{\mathcal{B}}$ $I = C$
				$\forall C \in (O, \vec{x})$	
Rotule ou Sphérique à doigt			centre O doigt d'axe $(O, \vec{z})$ rainure dans un plan de normale $\vec{y}$	$\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{matrix}\right\}_{\mathbf{O}}^{\mathcal{B}}$	$\left\{\begin{matrix} X & L \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{matrix}\right\}_{\mathbf{O}}^{\mathcal{B}}$
				$I = C = O$	
Rotule ou Sphérique			centre O	$\left\{\begin{matrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{matrix}\right\}_{\mathbf{O}}^{\mathcal{B}}$	$\left\{\begin{matrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{matrix}\right\}_{\mathbf{O}}^{\mathcal{B}}$
				$I = C = O$	
Appui plan			normale $\vec{z}$	$\left\{\begin{matrix} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ \omega_z & 0 \end{matrix}\right\}_{\mathbf{C},\mathbf{I}}^{\mathcal{B}}$ $\forall I \in (C, \vec{z})$	$\left\{\begin{matrix} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{matrix}\right\}_{\mathbf{C},\mathbf{I}}^{\mathcal{B}}$ $\forall I \in (C, \vec{z})$
				$\forall C$	

O : « centre » de la liaison C : points où le torseur s'écrit sous forme canonique I : points où le moment est identique à celui au point C

TABLE 2 – Liaisons normalisées

Désignation de la liaison	Schéma (normalisation **AFNOR**) 2D	Schéma (normalisation **AFNOR**) 3D	Caractéristiques géométriques	$\left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\}$	$\left\{2 \rightarrow 1\right\}$ liaison ***sans frottement***
Linéaire annulaire ou Sphère-cylindre			centre O direction $\vec{x}$	$\left\{\begin{matrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{matrix}\right\}_{\mathbf{O}}^{\mathcal{B}}$	$\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{matrix}\right\}_{\mathbf{O}}^{\mathcal{B}}$
				$I = C = O$	
Linéaire rectiligne			droite de contact $(O, \vec{x})$ normale au plan $\vec{z}$	$\left\{\begin{matrix} \omega_x & v_x \\ 0 & v_y \\ \omega_z & 0 \end{matrix}\right\}_{\mathbf{C}}^{\mathcal{B}}$	$\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{matrix}\right\}_{\mathbf{C,I}}^{\mathcal{B}}$
				$\forall\, C \in (O, \vec{x}, \vec{z})$	
				$I = C$	$\forall\, I \in (C, \vec{z})$
Ponctuelle ou Sphère-plan			point de contact O normale au plan $\vec{x}$	$\left\{\begin{matrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & v_z \end{matrix}\right\}_{\mathbf{C}}^{\mathcal{B}}$	$\left\{\begin{matrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{\mathbf{C,I}}^{\mathcal{B}}$
				$\forall\, C \in (O, \vec{x})$	
				$I = C$	$\forall\, I \in (C, \vec{x})$

O : « centre » de la liaison C : points où le torseur s'écrit sous forme canonique I : points où le moment est identique à celui au point C

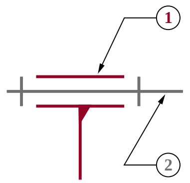
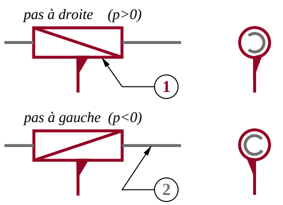
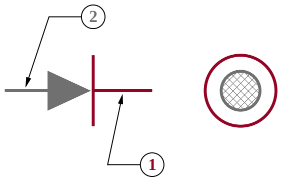
Schémas 2D : ancienne norme		
Liaison pivot	Liaison hélicoïdale	Liaison ponctuelle
		

TABLE 3 – Liaisons normalisées

V91A

François Rouge